

# مدل بهینه‌ی مش‌بندی اجزاء محدود به کمک الگوریتم جست‌وجوی ذرات باردار

حامد ارزانی\* (استادیار)

مهرداد قربانزاده (کارشناس ارشد)

مصطفی فکوری (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۳۹۷ (دوره ۲ - ۳۴، شماره ۱/۴، ص. ۹۱-۹۹)

در نوشتار حاضر، روش برآورد خطای نرم انرژی و نظریه غنی‌سازی - جابه‌جایی با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی جست‌وجوی ذرات باردار، برای بهبود دقت جواب‌های مسائل کشسانی ارائه شده است. در روش مذکور از دو روش غنی‌سازی و جابه‌جایی به طور هم‌زمان استفاده می‌شود. در گام اول با جابه‌جا کردن نقاط، خطای حاکم بر حوزه‌ی مسئله کاهش می‌یابد و در صورت نرسیدن به خطای مجاز، در گام بعدی برای المان‌هایی که خطای بالاتر از حد مجاز دارند، با استفاده از غنی‌سازی گره‌های جدید، به حوزه‌ی مسئله وارد و مش‌بندی جدید ارائه و فرایند مذکور تا حصول دقت موردنظر ادامه می‌یابد. شبکه‌ی بهینه‌ی ذکرشده، علاوه بر حل مشکل نزدیکی بیش از اندازه‌ی برخی گره‌ها که در روش غنی‌سازی متداول رخ می‌دهد، باعث بهبود دقت جواب‌ها می‌شود. مقایسه‌ی جواب‌های حاصل از روش غنی‌سازی جابه‌جایی با روش‌های دیگر و نیز جواب دقیق برای مثال‌هایی در حوزه‌ی کشسانی خطی حکایت از کارایی و دقت قابل قبول روش پیشنهادی دارد.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی، اجزاء محدود، تولید مش، سیستم جست‌وجوی ذرات باردار.

h.arzani@sru.ac.ir  
mehrshadkhaan@gmail.com  
m1361224fakouri@gmail.com

## ۱. مقدمه

مرز المان‌ها، ناپیوسته هستند یا دقت کمتری دارند که مقادیر تصحیح‌شده‌ی آن‌ها از طریق فرایند هموارسازی به دست می‌آید. اختلاف بین مقادیر خام و مقادیری که از طریق فرایند هموارسازی به دست آمده‌اند، تشکیل‌دهنده‌ی یک مقدار اولیه برای برآوردکننده‌ی خطا در روش اجزاء محدود است. کار اصلی در تخمین خطا در حوزه‌ی مذکور در سال ۱۹۸۶ آغاز شده است،<sup>[۱]</sup> که براساس روش به‌کار رفته، باقیمانده در یک گروه از المان‌ها و یا فقط یک المان، بررسی و خطای متناظر با آن تخمین زده می‌شود. همچنین برخی پژوهشگران در سال ۱۹۸۷، روشی برای برآورد خطا براساس باز یافت تنش‌ها پیشنهاد و در همان سال روش ساده‌ی برای تخمین خطای کلی و محلی در حل اجزاء محدود و شکلی ساده از آنالیز تطبیقی به روش افزایش تعداد المان ارائه کردند.<sup>[۲]</sup>

در ادامه، برخی پژوهشگران روش SPR را در برآورد خطای حل المان محدود و آنالیز تطبیقی، طی دو نوشتار معرفی کردند.<sup>[۳]</sup> امروزه در راستای بالا بردن دقت نتایج نهایی به‌دست آمده، روش‌های نوینی ارائه شده است که بر مبنای اصلاح انرژی کرنشی حاکم بر حوزه‌ی مسئله به نظریه حوزه پرداخته و با ایجاد زیرحوزه‌های مجازی و تغییرات حاصل از آن در ماتریس سختی نهایی، به جواب‌هایی با دقت بالا دست پیدا کرده‌اند، که در برخی پژوهش‌ها،<sup>[۴]</sup> به برخی از آن‌ها اشاره شده است. سیستم جست‌وجوی ذرات باردار، یک الگوریتم بهینه‌سازی بر مبنای اصول اولیه فیزیک و مکانیک است. این الگوریتم بر مبنای قوانین حاکم بر مسائل الکترواستاتیک

در فرایند تحلیل مسائل مهندسی، مسائل پیچیده‌ی فراروی مهندسان قرار دارد که اغلب یافتن پاسخی تحلیلی را برای آنان ناممکن می‌سازد. بنابراین روش‌های عددی جایگزین اصلی جهت تحلیل مسائل علمی مطرح شده است. از جمله معروف‌ترین روش‌های عددی می‌توان به روش تفاضل‌های محدود، روش احجام محدود، روش نقاط محدود و روش اجزاء محدود اشاره کرد. روش اجزاء محدود در مدل‌سازی دقیق نواحی از دامنه که در آن گرادینان شدید در پاسخ به چشم می‌خورد با مشکل مواجه می‌شود و فاقد دقت کافی است. فرایند تولید شبکه‌ی اجزاء محدود با تعداد و نوع المان مناسب از دیگر چالش‌های پیش رو در روش اجزاء محدود است و هدف از آن، کاهش هزینه‌های محاسباتی به‌منظور گسسته‌سازی و حل معادلات حاکم بر مسئله است. معمولاً مشتقات جواب در روش‌های مبتنی بر شبکه برای رسیدن به دقت قابل قبول، نیازمند عملیات نظریه هستند. به این منظور از روش‌های نظریه غنی‌سازی جابه‌جایی، نظریه غنی‌سازی افزایش مرتبه‌ی المان، نظریه غنی‌سازی افزایش تعداد المان و روش‌های ترکیبی از ۳ روش ذکرشده می‌توان استفاده کرد.<sup>[۱]</sup>

نظریه در روش‌های عددی، ابزاری کارآمد جهت کاهش هزینه‌های محاسباتی و افزایش دقت نتایج به‌دست آمده است. در روش اجزاء محدود، معمولاً تنش‌ها در

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۶/۳۱، اصلاحیه ۱۳۹۵/۹/۲۰، پذیرش ۱۳۹۵/۹/۳۰.

DOI:10.24200/J30.2019.1433

که در آن،  $\sigma$  مقدار دقیق بردار تنش،  $\sigma_h$  تنش به دست آمده از حل تقریبی،  $D$  ماتریس کشسانی و  $\Omega$  دامنه‌ی المان است. با توجه به اینکه در حالت کلی، جز در موارد خاص که حل تحلیلی بعضی از مسائل کشسانی موجود است، حل دقیق مسئله در دسترس نیست. لذا به جای استفاده از میدان دقیق تنش از میزان بهبود یافته‌ی آن جهت محاسبه‌ی نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در این صورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شود:

$$e \approx \|\bar{e}\| = \left[ \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

که در آن،  $\sigma^*$  تنش اصلاح شده و  $\sigma_h$  تنش به دست آمده از تحلیل اجزاء محدود هستند. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد (رابطه‌ی ۵):

$$e = \sum_{i=1}^{N_r} e_i \quad (5)$$

که در آن،  $e$  مقدار خطا برای کل حوزه و  $N_r$  تعداد کل المان‌هاست.

