

معرفی تابع تقریب کمینه‌ی مربعات متحرک در روش حجم محدود برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش در ورق‌های خمشی ترک‌خورده

ابوذر امرائی (دانشجوی دکتری)

نصرت اله فلاح* (دانشیار)

دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه گیلان

مهندسی عمران شریف، تابستان ۱۳۹۸ (دوره‌ی ۲ - ۳۵، شماره‌ی ۲/۲، ص. ۱۵-۳)

روش حجم محدود به‌عنوان یکی از روش‌های معروف در حوزه‌ی مکانیک محاسباتی محسوب می‌شود. در پژوهش حاضر، از تقریب کمینه‌ی مربعات متحرک با قدرت تقریب مرتبه‌ی بالا، در روش حجم محدود برای تحلیل ورق خمشی رایسنر با ترک راه به دراستفاده و ضرایب شدت تنش نوک ترک محاسبه شده است. نخست برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش در ورق‌های خمشی رایسنر، اندازه‌ی دامنه‌ی پشتیبانی برای حصول نتایج با دقت مناسب محاسبه شده است. با استفاده از مقدار تعیین شده‌ی اندازه‌ی دامنه‌ی پشتیبانی، ضرایب شدت تنش برای چند ورق ترک‌خورده محاسبه و نتایج حاصل با نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی و همچنین نتایج حاصل از دیگر روش‌های عددی مقایسه شده است. تطابق خوبی بین نتایج حاصل از تحلیل حجم محدود با دیگر روش‌ها وجود دارد. نتایج به‌دست آمده نشان از توانایی خوب روش حجم محدود ارائه شده برای تحلیل ورق‌های ترک‌خورده است. همچنین از اندازه‌ی دامنه‌ی پشتیبانی پیشنهادی می‌توان به‌عنوان معیار مناسبی در حل مسائل ورق‌های خمشی ترک‌خورده استفاده کرد.

واژگان کلیدی: ورق ترک‌خورده‌ی رایسنر، ضریب شدت تنش، کمینه‌ی مربعات متحرک.

amraei_a@yahoo.com
fallah@guilan.ac.ir

۱. مقدمه

تحت لنگر خمشی وارد بر لبه و یا تحت بارهای جانبی وارد بر سطح ورق قرار گرفته است. در طراحی ورق‌های ترک‌خورده، چه در حالت بارگذاری تنش صفحه‌یی و چه در حالت بارگذاری خمشی، پارامتر تأثیرگذار طراحی ضریب شدت تنش^۲ نوک ترک است. روش‌های تحلیل و فرم بسته‌ی ارائه شده برای محاسبه‌ی عامل مذکور، محدود به برخی مسائل ساده‌ی ورق با بارگذاری ساده است و برای حل مسائل ورق ترک‌خورده‌ی خمشی تحت نیروهای وارد بر لبه‌های ورق و یا نیروهای جانبی وارد بر سطح ورق، نیاز به استفاده از روش‌های عددی همچون: روش اجزاء محدود، روش المان مرزی و روش‌های عددی دیگر است. از جمله روش‌های تحلیلی جهت محاسبه‌ی میدان تنش نوک ترک در ورق‌های خمشی ترک‌خورده می‌توان به روش بسط سری تابع مقادیر ویژه اشاره کرد که در پژوهشی در سال ۱۹۶۱ برای ورق خمشی ترک‌خورده ارائه و در آن از تئوری ورق کیرشهف استفاده شد و توزیع تنش خمشی در نوک ترک به‌صورت بسط یک سری به‌دست آورده و نشان داده شد که تکینگی نوک ترک متناسب با معکوس جذر فاصله از نوک ترک است.^[۱]

عرشه‌های ساخته شده از آلیاژهای با مقاومت بالا در بسیاری از سازه‌های مهندسی، از قبیل: جداره‌ی کشتی‌ها، جداره‌ی لوله‌های انتقال سیالات و همچنین بال هواپیماها به وفور استفاده می‌شود. نقایص حین ساخت سازه‌های ذکر شده و همچنین ناخالصی‌های موجود در مصالح تشکیل‌دهنده‌ی آن‌ها، باعث ایجاد ترک‌های ریزی در مقیاس میکروسکوپی در جداره‌ی آن‌ها می‌شود. به واسطه‌ی اعمال نیروهای دینامیکی ناشی از عبور مداوم سیالات بر اجزاء سازه‌های ذکر شده، ترک‌های ریز گسترش می‌یابد و موجب ایجاد ترک‌های بزرگی در امتداد ضخامت جداره می‌شود. به ترک‌های اشاره شده در اصطلاح مهندسی، ترک راه به در^۱ گفته می‌شود. مدل‌سازی سازه‌های مذکور عموماً با استفاده از المان‌های ورق انجام می‌گیرد که تحت نیروهای درون صفحه‌یی و نیروهای جانبی وارده بارگذاری شده است. در این حالت، معمولاً از تئوری‌های رایج ورق، از قبیل تئوری ورق کیرشهف و یا تئوری ورق رایسنر جهت حل معادلات کلی حاکم بر سازه‌های ذکر شده استفاده می‌شود. در نتیجه در مدل عددی آن‌ها، المان‌های ورق ترک‌خورده‌یی وجود خواهد داشت که

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۱۱/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۶/۴/۲۶، پذیرش ۱۳۹۶/۶/۲۵.