## ۲.۲. درصد خطای نسبی کل حوزه

بیان خطا به صورت مقدار مطلق، عملاً شاخص مناسبی برای درک آن نیست و لذا معمولاً خطا به صورت نسبی از مقدار کل بیان می‌شود. درصد خطای نسبی نرم انرژی با استفاده از حل تقریبی به صورت رابطه‌ی ۶ بیان می‌شود.

$$E = 100 \left( \frac{e}{U + e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

که در آن،  $E$  درصد خطای نرم انرژی و  $U$  انرژی کرنشی کل حوزه هستند که با استفاده از رابطه‌های ۷ و ۸ محاسبه می‌شوند:

$$U_i = \left( \int_{\Omega} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$U = \sum_{i=1}^{N_r} U_i \quad (8)$$

که در آن،  $U_i$  انرژی کرنشی هر المان و  $\varepsilon$  بردار کرنش گره‌ی برای هر المان هستند.

## ۳.۲. نظریه‌ی محلی المان‌ها

در نظریه‌ی محلی المان‌ها به منظور محاسبه‌ی خطای موضعی کلیه‌ی اجزاء از پارامتر  $\xi_i$  استفاده می‌شود. به منظور تعیین معیاری برای موقعیت خطای بیشینه، روش تعیین شاخص  $\xi_i$  برای تک تک اعضا در ادامه ارائه شده است. برای تعمیم خطای نسبی نرم‌ها برای تک تک اجزا مطابق تعریف بابوشکا فرض می‌شود که درصد خطا به طور یکنواخت بین کلیه‌ی اجزا توزیع شده است،<sup>[۱۷]</sup> لذا روابط ۹ و ۱۰ را خواهیم داشت:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m (\|e\|_i^2); \quad (9)$$

$$\|e\|^2 = m_e (\|e\|_e^2); \quad (10)$$

و قوانین مکانیک نیوتنی بنا نهاده شده است. سیستم جست‌وجوی ذرات باردار از عواملی به نام ذرات باردار استفاده می‌کند. ذرات بر مبنای فاصله و مقادیری از بار الکتریکی که به آن‌ها تخصیص یافته است، در یکدیگر اثر می‌گذارند. مقدار نیروهای مؤثر بین ذرات توسط قوانین الکترواستاتیک و مقدار جابه‌جایی آن‌ها بر مبنای مکانیک نیوتنی تعیین می‌شود. این الگوریتم در پژوهشی در سال ۲۰۱۰ معرفی شده است،<sup>[۸]</sup> و تاکنون از آن برای طراحی بهینه‌ی قاب‌ها، طراحی بهینه‌ی سیستم شبکه‌ی تیرها در آیین‌نامه‌ی LRFD، تحلیل خرابی‌ها و حتی مسائلی در حوزه‌های دیگر همچون مسئله‌ی توزیع قدرت اقتصادی و مواردی دیگر استفاده شده است،<sup>[۱۰،۹]</sup> پیش از این در سال ۲۰۱۴،<sup>[۱۱]</sup> از الگوریتم جست‌وجوی ذرات باردار به منظور کاهش خطا در روش بدون شبکه استفاده شده است. در روش مذکور، پژوهشگران از روش کمینه‌ی مربعات گسسته برای تعیین خطا استفاده کرده‌اند. روش کمینه‌ی مربعات گسسته، اولین بار برای حل معادله‌ی پواسون استفاده شد و سپس در حوزه‌های دیگر گسترش یافت.<sup>[۱۲]</sup> در بخش دوم نوشتار حاضر، برآوردکننده‌ی خطای کلی و محلی و چگونگی تخمین خطای حوزه ارائه شده است. در بخش سوم، الگوریتم بهینه‌سازی جست‌وجوی ذرات باردار معرفی شده و در بخش چهارم، مثال‌هایی در حوزه‌ی مسائل کشسانی صفحه‌ی که برای آن‌ها حل دقیق تحلیلی وجود دارد، بررسی و مقایسه‌ی بین نتایج حل روش پیشنهادی و روش سایر پژوهشگران ارائه شده است.

## ۲. معیارهای بیان خطا

در حالت کلی، خطا عبارت است از اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی که به روش اجزاء محدود به دست آمده است. بنابراین خطای حل تنش از رابطه‌ی ۱ به دست می‌آید:

$$e_{\sigma} = \sigma - \sigma_h \quad (1)$$

که در آن  $\sigma$  میدان تنش دقیق است و  $\sigma_h$  جواب‌های به دست آمده از اجزاء محدود هستند. اما به دلیل عدم دسترسی به میدان تنش واقعی می‌توان از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد که این میدان تنش جدید با استفاده از روش میانگین‌گیری ارائه‌شده‌ی زینکوویچ، به دست می‌آید.<sup>[۳]</sup> بنابراین خطای تقریبی به صورت رابطه‌ی ۲ محاسبه می‌شود:

$$\bar{e}_{\sigma} = \sigma^* - \sigma_h \quad (2)$$

رابطه‌ی ۲، مقدار خطای تقریبی را در یک نقطه برآورد می‌کند. ضمن اینکه مقدار خطای مذکور، در مورد هر یک از مؤلفه‌ها ممکن است از نظر عددی کوچک‌تر از صفر باشد. بنابراین، برای درک بهتر خطا از معیارهای بهتری جهت بیان آن استفاده می‌شود. یکی از مهم‌ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است که در ادامه به تشریح آن پرداخته شده است.

## ۱.۲. معیار خطای انرژی

یکی از حالت‌های استاندارد برای بیان خطا، نرم خطای انرژی است. نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان طبق روش ارائه‌شده‌ی زینکوویچ و همکاران،<sup>[۳]</sup> به صورت رابطه‌ی ۳ بیان می‌شود:

$$e = \left[ \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

روش مورد استفاده در نوشتار حاضر، ترکیبی از اصلاح شبکه به روش  $r$  و روش غنی‌سازی است. در روش ترکیبی مذکور با جابه‌جایی گره‌ها و در پی اصلاح شبکه، جواب‌هایی با خطای کمینه به دست می‌آید و در صورت عدم حصول، از روش غنی‌سازی استفاده می‌شود. از جمله نکاتی که باید در فرایند جابه‌جایی ذکر شده مدنظر قرار داد، جلوگیری از تداخل المان‌ها یا صفر شدن مساحت المان‌هاست.

### ۶.۲. تولید شبکه‌ی اجزاء محدود

مش‌بندی و تولید المان‌ها، یکی از مراحل مهم در حل معادلات دیفرانسیل یا مشتقات پاره‌یی با روش اجزاء محدود در مسائل مکانیک جامدات است. تولید مش به مفهوم تقسیم‌بندی و جایگزینی شکل هندسی اولیه با قطعات ساده‌تر و کوچک‌تر است. برای حل مسائل سازه‌یی با استفاده از روش اجزاء محدود، ابتدا باید مدل هندسه‌ی اولیه به یک مدل محاسباتی تبدیل و یا اصطلاحاً گسسته شود. بدین منظور مهم‌ترین بخش کار، تولید مش است. در نوشتار حاضر، تولید شبکه‌ی اجزاء محدود به صورت اتوماتیک و با استفاده از المان‌های چهارضلعی ۴ گره‌یی ایزوپارامتریک انجام می‌گیرد. به‌منظور ساده‌سازی و شروع فرایند از روش مش‌بندی یکنواخت و منظم استفاده شده است.

### ۳. الگوریتم جست‌وجوی ذرات باردار

روش سیستم جست‌وجوی ذرات باردار (CSS) در سال ۲۰۱۰ ابداع شد.<sup>[۸]</sup> روش جست‌وجوی ذرات باردار از جمله جدیدترین الگوریتم‌های فراکاوشی است که با استفاده از قوانین حاکم بر فیزیک اقدام به جست‌وجوی فضای مسئله می‌کند. قوانین مورد استفاده در روش مذکور عبارت‌اند از: قانون کولمب و قانون گاوس از فیزیک الکتریسیته و قوانین نیوتن از مکانیک کلاسیک.<sup>[۱۴]</sup> هر عامل جست‌جوگر در روش جست‌وجوی ذرات باردار، یک ذره‌ی باردار نامیده می‌شود که مانند یک ذره‌ی باردار به شعاعی معلوم و باری متناسب با کیفیت جواب تولیدی رفتار خواهد کرد. از این رو، ذرات باردار قادر خواهند بود تا به یکدیگر نیرو وارد کنند و باعث حرکت همدیگر شوند. سپس مکانیک نیوتنی، مقدار حرکت و در نتیجه موقعیت جدید ذرات را تعیین خواهد کرد. در این حالت یک مرحله‌ی جست‌وجو پایان می‌یابد و جست‌وجوی جدید آغاز می‌شود. در واقع مطابق روش جست‌وجوی ذرات باردار، هر عامل جست‌جوگر مانند یک ذره‌ی باردار الکتریکی در نظر گرفته می‌شود که می‌تواند سایر ذرات را تحت تأثیر قرار دهد، یعنی آن را جذب یا دفع کند.

### ۱.۳. قوانین حاکم بر الگوریتم جست‌وجوی ذرات باردار

قانون اول: مانند بسیاری از روش‌های فراکاوشی، روش جست‌وجوی ذرات باردار، یک روش چندعاملی است. به هر یک از عوامل، ذره‌ی باردار یا  $CP$  می‌گویند که بار الکتریکی برابر  $q_i$  دارد. بنابراین ذرات باردار یک میدان الکتریکی متناسب با  $q_i$  ایجاد خواهند کرد. در نتیجه مقدار  $q_i$  باید طوری تعریف شود که ذرات با جواب‌های خوب میدان الکتریکی بزرگ‌تر و در نتیجه نیروی بیشتر داشته باشند و بنابراین می‌توان رابطه‌ی ۱۵ را نوشت:

$$q_i = \frac{fit(i) - fit_{worst}}{fit_{best} - fit_{worst}} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

که در آن،  $m$  تعداد اجزا در کل ناحیه‌ی  $\Omega$  است. چنانچه خطای مجاز با  $(\|e\|)_{per}$  نمایش داده شود، روابط ۱۱ الی ۱۳ را خواهیم داشت:

$$\eta = \bar{\eta} \rightarrow (\|e\|)_i = (\|e\|)_{per} \quad (11)$$

$$\bar{\eta}^2 = \frac{m \cdot ((\|e\|)_{per})^2}{\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2} \quad (12)$$

$$(\|e\|)_{per} = \frac{\bar{\eta}}{\sqrt{m}} [\|u\|^2 + \|e\|^2]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

طبق تعریف شاخص  $\xi_i$ ، از رابطه‌ی ۱۴ به دست می‌آید:

$$\xi_i = \frac{(\|e\|)_i}{(\|e\|)_{per}} \quad (14)$$

بنابراین به‌عنوان یک معیار، چنانچه  $\xi_i < 1$  باشد، خطای جزء موردنظر  $i$ ام مورد قبول است و چنانچه  $\xi_i > 1$  باشد، خطای جزء فوق بیش از مقدار مجاز خواهد بود. مقدار  $\bar{\eta}$  در کارهای عملی، معمولاً کمتر از ۰.۵٪ در نظر گرفته می‌شود.<sup>[۱۳]</sup>

### ۴.۲. حل تطبیقی در اجزاء محدود

یکی از اهداف مهم روش آنالیز تطبیقی، پیدا کردن شبکه‌ی المان بهینه است. در روش آنالیز تطبیقی، شبکه‌ی المانی بهینه است که در آن معیار خطای انرژی به صورت یکنواخت روی کل حوزه، توزیع شده باشد. در روش آنالیز تطبیقی می‌توان برای شروع از توزیع یکنواخت یا غیریکنواخت موقعیت گره‌ها بر روی حوزه‌ی مسئله استفاده کرد، سپس با کمینه‌سازی خطای نرم انرژی حاکم بر مسئله، موقعیت جدید را برای گره‌ها تعیین کرد. روش‌های مختلفی برای حل تطبیقی در اجزاء محدود وجود دارد. در ادامه، دو نوع گروه کلی از روش‌های مذکور ارائه شده است.

۱. روش اصلاح شبکه  $(h)$ : در روش اصلاح شبکه، از المان با مرتبه‌ی یکسان استفاده می‌شود و برای دست‌یابی به نتایج بهتر، تعداد یا اندازه‌ی المان‌ها تغییر می‌کند.

۲. روش اصلاح  $(p)$ : در روش اصلاح، از المان‌هایی با اندازه‌ی یکسان استفاده می‌شود و با افزایش مرتبه‌ی المان‌هایی که خطای بیشتر از معیار تعیین شده دارند، نسبت به بهبود شبکه و کاهش خطای ناشی از حل اجزاء محدود اقدام می‌شود. با توجه به اینکه بهبود شبکه‌ی مورد استفاده در نوشتار حاضر به روش اصلاح شبکه  $(h)$  است، در ادامه به تشریح روش اصلاح شبکه پرداخته شده است.

### ۵.۲. انواع روش‌های اصلاح شبکه $(h)$

۱. روش تقسیم المان‌ها (غنی‌سازی): در روش غنی‌سازی، هر المان که خطای بیشتر از معیار تعیین شده دارد، از طریق ساده‌ترین راهکار موجود، به دو بخش تقسیم می‌شود:

الف) اصلاح شبکه به روش  $r$ : در روش مذکور، تعداد کل گره‌های تولید شده از مش‌بندی مسئله، ثابت باقی می‌ماند و برای رسیدن به بهترین تقریب، موقعیت گره‌ها در روی دامنه تغییر می‌کند.

ب) روش تولید کامل المان‌ها (المان‌بندی دوباره): در روش تولید کامل المان‌ها بر روی کل دامنه‌ی مورد استفاده برای حل اجزاء محدود، المان‌هایی با اندازه‌ی جدید تولید می‌شود و برای بهبود دوباره شبکه، کل المان‌های اولیه حذف و دامنه دوباره المان‌بندی می‌شود.

قانون ششم: یک حافظه‌ی باردار ( $CM$ ) برای ذخیره‌ی بهترین  $CP$  ها و مقادیر مربوط به توابع هدف آن‌ها می‌تواند بدون افزایش هزینه‌ی محاسباتی در بهبود عملکرد الگوریتم، استفاده شود. حافظه‌ی باردار اندازه‌ی برابر با  $CM$  دارد و همچنین در هدایت سایر ذرات نیز مؤثر است.

قانون هفتم: اگر یک ذره تحت تأثیر قوانین فوق از فضای مسئله خارج شود، نمی‌تواند استفاده شود. یک راه حل برگشت به نقطه‌ی قبلی با استفاده از محدودکناری به‌عنوان جواب است. راه دیگر، تولید یک عدد تصادفی در بازه‌ی مجاز است. راهکار دیگری که الگوریتم از آن بهره می‌گیرد، روشی براساس جست‌وجوی هارمونی است. مطابق روش مذکور، هر یک از درایه‌های بردار جوابی که از فضای مسئله خارج شده است، با استفاده از اطلاعات حافظه‌ی باردار ( $CM$ ) باز تولید می‌شود. قانون هشتم: جست‌وجو با رسیدن به شرایط توقف که از قبل به‌وسیله‌ی ضوابطی تعیین شده است، پایان می‌یابد.