DOI:10.24200/J30.2018.1974.2045

در پژوهش دیگری (۱۹۶۰)، با استفاده از تئوری ورق رایسنر و با اعمال شرایط مرزی سه‌گانه‌ی سطح ترک، یعنی لنگر خمشی صفر، لنگر پیچشی صفر و نیروی

همچنین در سال ۱۹۸۶، با استخراج فرم انتگرال^۷ برای ورق ترک‌خورده‌ی خمشی بر مبنای تئوری راینسز، با استفاده از یک شبکه‌ی اجزاء محدود که در ناحیه‌ی نوک ترک خیلی متراکم می‌شد، مسئله‌ی ورق خمشی ترک‌خورده در دو حالت ورق با ترک مرکزی و ورق با ترک لبه‌یی تحت بارگسترده‌ی جانبی تحلیل و ضرایب شدت تنش ورق ترک‌خورده برای نسبت‌های گوناگون ضخامت به عرض ورق محاسبه شد.^[۱۰] در سال ۲۰۰۰، نیز در تحلیل مکانیک شکست ورق خمشی بر مبنای تئوری راینسز، فرمولاسیون مسئله‌ی ورق ترک‌خورده بر مبنای تئوری راینسز با

استفاده از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته^۸ استخراج و ضرایب شدت ورق ترک‌خورده تحت بارگذاری خمشی در لبه‌ها محاسبه و وجود مشکل قفل برشی در نتایج تحلیل مشاهده شد. لذا در روش مذکور از روش غنی‌سازی^۹ در گره‌های پیرامون نوک ترک استفاده شد. همچنین در مدل پیشنهادی از مش هم‌راستا با امتداد ترک استفاده شد و نتایج با دقت خوبی برای ضریب شدت تنش ورق به دست آمد.^[۱۱]

سو و سان از روش اجزاء محدود فراکتال^{۱۰} برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش ورق ترک‌خورده‌ی خمشی بر مبنای تئوری کیرششف استفاده کردند. و میدان تنش تکین حاصل از بسط سری ویلیامز را در المان فراکتال نوک ترک اعمال و ضرایب شدت تنش مود خمشی و مود پیچشی را برای ورق خمشی با ترک مرکزی محاسبه کردند. نتایج به دست آمده‌ی ایشان نشان از دقت خوب روش بود.^[۱۲] همچنین در سال ۲۰۰۱، با استخراج میدان‌های تنش و جابه‌جایی نوک ترک برای ورق راینسز و تلفیق آن با روش اجزاء محدود فراکتال، ضریب شدت تنش مود ترکیبی در ورق راینسز ترک‌خورده محاسبه شد.^[۱۳] ونگ و همکارانش (۲۰۰۳) نیز با استفاده از تئوری تابع تنش مختلط و روش با هم‌گذاری مرزی^{۱۱}، ضریب شدت تنش را در ورق کیرششف با یک یا چند ترک داخلی محاسبه کردند.^[۱۴] همچنین در سال ۲۰۰۵، به مطالعه‌ی میدان‌های تنش و جابه‌جایی نوک ترک ورق خمشی حاصل از تئوری‌های راینسز و کیرششف و مقایسه‌ی آن با میدان‌های به دست آمده از تحلیل سه بعدی ورق ترک‌خورده پرداخته شده است.^[۱۵] در سال ۲۰۰۶، نیز یک روش عددی براساس روش انتگرال بسته شدن مجازی ترک اصلاح شده برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش ترک در ورق راینسز ترک‌خورده تحت ترکیب بارگذاری کششی، خمشی و برشی پیشنهاد شد و در روش عددی مذکور، مقادیر تنش و جابه‌جایی حاصل از تحلیل اجزاء محدود ورق با استفاده از یک شبکه‌ی المانی متراکم‌شونده در ناحیه‌ی نوک ترک به دست آمد.^[۱۶] همچنین در سال ۲۰۰۵، روشی بر مبنای روش اجزاء محدود توسعه‌یافته برای تحلیل غیرخطی پوسته‌های ترک‌خورده ارائه و با استفاده از آن ضریب شدت تنش چند مسئله‌ی ورق ترک‌خورده محاسبه و روش مذکور برای مسائل کاملاً غیرخطی نیز قابل استفاده تشخیص داده شد.^[۱۷] روش المان مرزی نیز از روش‌هایی است که برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش ورق خمشی ترک‌خورده استفاده می‌شود. برای نمونه، برخی پژوهشگران (۲۰۰۳) بر مبنای تئوری راینسز، ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ورق خمشی را محاسبه کردند و با استفاده از برون‌یابی جابه‌جایی سطح ترک حاصل از تحلیل المان مرزی، نرخ رهاسازی انرژی و ضریب شدت تنش را براساس نرخ رهاسازی انرژی محاسبه کردند و نتایج با دقت بالایی به دست آورده شد.^[۱۸]

همچنین در سال ۲۰۱۰، فرمولاسیون روش اجزاء محدود توسعه‌یافته برای ورق کیرششف ارائه شد.^[۱۹] در پژوهش دیگری (۲۰۱۲) نیز ضرایب شدت تنش ورق ترک‌خورده‌ی کیرششف با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته محاسبه شد.^[۲۰] روزگار و میرزایی (۲۰۱۳) به تحلیل دینامیکی ورق ترک‌خورده‌ی کیرششف با استفاده از اجزاء محدود توسعه‌یافته پرداختند و برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش از انتگرال‌های ناورد^{۱۲} استفاده کردند.^[۲۱] همچنین در سال ۲۰۱۱، نیز با استفاده از روش غنی‌سازی و استفاده از المان پوسته در روش المان محدود توسعه‌یافته، ضریب شدت تنش ورق ترک‌خورده‌ی راینسز محاسبه شد.^[۲۲] همچنین برخی پژوهشگران (۲۰۱۵)، با فرمولاسیون ورق خمشی راینسز با استفاده از روش بدون المان گالرکین (EFGM)^{۱۳} و استفاده از روش بازتولید کرنل^{۱۴} برای تقریب تابع شکل و نیز استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری گره‌یی تطابقی تثبیت‌شده^{۱۵} برای محاسبه‌ی

۲. فرمولاسیون

۱.۲. فرمولاسیون حجم محدود ورق ترک خورده‌ی رایسنر

از جمله تئوری‌های متداول دو بعدی جهت تحلیل ورق‌های خمشی، تئوری‌های ورق کیرشهف و ورق رایسنر است. در تئوری ورق کیرشهف فرض بر این است که دوران هر نقطه از میان صفحه‌ی ورق برابر مشتق میدان جابه‌جایی عرضی ورق در آن نقطه است؛ لکن در تئوری ورق رایسنر، دوران هر نقطه از میان صفحه‌ی ورق برابر با حاصل جمع مشتق جابه‌جایی عرضی ورق و کرنش برشی ورق در آن نقطه است (شکل ۱).^[۲۲] از آنجا که در تئوری رایسنر فرض بر تغییرات خطی تنش برشی در مقطع ورق است، با فرض تغییرشکل‌های کوچک برای ورق بارگذاری شده، می‌توان مؤلفه‌های دوران هر نقطه از میان صفحه را به صورت رابطه‌ی ۱ نوشت:

$$\beta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz}; \quad \beta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \quad (1)$$

که در آن با توجه به شکل ۱، β_x دوران نقطه‌ی دلخواه P از میان صفحه‌ی ورق حول محور y و β_y دوران نقطه‌ی دلخواه P حول محور x و w نشان‌دهنده‌ی تغییرشکل جانبی ورق در نقطه‌ی P است.

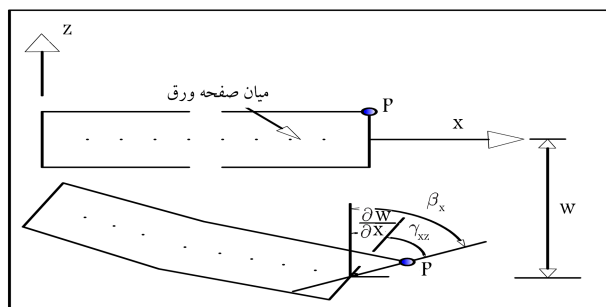
در نتیجه، مؤلفه‌های جابه‌جایی نقطه‌ی دلخواه P را می‌توان بر حسب تغییرشکل جانبی و دوران‌های نقطه‌ی P به صورت روابط ۲ الی ۴ نوشت:

$$u = z\beta_x(x, y) \quad (2)$$

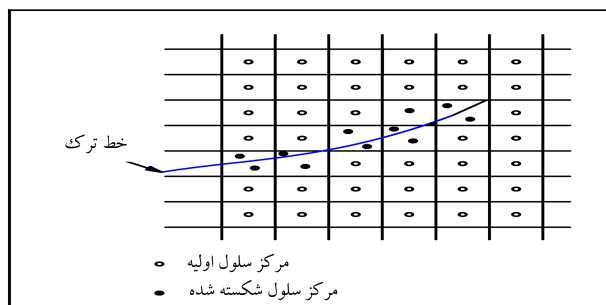
$$v = z\beta_y(x, y) \quad (3)$$

$$w = w(x, y) \quad (4)$$

که در آن‌ها، u و v به ترتیب مؤلفه‌ی تغییرشکل ورق در امتداد x و y هستند. همان‌طوری که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، جهت تحلیل حجم محدود ورق خمشی



شکل ۱. جابه‌جایی نقطه‌ی دلخواه P در ورق رایسنر.