### ۲.۳. تابع هدف

پیش از این، استفاده از الگوریتم جست‌وجوی ذرات باردار در پژوهشی در سال ۱۴۰۲<sup>[۱۱]</sup> در روش بدون شبکه به‌منظور نظریه‌ی حوزه‌ی حل مسائل کشسانی استفاده شده است. در پژوهش مذکور از روش بدون شبکه‌ی کمیته‌ی مربعات گسسته برای حل معادلات حاکم بر تئوری کشسانی و معادل‌سازی خطای هر گره به‌عنوان بار الکتریکی متناظر در روش  $CSS$  استفاده شده است.<sup>[۱۲]</sup> در پژوهش مذکور، جابه‌جایی نقاط به کمک الگوریتم جست‌وجوی ذرات باردار صورت گرفته است که در نهایت به نتایج قابل قبولی برای مسائل پیشنهادی ارائه شد. نوشتار حاضر با رویکردی مشابه به دنبال به‌کارگیری الگوریتم جست‌وجوی ذرات باردار در روش اجزاء محدود استاندارد است. با توجه به روش تخمین خطای ارائه‌شده در بخش دوم، مشاهده می‌شود که خطای حاکم بر حوزه‌ی مسئله که از روش انرژی به‌دست می‌آید، تابعی از موقعیت مکانی گره‌های تشکیل‌دهنده‌ی شبکه‌ی اجزاء محدود است. در این تخمین با استفاده از الگوریتم جست‌وجوی ذرات باردار، گره‌های تشکیل‌دهنده‌ی شبکه تا رسیدن به خطای یکنواخت کمتر و تقریب بهتر حل مسئله جابه‌جا می‌شوند. تابع هدف مدنظر، همان رابطه‌ی ۶ است که بار دیگر در رابطه‌ی ۲۲ بازنویسی شده است.

$$\text{Minimize } E = E(x, y) \quad (22)$$

ذکر این نکته ضروری است که کمیته‌سازی رابطه‌ی ۲۲، علاوه بر کاهش خطای حاکم بر کل حوزه‌ی مسئله، توزیع یکنواخت‌تر خطا، بین المان‌ها را نیز به دنبال خواهد داشت. با اعمال فرایند بهینه‌سازی در هر مرحله و در صورت عدم دست‌یابی به خطای مجاز، در گام بعدی با حفظ موقعیت مکانی گره‌ها در آخرین گام الگوریتم، المان‌های با خطای بالاتر از محدوده‌ی مجاز‌گزینش و نقاط جدید به آن‌ها اضافه می‌شود. المان‌های جدید تولیدشده بار دیگر با استفاده از الگوریتم در راستای کاهش خطای نرم انرژی جابه‌جا و چیدمان مناسب برای تعداد گره ذکرشده ارائه می‌شود. این چرخه تا حصول جواب‌های قابل قبول ادامه می‌یابد. در شکل ۱، فلوچارت روش پیشنهادی ارائه شده است.

### ۴. مثال‌های عددی

در بخش کنونی، دو مثال استاندارد دو بُعدی کشسان از نوشتاری در سال ۱۹۷۰<sup>[۱۵]</sup> با شرایط مرزی مرتبط ارائه شده است و با روش پیشنهادی در نوشتار حاضر حل

که در آن،  $fit(i)$  تابع شایستگی ذره نام خواهد بود و  $fit_{best}$  و  $fit_{worst}$  به ترتیب بهترین و بدترین توابع شایستگی تا آن مرحله هستند و  $N$  تعداد کل ذرات موجود در الگوریتم را شامل می‌شود. فاصله‌ی بین دو ذره به صورت رابطه‌ی ۱۶ تعریف می‌شود:

$$r_{ij} = \frac{\|x_i - x_j\|}{\|((x_i - x_j)/2 - x_{best})\| + \varepsilon} \quad (16)$$

که در آن،  $x_i$  و  $x_j$  موقعیت ذرات  $i$  و  $j$  هستند و  $x_{best}$  نشان‌دهنده‌ی موقعیت بهترین ذره با توجه به مقادیر توابع شایستگی و  $\varepsilon$  یک مقدار کوچک مثبت برای جلوگیری از صفر شدن مخرج است.

قانون دوم: موقعیت اولیه‌ی ذرات به صورت تصادفی انتخاب می‌شود (رابطه‌ی ۱۷):

$$X_{ij}^0 = x_{i,\min} + rand(x_{i,\max} - x_{i,\min}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

که در آن،  $X_{ij}^0$  مقدار اولیه‌ی متغیر  $i$  برای ذره‌ی باردار  $j$  را تعیین می‌کند و  $x_{i,\max}$  و  $x_{i,\min}$  نشان‌دهنده‌ی کمترین و بیشترین مقادیر مجاز برای متغیر نام هستند و  $rand$  برای تولید عدد تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌ی ۰ و ۱ به کار می‌رود. سرعت‌های اولیه‌ی ذرات نیز برابر صفر است.

قانون سوم: تمام ذرات خوب و بعضی از ذرات بد می‌توانند ذرات دیگر را جذب کنند.

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \frac{fit(i) - fit_{best}}{fit(j) - fit(i)} > rand \vee fit(j) > fit(i) \\ 0 & else \end{cases} \quad (18)$$

قانون چهارم: مقدار نیروی برآیند وارد بر یک  $CP$  از رابطه‌ی ۱۹ محاسبه می‌شود:

$$F_j = k_e q_j \sum_{i, i \neq j}^N \left( \left( \frac{q_i}{a^r} \right) r_{ij} \cdot i_1 + \left( \frac{q_i}{r_{ij}^s} \right) \cdot i_2 \right) \frac{r_i - r_j}{\|r_i - r_j\|} \quad (19)$$

$$\begin{cases} i_1 = 1, i_2 = 0 \Leftrightarrow r_{ij} < a \\ i_1 = 1, i_2 = 0 \Leftrightarrow r_{ij} \geq a \end{cases}$$

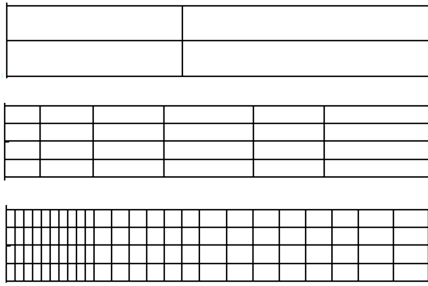
رابطه‌ی ۱۹، مطابق با معادله‌ی نیرو برای گره‌های باردار الکتریکی در فیزیک الکتریسیته و  $F_j$  نیروی برآیند وارد بر ذره‌ی  $j$  است.

قانون پنجم: موقعیت و سرعت هر  $CP$  با توجه به روابط مکانیک نیوتنی به صورت روابط ۲۰ و ۲۱ تعریف می‌شود:

$$x_{j,new} = rand_{j1} \cdot k_a \cdot \left( \frac{F_j}{m_j} \right) \cdot \Delta t^t + rand_{j2} \cdot k_v \cdot v_{j,old} \cdot \Delta t + x_{j,old} \quad (20)$$

$$v_{j,new} = \frac{x_{j,new} - x_{j,old}}{\Delta t} \quad (21)$$

که در آن،  $k_a$  پارامتر مربوط به شتاب و  $k_v$  پارامتر مربوط به سرعت خواهند بود. با تنظیم پارامترهای مذکور می‌توان عملکرد الگوریتم را کنترل کرد. معمولاً انتخاب یک تابع نزولی برای پارامتر سرعت و یک تابع صعودی برای پارامتر شتاب مناسب به نظر می‌رسند و  $rand_{j1}$  و  $rand_{j2}$  اعداد تصادفی در بازه‌ی ۰ و ۱ هستند و از توزیع یکنواخت بهره می‌برند. مقدار جرم ذره و  $\Delta t$  شمارنده‌ی زمان هستند و هر دو برابر ۱ در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۳. گام‌های مش‌بندی برای درجه‌های آزادی مختلف.