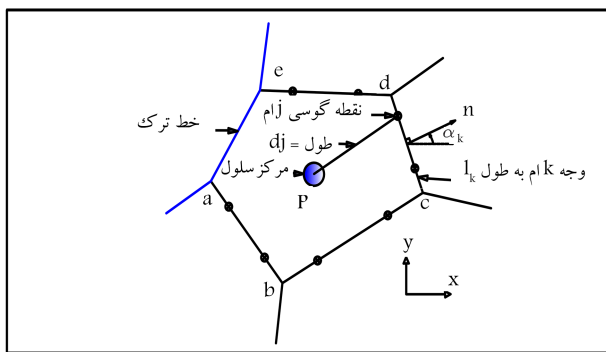


شکل ۲. شبکه‌ی سلولی استفاده شده برای گسسته‌سازی میان صفحه‌ی ورق ترک خورده در روش حجم محدود.

ماتریس سختی و انتگرال‌گیری تطابقی تثبیت شده در زیر دامنه^{۱۶} در ناحیه‌ی اطراف خط ترک، ضریب شدت تنش ورق خمشی را در دو حالت ورق با ترک مرکزی و ورق با دو ترک لبه‌یی متقارن در طرفین آن و تحت بارگذاری خمشی در لبه‌ها و همچنین بارگذاری گسترده‌ی جانبی محاسبه و از انتگرال مستقل از مسیر \int ارائه شده در مرجع^[۱۰] برای ارزیابی ضریب شدت تنش نوک ترک استفاده کردند و نتایج با دقت خوبی به دست آمد.^[۲۳] همان پژوهشگران (۲۰۱۶) با استفاده از روش اخیرشان،^[۲۳] ضریب شدت تنش مود ترکیبی در ورق خمشی رایسنر را محاسبه کردند.^[۲۴] در هر دو مرجع اخیر از یک شبکه‌ی خیلی متراکم از گره‌ها در ناحیه‌ی مجاور ترک استفاده شده است. در پژوهش دیگری (۲۰۱۶)، نیز با استفاده از روش هم‌هندسی توسعه‌یافته‌ی^{۱۷} معادلات دیفرانسیل ورق خمشی ترک خورده‌ی رایسنر، گسسته‌سازی شد و ضریب شدت تنش ورق در چند حالت ترک خوردگی محاسبه و نتایج با دقت خوبی گزارش شد.^[۲۵]

روش حجم محدود به عنوان یکی از روش‌های کارا در حل مسائل مکانیک سازه‌یی شناخته شده است.^[۲۶] در نخستین کارهای انجام شده درخصوص کاربرد روش حجم محدود در حل مسائل سازه‌یی، بیشتر از روش‌های تقریب کلاسیک که به صورت درون‌بایی خطی جابه‌جایی و مشتقات آن در روی مرز سلول‌ها بود، استفاده می‌شد. به عنوان نمونه می‌توان به کاربرد روش حجم محدود در تحلیل ورق‌های خمشی، که به ترتیب در سال‌های ۱۹۹۷ و ۲۰۰۴ صورت گرفته است،^[۲۷، ۲۸] اشاره کرد. در سال ۲۰۰۲، نیز با کاربرد تابع وزن واحد در روش بدون المان محلی گالرکین (MLPG)^{۱۸}، روش جدیدی به نام روش حجم محدود بدون المان ابداع و نشان داده شد که دقت و کارایی آن در حل مسائل مکانیک سازه‌یی قابل رقابت با دیگر روش‌های عددی، همچون روش اجزاء محدود و روش المان مرزی است.^[۲۹]

همچنین برخی پژوهشگران (۲۰۱۲) با استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد، روش حجم محدود بدون المان محلی متعامد را استخراج و از آن برای حل مسائل ورق ترک خورده در حالت بارگذاری تنش صفحه‌یی استفاده کردند.^[۳۰] در پژوهش حاضر، با استفاده از روش حجم محدود بدون المان که در آن از تقریب کمینه‌ی مربعات متحرک (MLS)^{۱۹} استفاده شده است، ضریب شدت تنش در ورق‌های خمشی ترک خورده تحت بارگذاری خمشی در لبه و همچنین بارگسترده‌ی جانبی بر سطح بالایی ورق محاسبه شده است. استفاده از تقریب MLS در روش حجم محدود به این دلیل است که میدان جابه‌جایی حاصل از روش مذکور، شرایط پیوستگی و هموار بودن مورد نیاز یک روش تقریب به خوبی ارضاء می‌کند و همچنین پایداری و هم‌گرایی سریع نتایج روش حجم محدود به مقدار دقیق، موجب استفاده‌ی موفقیت‌آمیز از آن در روش‌های بدون المان جهت تحلیل ورق‌های خمشی شده است.^[۳۱] پارامترهای تأثیرگذار در تقریب MLS شامل مرتبه‌ی چندجمله‌یی‌های مورد استفاده در توابع پایه، اندازه‌ی دامنه‌ی پشتیبانی و نیز نمودارهای هم‌گرایی روش حجم محدود در پژوهش حاضر بررسی شده است. همچنین از تئوری ورق رایسنر، که تنش برشی در امتداد ضخامت ورق را لحاظ می‌کند، استفاده شده و فرمولاسیون ورق خمشی برای یک سلول دلخواه واقع در میان صفحه‌ی ورق به دست آمده است. بنابراین، ترتیب بخش‌های پژوهش حاضر به این صورت است که در بخش اول، فرمولاسیون حجم محدود بدون المان برای یک سلول از میان صفحه‌ی ورق استخراج شده است. سپس در بخش دوم، تقریب MLS توضیح داده شده است. در ادامه و در بخش سوم، به معرفی انتگرال اندرکنشی برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش ورق ترک خورده پرداخته و در بخش‌های چهارم و پنجم، نتایج عددی روش و نتیجه‌گیری ارائه شده است.



شکل ۳. یک سلول دلخواه از میان صفحه‌ی ورق که خط ترک بر یکی از وجوه آن منطبق است.

$$-\left(Q_x^k(X_{Qj}^k)\alpha_x^k + Q_y^j(X_{Qj}^k)\alpha_y^k\right)(y_{Qj}^k - y_P)\hat{w}_j|J_{qk}| \Big\} = 0 \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_g} \left\{ \left(-Q_x^j(X_{Qj}^k)\alpha_x^k + Q_y^j(X_{Qj}^k)\alpha_y^k \right) \hat{w}_j|J_{qk}| \right\} + qAP = 0 \quad (10)$$

که در آن‌ها، n_k تعداد وجوه سلول، n_g تعداد نقاط گوسی تعریف شده در هر وجه سلول، X_{Qj}^k مختصات نقطه‌ی گوسی ژام روی وجه k ام از سلول، α_x^k و α_y^k به ترتیب کسینوس هادی‌های بردار به سمت بیرون و عمود بر وجه k ام از سلول و \hat{w}_j و J_{qk} وزن و ژاکوبی انتگرال‌گیری در نقطه‌ی گوسی ژام روی وجه k ام از سلول هستند. باید توجه کرد از آنجایی که روی خط ترک، شرایط نیرویی صفر برقرار است، بنابراین روی وجهی از سلول که بر مرز ترک منطبق است، هیچ انتگرال‌گیری صورت نمی‌گیرد و در نتیجه، هیچ نقطه‌ی گوسی در نظر گرفته نمی‌شود.

روابط ۸ الی ۱۰، معادلات تعادل ورق را بر حسب نیروها و لنگرهای داخلی ورق بیان می‌کنند که برای نوشتن آن‌ها، بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی در هر نقطه از میان صفحه‌ی ورق می‌توان از معادلات مشخصه بین نیروهای ورق خمشی و مؤلفه‌های کرنش و جابه‌جایی جانبی و دوران ورق در هر نقطه از میان صفحه‌ی ورق به صورت روابط ۱۱ الی ۱۳ استفاده کرد: [۲۱]

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & D \\ \nu D & D & 0 & 0 & \nu D \\ 0 & 0 & ((1-\nu)D)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Gt/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Gt/\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\varepsilon_b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\varepsilon_s = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{Bmatrix} \quad (13)$$

که در آن‌ها، E ، G و $Upsilon$ به ترتیب مدول کشسانی، مدول برشی و ضریب پواسون مصالح ورق هستند. در رابطه‌ی ۱۱، t نشان‌دهنده‌ی ضخامت ورق

ترک خورده، میان صفحه‌ی ورق به یک شبکه از سلول‌ها گسسته می‌شود، به صورتی که در مرکز هر سلول، یک گره قرار می‌گیرد. در پژوهش حاضر، شبکه‌ی منظم با سلول‌های مستطیل شکل ناهمپوشان در سرتاسر دامنه استفاده شده است، هر چند که می‌توان از سلول‌های همپوشان نیز استفاده کرد. همچنین سلول‌های شبکه می‌توانند به صورت شکل‌های نامنظم مثلثی شکل، چهارضلعی و یا چندضلعی انتخاب شوند. مدل حجم محدود ورق خمشی ترک خورده در پژوهش حاضر در سرتاسر دامنه‌ی ورق از سلول‌های مستطیلی یکسانی تشکیل شده است، به استثناء سلول‌هایی که خط ترک از میان آن‌ها عبور می‌کند. در این حالت با عبور خط ترک از میان هر سلول مستطیلی، آن سلول با دو سلول در مجاور ترک جایگزین می‌شود.

همچنین در سلولی که انتهای خط ترک در آن واقع می‌شود، با امتداد دادن خط ترک تا اتصال آن به وجه روبوبی سلول می‌توان آن سلول را با دو سلول در نوک ترک جایگزین کرد (شکل ۲). ممکن است این تصور به وجود آید که این تقسیم سلولی در نوک ترک موجب در نظر گرفتن طول بزرگ‌تری برای ترک نسبت به طول اولیه آن شود، در حالی که چنین نیست؛ چرا که در فرایند تقسیم سلولی فقط سلول اولیه با دو سلول جدید جایگزین می‌شود و با حفظ هندسه و طول اولیه ترک، فقط جزئی از مرز سلول‌های جدید بر امتداد خط ترک منطبق می‌شود. از طرف دیگر، اثر هندسه‌ی ترک در هنگام محاسبه‌ی تابع شکل و تعیین گره‌های واقع در دامنه‌ی پشتیبانی هر نقطه‌ی گوسی با استفاده از معیار وضوح دید که در ادامه به آن اشاره شده است، در نظر گرفته می‌شود.