$$v = \frac{Py}{6EI} [x^3(3L-x) + 3v(L-x)y^2 + (4 + 5v)c^2x] \quad (24)$$

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I} \quad (25)$$

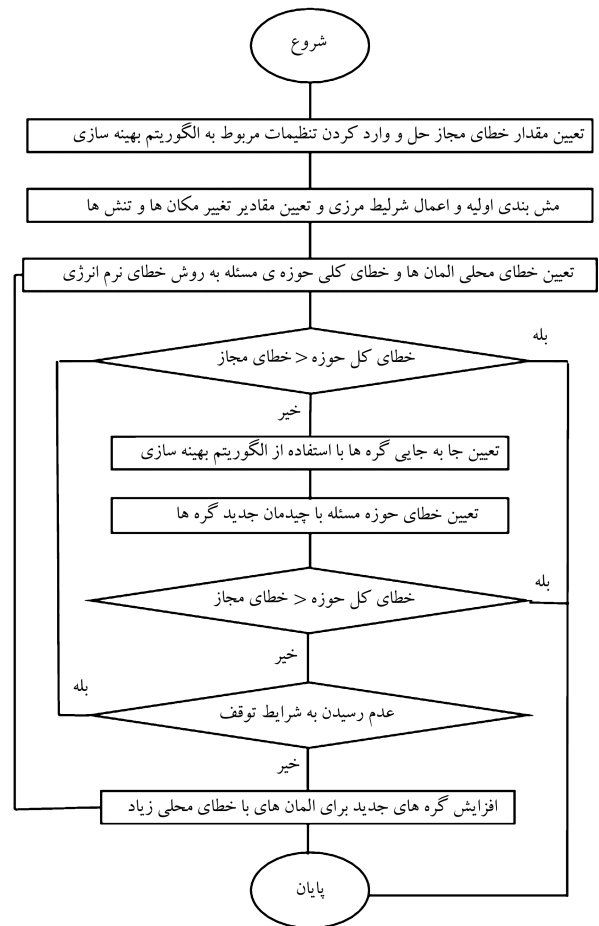
$$\sigma_y = 0 \quad (26)$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2I}(c^2 - y^2) \quad (27)$$

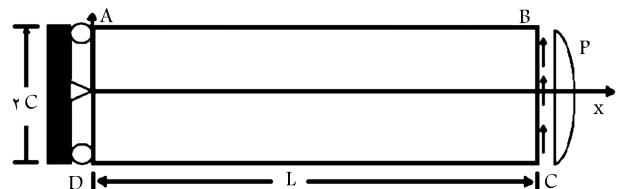
$$I = \frac{2c^3}{3} \quad (28)$$

که در آن‌ها،  $E$  مدول کشسانی و  $v$  ضریب پواسون هستند. در مرز سمت راست بار متمرکز با توزیع سهمی وار در جهت  $y$  وارد شده و در جهت  $x$  تنش مساوی صفر، شرط مرزی است که اعمال می‌شود. دو مرز بالا و پایین، مرزهای بدون تنش هستند و در مرز سمت چپ، شرط مرزی تغییرمکانی با استفاده از جواب تحلیلی منظور شده است. این مسئله با در نظر گرفتن شرایط تنش صفحه‌یی و با فرض  $\nu = 0.3$  و  $P = 1(N)$ ،  $C = 1(m)$ ،  $L = 12(m)$ ،  $E = 1 \times 10^3(Pa)$  حل شده است. در شکل ۳، مش‌بندی به دست آمده در آخرین مرحله اعمال جابه‌جایی گره‌ها برای درجه‌های آزادی برابر با  $DOF = 18$ ،  $DOF = 70$  و  $DOF = 250$  توسط روش پیشنهادی برای اصلاح شبکه‌ی مربوط به تیر طره نشان داده شده است. در شکل ۴، بهبود تنش راستای  $x$  برای کل حوزه در همان درجه‌های آزادی مذکور ارائه شده است. نتایج به دست آمده برای درجه‌های آزادی مختلف مثال کنونی در شکل‌های ۵ و ۶ که مربوط به تغییرمکان و تنش سطح بالایی تیر است، ارائه شده است. همگرایی نتایج با افزایش درجه‌های آزادی تا حصول به خطای کمیته‌ی یکنواخت در تمام اجزا به وضوح نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل ۳ الف مشاهده می‌شود، به دلیل استفاده از حالت مش‌بندی سازمان‌یافته و با توجه به توضیحات و محدودیت‌های ذکر شده در بخش پیشین، فقط ۳ گره میانی قابلیت جابه‌جایی هم‌زمان در راستای افقی را دارند و با توجه به محدودیت مربوط به تناسب ابعادی، می‌توان اظهار داشت که با شرایط حاکم بر حوزه‌ی مذکور، یک جواب یکتا برای موقعیت ۳ گره ذکر شده وجود دارد که از کمیته‌سازی خطای نرم انرژی قابل دست‌یابی است. چیدمان نشان داده شده در شکل مذکور بیان‌گر حالتی است که در آن خطای نرم انرژی تحت شرایط حاکم کمیته شده است؛ و به عبارت دیگر، توزیع یکنواخت‌تر خطا در ۴ المان موجود نسبت به حالت تقسیم‌بندی یکنواخت حوزه، ۴ قسمت مساوی دارد. اما به دلیل بالاتر بودن خطای کل حوزه نسبت به خطای مجاز از قبل تعیین شده، فرایند نظریف متوقف نمی‌شود و الگوریتم به دنباله‌ی غنی‌سازی المان‌های موجود با خطای بیشتر از حد مجاز می‌رود و با وارد کردن گره‌های جدید و تشکیل المان‌های بیشتر، بار دیگر حل مسئله را با روش جابه‌جایی گره‌ها ادامه می‌دهد. شکل‌های ۳ ب و ۳ ج تکامل مش‌بندی بهینه را طی فرایند مذکور نشان می‌دهند. در شکل ۴، نتایج مربوط به



شکل ۱. فلوجارت روش پیشنهادی.



شکل ۲. تیر طره تحت اثر نیروی سهمی وار در انتهای آزاد.

شده و نتایج آن با نتایج تحلیلی و نتایج روش‌های سایر پژوهشگران مقایسه شده است. مثال اول، تیر طره‌ی تحت بار در انتهای آزاد و مثال دوم، صفحه‌ی بی‌نهایت با سوراخ مرکزی و بارگذاری از نوع کشش در دو طرف است. سایر مشخصات برای هر مثال در قسمت مرتبط ذکر شده است.