معادلات حجم محدود ورق خمشی را می‌توان با نوشتن معادله‌ی تعادل برای هر سلول و سپس سرهم‌بندی کردن معادلات تمام سلول‌های شبکه به دست آورد. معادلات حجم محدود هر سلول از دامنه‌ی گسسته‌شده‌ی ورق خمشی را می‌توان با نوشتن معادلات تعادل لنگر در امتداد x و y همچنین معادله‌ی تعادل نیرو در جهت عمود بر میان صفحه‌ی ورق (محور z)، به صورت روابط ۵ الی ۷ نوشت: [۲۸]

$$\sum M_x = 0 \quad (5)$$

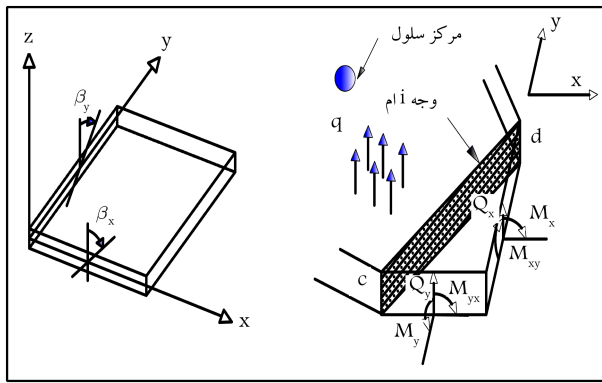
$$\sum M_y = 0 \quad (6)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (7)$$

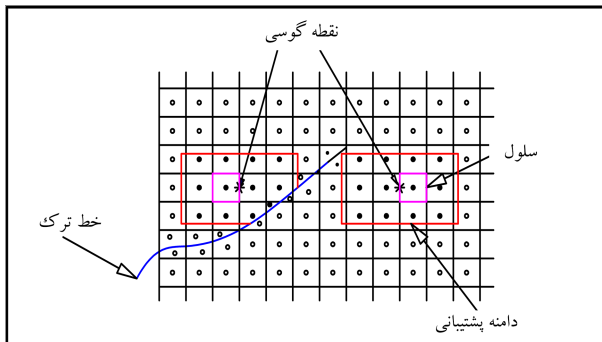
از آنجایی که در هر وجه از سلول، مقادیر لنگر و نیروی برشی به ترتیب برآیند تنش‌های خمشی و برشی توزیع شده در مقطع عرضی هستند، لذا برای به دست آوردن مؤلفه‌های لنگر و نیروی برشی در هر وجه از سلول، باید از مقادیر تنش انتگرال‌گیری کرد. لذا همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، با تعریف نقاط گوسی در هر وجه از سلول و نیز این نکته که برای نوشتن معادلات تعادل ۵ و ۶ در هر وجه از سلول با شکل دلخواه چندضلعی، لازم است لنگر خمشی به مؤلفه‌هایی در امتداد محورهای x و y تجزیه شود، معادلات ۵ و ۶ را می‌توان به صورت روابط ۸ الی ۱۰ تبدیل کرد:

$$\sum_{k=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_g} \left\{ \left(M_x^j(X_{Qj}^k)\alpha_x^k + M_{xy}^j(X_{Qj}^k)\alpha_y^k \right) \hat{w}_j|J_{qk}| - \left(Q_x^k(X_{Qj}^k)\alpha_x^k + Q_y^j(X_{Qj}^k)\alpha_y^k \right) (x_{Qj}^k - x_P)\hat{w}_j|J_{qk}| \right\} = 0 \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_g} \left\{ \left(M_y^j(X_{Qj}^k)\alpha_y^k + M_{xy}^j(X_{Qj}^k)\alpha_x^k \right) \hat{w}_j|J_{qk}| \right\}$$



شکل ۴. جهت قراردادی مولفه های دوران و جهت قراردادی نیروها و بارهای خارجی بر روی ضلع مرزی یک حجم کنترل ورق خمشی.



شکل ۵. تعریف دامنه ی پشتیبانی برای نقطه ی گوسی دلخواه واقع بر روی وجه سلول.

که در آن، α_s پارامتری است که با توجه به فاصله ی گره های میدان از همدیگر تعیین می شود. همچنین مقدار مناسب α_s برای هر مسئله با استفاده از آزمایش های عددی تعیین می شود. از آنجا که در پژوهش حاضر، گره های میدان به صورت یکنواخت در سرتاسر دامنه توزیع شده اند، در نتیجه تعیین اندازه ی دامنه ی پشتیبانی منوط به تعیین مقدار مناسب پارامتر α_s خواهد بود.