#### ۱.۴. تیر طره با بار سهمی شکل در انتها

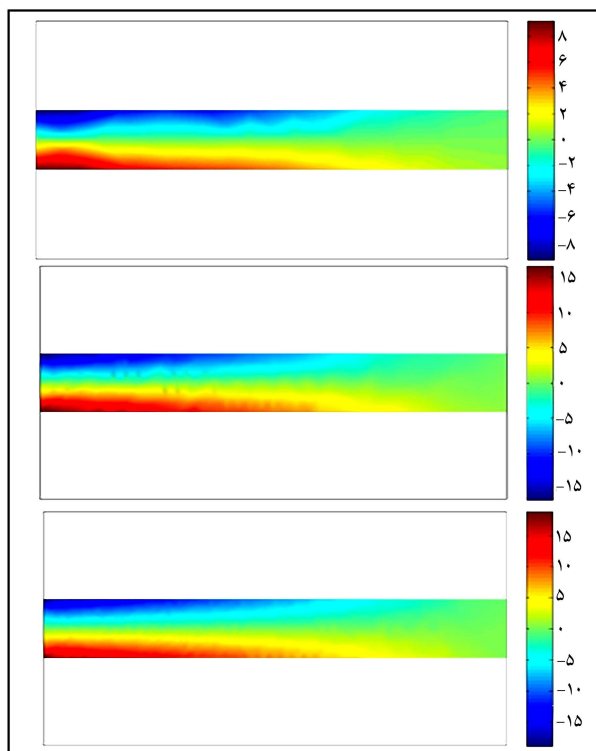
در مثال کنونی، یک تیر طره‌یی تحت اثر نیروی با توزیع سهمی‌گونه در انتهای تیر قرار گرفته و شرایط مرزی حاکم بر مثال، در شکل ۲ نشان داده شده است. جواب تحلیلی دقیق مسئله‌ی حاضر، در نوشتاری در سال ۱۹۷۰، [۱۵] در روابط ۲۳ الی ۲۸ ارائه شده است.

$$u = \frac{Py}{6EI} [3x(2L-x) + (2+v)(y^2 - c^2)] \quad (23)$$

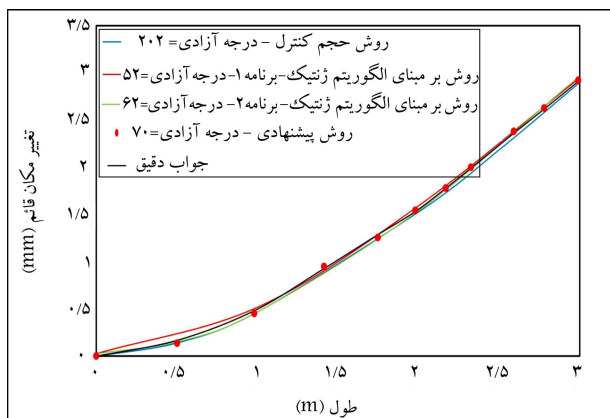
بهبود تنش راستای  $x$  برای کل حوزه با درجه‌های آزادی مذکور ارائه شده است. به منظور مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش ارائه‌شده در نوشتار حاضر با نتایج سایر پژوهشگران، تیر با مشخصات  $L = 3 (m)$ ،  $C = 1 (m)$ ،  $P = 4 \times 10^6 (N)$ ،  $\nu = 0.3$  و  $E = 4 \times 10^4$  که در آن بار به سمت پایین اعمال شده، مدل شده است. در شکل‌های ۷ و ۸، نتایج به‌دست آمده از روش پیشنهادی با نتایج ارائه‌شده در نوشتاری در سال ۲۰۱۵<sup>[۱۶]</sup> شامل روش کنترل حجم<sup>۱</sup>، روش اولیه متکی بر الگوریتم ژنتیک<sup>۲</sup>، روش ثانویه متکی بر الگوریتم ژنتیک<sup>۳</sup> و جواب دقیق تحلیلی مقایسه شده است. مبنای و قوانین مربوط به روش‌های مذکور در مرجع اخیر، کاملاً توضیح داده شده است.<sup>[۱۶]</sup>

#### ۲.۴. صفحه‌ی بی‌نهایت با سوراخ مرکزی

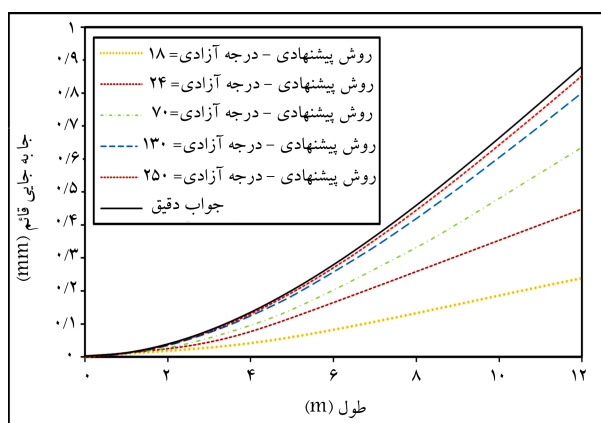
در مثال کنونی یک صفحه‌ی بی‌نهایت با سوراخ دایره‌ی مطابق شکل ۹، که تحت اثر نیروی گسترده‌ی محوری  $t$  قرار دارد، حل شده است. به دلیل بی‌نهایت بودن صفحه و با توجه به شرایط تقارنی فقط یک‌چهارم از ناحیه به ابعاد  $5a$  مدل شده است. شرایط مرزی و نیرویی در شکل ۱۰ نشان داده شده است. برای مرزهای  $AB$  و  $ED$  شرط تقارنی، برای مرز  $AE$  شرط فیزیکی عاری از بار، و برای مرزهای  $BC$  شرط مرزی تنش به‌دست آمده از جواب دقیق مسئله استفاده شده است. جواب تحلیلی دقیق مسئله‌ی ذکرشده که قبلاً ارائه شده است،<sup>[۱۵]</sup> در روابط ۲۹ الی ۳۴ ارائه شده است.



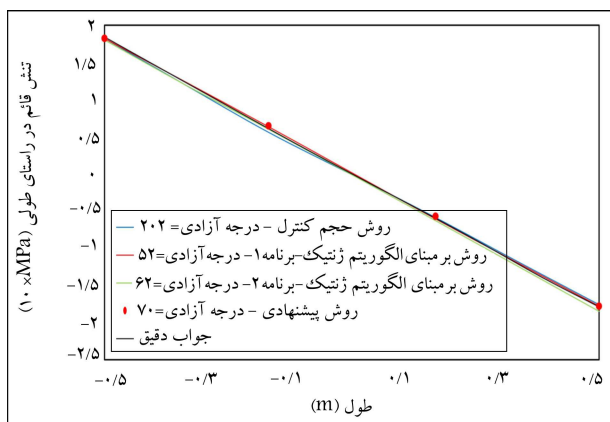
شکل ۴. توزیع تنش قائم در راستای افقی برای درجه‌های آزادی مختلف.



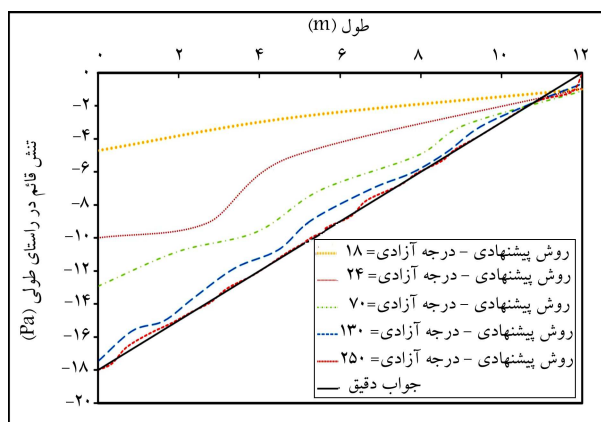
شکل ۷. مقایسه‌ی نتایج مربوط به تغییر مکان قائم.



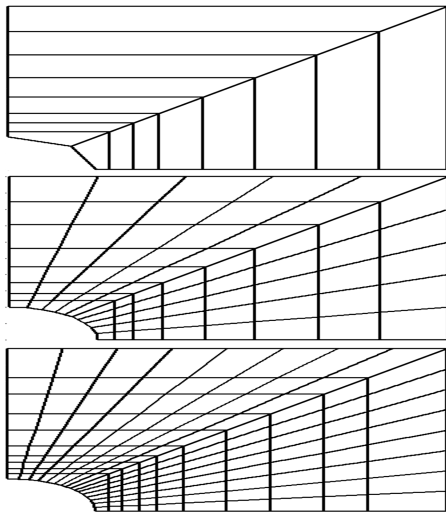
شکل ۵. نتایج مربوط به تغییر مکان قائم.