در رابطه ی ۱۷، w تابع وزن نام دارد، که باید مقدار آن در مجاورت نقطه ی X_I برابر واحد و در لبه های دامنه ی پشتیبانی برابر صفر باشد.^[۲۲] برای تابع وزن از فرم های رایجی همچون تابع اسپلاین مکعبی، تابع اسپلاین مرتبه ی ۴ و یا تابع نمایی استفاده کرد. از میان توابع اخیر، تابع اسپلاین مرتبه ی ۴ به واسطه ی داشتن شرایط یک تابع وزن مناسب در پژوهش حاضر استفاده شده است. این تابع به صورت رابطه ی (۲۰الف) تعریف می شود:

$$w(X - X_I) = \begin{cases} 1 - 6\bar{r}_i^2 + 8\bar{r}_i^3 - 3\bar{r}_i^4 & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (20 \text{ الف})$$

که در آن، \bar{r}_i به صورت رابطه ی ۲۰ب تعریف می شود:

$$\bar{r}_i = \frac{d_i}{r_s} = \frac{|X - X_i|}{r_s} \quad (20 \text{ ب})$$

در روابط ۲۰الف و ۲۰ب، $|X - X_i|$ فاصله ی گره ی I تا نقطه ی دلخواه X است. همچنین در قسمت دوم رابطه ی ۲۰ب، r_s اندازه ی دامنه ی پشتیبانی برای گره ی I است، که برابر d_{sx} و d_{sy} به ترتیب در جهات x و y است. (شکل ۵). در معادله ی ۱۸، \hat{u} بردار شامل ضرایب مجهول نسبت داده شده به گره های میدان است. همچنین $A(X)$ و $B(X)$ ، ماتریس های ممان در تقریب MLS

و D سختی خمشی ورق است، که از رابطه ی ۱۴ محاسبه می شود:

$$D = Et^3 / 12(1 - \nu^2) \quad (14)$$

در نتیجه معادلات تعادل ۵ الی ۷ را می توان بر حسب مؤلفه های مجهول دوران و جابه جایی عرضی ورق در هر نقطه از میان صفحه بیان کرد.

۲.۲. تقریب کمینه ی مربعات متحرک

در بخش حاضر، تقریب متغیرهای ورق رابسنر، یعنی جابه جایی جانبی و مؤلفه های دوران در هر نقطه از میان صفحه ی ورق با استفاده از روش MLS تشریح شده است. از آنجا که هر سه متغیر ورق را می توان با یک تابع شکل واحد تقریب زد، در نتیجه فرمولاسیون تقریب ارائه شده در بخش کنونی بر حسب یک متغیر کلی، به عنوان مثال u ، ارائه شده است.^[۲۱] در روش MLS ، تابع مجهول $u(x)$ در هر نقطه ی دلخواه x از میدان مسئله را می توان به صورت رابطه ی ۱۵ تقریب زد:^[۲۲]

$$u(X) = \sum_{i=1}^m p_i(X) a_i(X) = P^T(X) a(X) \quad (15)$$

که در آن، m تعداد پایه های چندجمله یی مورد استفاده در تقریب MLS ، و $P^T(X)$ بردار پایه های چندجمله یی است که ترکیبی خطی از متغیرهای x و y با مرتبه ی دلخواه است. بردار چندجمله یی های درجه اول و درجه دوم برای مسائل دو بعدی به ترتیب به صورت رابطه ی (۱۶الف و ب) بیان می شود:

$$P^T(X) = \{1, x, y\} \quad (16 \text{ الف})$$

$$P^T(X) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \quad (16 \text{ ب})$$

معمولاً در حل مسائل مربوط به ورق های خمشی، بیشتر از چندجمله یی های درجه دو در تقریب MLS استفاده می شود. در معادله ی ۱۵، بردار ضرایب مجهول نامیده می شود و $X = [x \ y]^T$ بردار مختصات فضایی است. بردار ضرایب $a(x)$ را می توان با کمینه سازی بردار مربعات وزن دار تفاوت مقدار تابع با مقادیر گره یی به صورت روابط ۱۷ و ۱۸ به دست آورد:

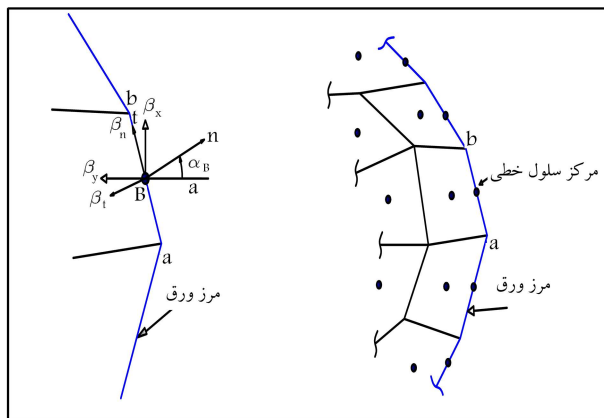
$$J = \sum_{I=1}^n w(X - X_I) [u(X) - u(X_I)]^2 \\ = \sum_{I=1}^n w(X - X_I) \left[\sum_{i=1}^m p_i(X) a_i(X) - u(X_I) \right]^2 \quad (17)$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = A(X) a(X) - B(X) \hat{u} = 0 \quad (18)$$

که در رابطه ی ۱۷، n تعداد گره های واقع در دامنه ی پشتیبانی نقطه ی دلخواه X است. در تقریب MLS ، دامنه ی پشتیبانی را می توان به هر شکلی فرض کرد، مثلاً دایره، مستطیل، لوزی و غیره. در پژوهش حاضر از شکل مستطیلی برای دامنه ی پشتیبانی نقطه ی دلخواه X استفاده شده است. (شکل ۴)