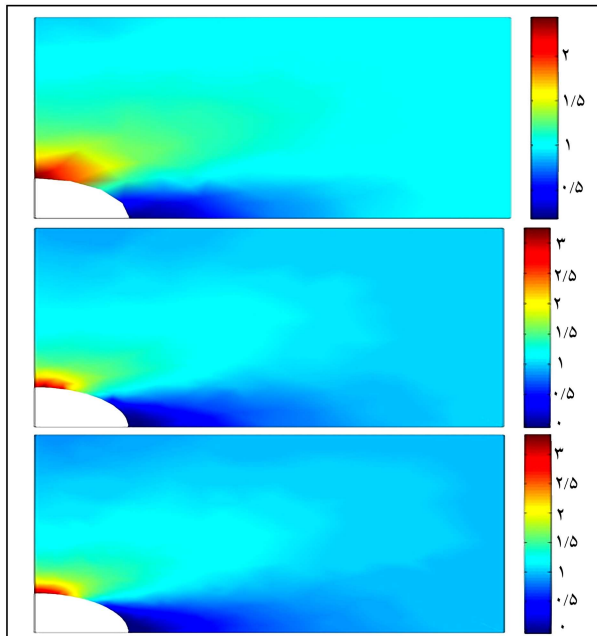
شکل ۸. مقایسه‌ی نتایج مربوط به تنش.



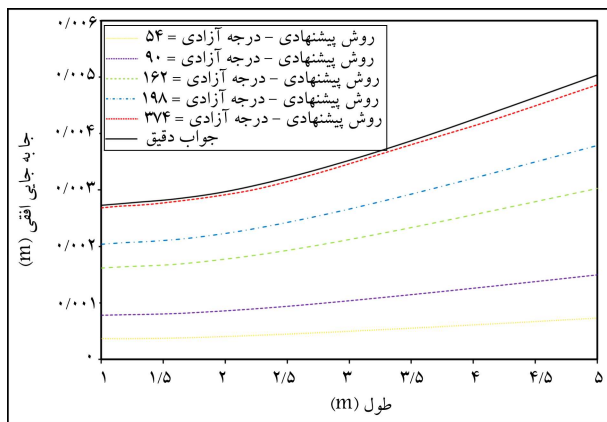
شکل ۶. نتایج مربوط به تنش قائم.



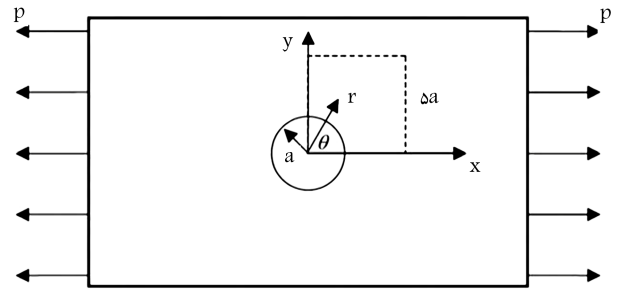
شکل ۱۱. گام‌های مش بندی برای درجه‌های آزادی مختلف.



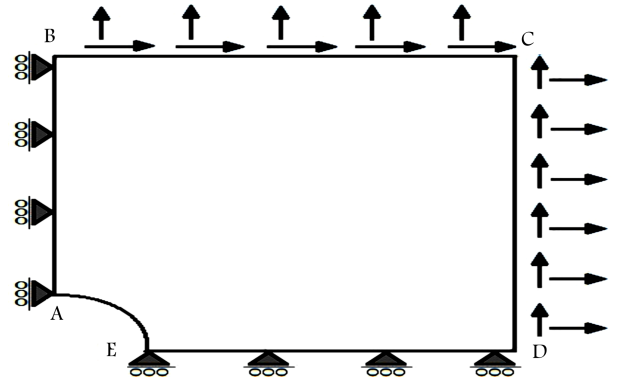
شکل ۱۲. توزیع تنش قائم در راستای افقی برای درجه‌های آزادی مختلف.



شکل ۱۳. نتایج مربوط به تغییرمکان افقی.



شکل ۹. صفحه با سوراخ دایره‌یی، تحت اثر بار محوری گسترده.



شکل ۱۰. شرایط مرزی اعمال شده برای صفحه با سوراخ دایره‌یی.

$$u_r = \frac{t}{4G} \left[ r \left( \frac{k-1}{2} + \cos(2\theta) \right) + \frac{c^r}{r} (1 + (1+K)\cos(2\theta)) - \frac{c^r}{r^3} \cos(2\theta) \right] \quad (29)$$

$$u_\theta = \frac{t}{4G} \sin(2\theta) \left[ (1-k) \frac{c^r}{r} - r - \frac{c^r}{r^3} \right] \quad (30)$$

$$\sigma_x = t \left[ 1 - \frac{c^r}{r^3} \left( \frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3c^r}{2r^3} \cos(4\theta) \right] \quad (31)$$

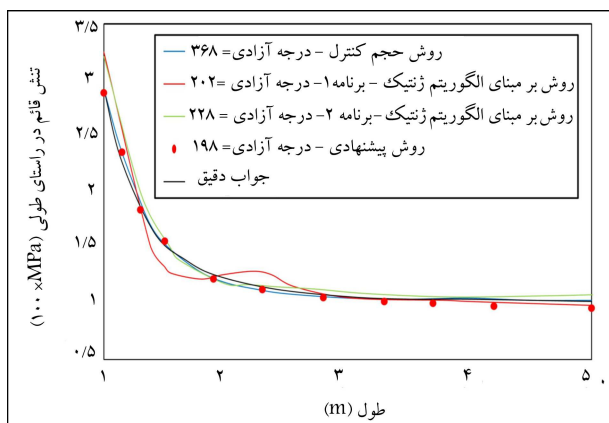
$$\sigma_y = - \left[ \frac{c^r}{r^3} \left( \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \cos(4\theta) \frac{3c^r}{2r^3} \cos(4\theta) \right] \quad (32)$$

$$\tau_{xy} = -t \left[ \frac{c^r}{r^3} \left( \frac{1}{2} \sin(2\theta) - \sin(4\theta) \right) - \frac{3c^r}{2r^3} \sin(4\theta) \right] \quad (33)$$

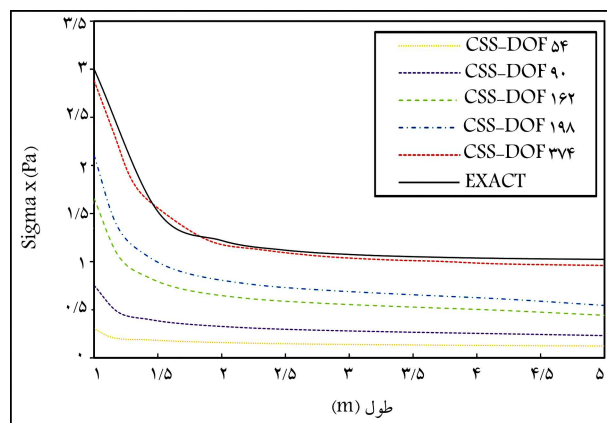
$$k = (3 - \nu) / (1 + \nu) \quad (34)$$

که در آن‌ها،  $\nu$  ضریب پواسون و  $G$  مدول برشی هستند. در مثال حاضر،  $a = 1 (m)$ ،  $P = 1 (Pa)$ ،  $\nu = 0.3$ ،  $E = 1 \times 10^2 (Pa)$  (الف)،  $b$  و  $c$  مربوط به مش بندی اولیه ۵۴-DOF، مش بندی میانی ۱۶۲-DOF و مش بندی نهایی ۳۷۴-DOF است. توزیع تنش در راستای  $x$  در کل حوزه و درجه‌های آزادی مذکور در شکل ۱۲ نشان داده شده است. شکل‌های ۱۳ و ۱۴، به ترتیب نتایج مربوط به تغییرمکان افقی و تنش قائم را نشان می‌دهند.

در شکل ۱۵، نتایج مربوط به تغییرمکان زاویه‌یی صفحه‌ی بی‌نهایت با سوراخ مرکزی به ازاها مقادیر  $a = 1 (m)$ ،  $\nu = 0.3$ ،  $E = 2.1 \times 10^{11} (Pa)$  و  $P = 1 \times 10^8 (Pa)$  در اطراف ربع دایره، برای روش معرفی شده در نوشتار حاضر و روش‌های ارائه شده در نوشتاری در سال ۲۰۱۵<sup>[۱۶]</sup>، مقایسه شده است. در شکل ۱۶، مقایسه‌ی نتایج مربوط به تنش قائم در جهت  $x$  برای لبه‌ی  $AB$  مشاهده می‌شود.

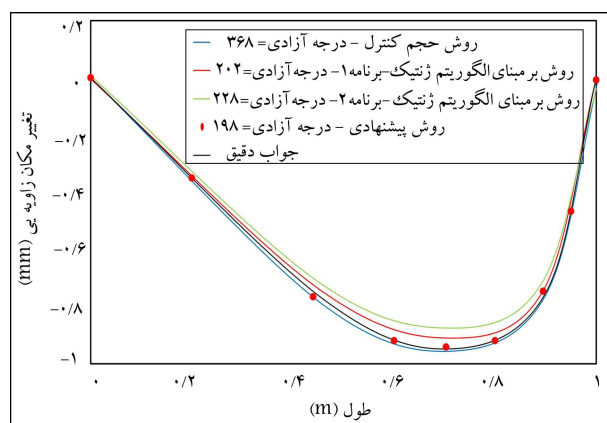


شکل ۱۶. نتایج مربوط به تنش قائم.



شکل ۱۴. نتایج مربوط به تنش قائم.

تا اولاً، با جابه‌جایی گره‌های شبکه‌ی اجزاء محدود، و ثانیاً با افزایش تعداد آن‌ها (در صورت نیاز) در جهت کاهش خطای نرم انرژی (روش Z-Z) حاکم بر حوزه‌ی حل مسئله گام برداشت. مش‌بندی از فرم یکنواخت اولیه شروع و الگوریتم فرایبکاری به‌کار گرفته‌شده در هر گام با استفاده از جابه‌جا کردن موقعیت گره‌ها در محدوده‌ی مجاز، نتایج را به سمت دست‌یابی به کمترین خطای حاکم بر حوزه سوق می‌دهد. استفاده از روش‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله نیازمند آگاهی از محل و اندازه‌ی نسبی خطاهاست و برآوردکننده‌های خطا در روش‌های عددی، ابزاری کارآمد جهت اطمینان از جهت‌گیری درست و تخمین دقت نتایج هستند. در نوشتار حاضر، فرایند خودکار جابه‌جایی گره‌های المانی با CSS این توانایی را دارد که بهترین آرایش را برای تعداد معینی از المان‌ها ارائه کند و در صورت بالا بودن خطای حاکم بر حوزه، با افزایش تعداد المان و گره‌ها، بار دیگر به جابه‌جایی نقاط ادامه و این چرخه را تا حصول به جواب‌های قابل قبول ادامه دهد. از مهم‌ترین مزیت‌های به‌کارگیری روش مذکور، هوشمندی آن است که عملیات نظریف را تا رسیدن به جواب قابل قبول ادامه خواهد داد. استفاده از جابه‌جایی گره‌ها قبل از افزایش تعداد گره‌ها توسط CSS، راهکاری مناسب برای رسیدن به جواب‌های قابل قبول است و مانع افزایش حجم محاسبات می‌شود. بررسی نتایج حل دو مثال استاندارد و نتایج سایر پژوهشگران، حکایت از کارایی خوب روش پیشنهادی دارد. مقایسه‌ی نتایج دو مثال پژوهش حاضر با روش‌های دیگر پژوهشگران، حکایت از تأمین دقت کافی موردنیاز با درجات آزادی متعارف در روش اجزاء محدود دارد.



شکل ۱۵. تغییر مکان زاویه‌ی اطراف ربع دایره.

## ۵. نتیجه‌گیری

اگرچه روش اجزاء محدود در سال‌های اخیر به خوبی توسعه یافته است، اما برای دست‌یابی به جواب‌های قابل قبول‌تر در روش مذکور نیز مانند سایر روش‌های عددی، بهینه‌سازی امری اجتناب‌ناپذیر است. در نوشتار حاضر با به‌کارگیری الگوریتم بهینه‌سازی جست‌وجوی ذرات باردار در اجزاء محدود استاندارد تلاش شده است

## پانوشتها

1. CV-Based
2. GA-Based-Schem-۱
3. GA-Based-Schem-۲

## منابع (References)

1. Zienkiewicz, O.C. "Achievements and some unsolved problems of the finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **47**(1-3), pp. 9-28 (2000).

2. Babuška, I., Zienkiewicz, O.C., Gago, J. and et al., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, John Wiley & Sons (1986).
3. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**(2), pp. 337-357 (1987).
4. Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**(7), pp. 1331-1364 (1992).
5. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, Part 2:



- Error estimates and adaptivity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**(7), pp. 1365-1382 (1992).
6. Nguyen-Thanh, N., Rabczuk, T., Nguyen-Xuan, H. and Bordas, S.P.A. “An alternative alpha finite element method (AFEM) for free and forced structural vibration using triangular meshes”, *In Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**, pp. 2112-2135 (2010).
  7. Zeng, W., Liu, G.R., Li, D. and et al. “A smoothing technique based beta finite element method (̂FEM) for crystal plasticity modeling”, *Computers & Structures*, **162**, pp. 48-67 (2016).
  8. Kaveh, A. and Talatahari, S. “A novel heuristic optimization method: charged system search”, *Acta Mechanica*, **213**(3-4), pp. 267-289 (2010).
  9. Kaveh, A. and Talatahari, S. “Charged system search for optimal design of frame structures”, *Appl. Soft Comput.*, **12**(1), pp. 382-393 (2012).
  10. Ozyon, S., Temurtas, H, Durmus, B. and et al. “Charged system search algorithm for emission constrained economic power dispatch problem”, *Energy*, **46**(1), pp. 420-430 (2012).
  11. Arzani, H., Kaveh, A. and Dehghana, M. “Adaptive node moving refinement in discrete least squares meshless method using charged system search”, *Scientia Iranica. Transaction A, Civil Engineering*, **21**(5), pp. 1529-1538 (2014).
  12. Arzani, H., Afshar, M. H. “Solving Poisson’s equations by the discrete least square meshless method”, *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, **42**, pp. 23-31 (2006).
  13. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu, J.Z., *The Finite Element Method*, 6th ed. Elsevier Butterworth-Heinemann (2005).
  14. Halliday, D., Resnick, R. and Walker, J., *Fundamentals of Physics*, 8th ed. Wiley, New York (2008).
  15. Timoshenko, S. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3th ed, New York, McGraw- Hill book (1970).
  16. Ebrahimnejad, M., Fallah, N. and Khoei, A.R. “Adaptive refinement in the meshless finite volume method for elasticity problems”, *Computers & Mathematics with Applications*, **69**(12), pp. 1420-1443 (2015).