توجه شود در صورتی که خط ترک، دامنه ی پشتیبانی یک نقطه را قطع کند، برخی از نقاط از دامنه ی پشتیبانی خارج می شوند. مسئله ی مذکور را می توان با استفاده از معیارهایی نظیر معیار شفافیت یا معیار انکسار حل کرد.^[۲۳] ابعاد دامنه ی پشتیبانی مستطیلی در جهات x و y ، یعنی d_{sx} و d_{sy} به صورت رابطه ی ۱۹ تعریف می شود:

$$d_{sx} = \alpha_s d_{cx}; \quad d_{sy} = \alpha_s d_{cy} \quad (19)$$



شکل ۶. حجم کنترل (سلول) خطی بر روی مرز ورق و بردارهای نرمال و مماس بر مرز.

که در آن‌ها، همان‌طوری که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، β_{nb} و β_{tb} مؤلفه‌های دوران گرهی دلخواه B در مختصات محلی $n-t$ است که n و t به ترتیب بردار عمود به سمت بیرون و بردار مماس بر مرز ورق در نقطه‌ی B است. با توجه به شکل ۶ می‌توان مؤلفه‌های محلی را بر حسب مؤلفه‌های سراسری با استفاده از روابط ۳۱ الی ۳۳ بیان کرد:

$$\beta_n = \beta_{xB} \cos \alpha_B + \beta_{yB} \sin \alpha_B \quad (31)$$

$$\beta_t = \beta_{xB} \sin \alpha_B - \beta_{yB} \cos \alpha_B \quad (32)$$

$$w_B = w \quad (33)$$

که در آن‌ها، β_{yB} و β_{xB} مؤلفه‌های دوران نقطه‌ی دلخواه B نظیر مختصات x و y سراسری هستند. کاملاً واضح است که با جایگزینی معادلات ۲۶ الی ۲۸ در معادلات ۳۱ الی ۳۳ می‌توان مؤلفه‌های دوران و جابه‌جایی هر نقطه از دامنه‌ی میان صفحه‌ی ورق را بر حسب مقادیر پارامترهای مجهول نظیر در گره‌های واقع در دامنه‌ی پشتیبانی آن نقطه بیان کرد، در نتیجه معادلات نهایی شرایط مرزی هندسی ورق بر حسب پارامترهای مجهول دوران و جابه‌جایی گره‌های میدان بیان می‌شوند.

۲.۳.۲. شرایط مرزی نیرویی

در این حالت برای اعمال شرایط مرزی نیرویی ورق، مقادیر نیروها بر روی مرز ورق را که در مختصات طبیعی nt بیان می‌شوند، می‌توان با استفاده از روابط ۳۴ الی ۳۶ به مختصات سراسری تبدیل کرد:

$$M_n = M_{xB} \cos^t \alpha_B + M_{yB} \sin^t \alpha_B + 2M_{xyB} \sin \alpha_B \cos \alpha_B \quad (34)$$

$$M_t = -M_{xB} \sin \alpha_B \cos \alpha_B + M_{yB} \sin \alpha_B \cos \alpha_B + M_{xyB} (\cos^t \alpha_B - \sin^t \alpha_B) \quad (35)$$

$$Q = Q_B \cos \alpha_B + Q_{tB} \sin \alpha_B \quad (36)$$

برای مثال برای هر گره‌ی واقع بر لبه‌های آزاد ورق، لنگرها و نیروی برشی را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۳۷ بیان کرد:

$$M_n = 0 \quad (37)$$

$$M_t = 0$$

$$Q = 0$$

نامیده می‌شوند و از روابط ۲۱ و ۲۲ تعیین می‌شوند:

$$A(X) = \sum_{I=1}^n w(X - X_I) P(X_I) P^T(X_I) \quad (21)$$

$$B(X) = \left[w(X - X_1) P(X_1) \quad w(X - X_2) P(X_2) \quad \dots \quad w(X - X_n) P(X_n) \right] \quad (22)$$

با حل معادله‌ی ۱۸، $a(X)$ را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۲۳ به دست آورد:

$$a(X) = A^{-1}(X) B(X) \hat{u} \quad (23)$$

با جایگزینی معادله‌ی ۲۳ در معادله‌ی ۱۵، معادله‌ی ۲۴ برای $u(X)$ حاصل می‌شود:

$$u(X) = \sum_{i=1}^n \phi_i(X) u(X_i) = \Phi(X) a(X) \quad (24)$$

که در آن، ϕ_i تابع درون‌یابی است و به صورت رابطه‌ی ۲۵ بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi_i(X) &= \sum_{j=1}^m p_j(X) (A^{-1}(X) B(X))_{jI} \\ &= P^T(X) (A^{-1}(X) B(X))_I \end{aligned} \quad (25)$$

با توجه به معادله‌ی ۲۵، مؤلفه‌های جابه‌جایی و دوران هر نقطه از میان صفحه‌ی ورق، یعنی w ، β_x و β_y را می‌توان با استفاده از روش MLS با استفاده از روابط ۲۶ الی ۲۸ تقریب زد:

$$w^h(X) = \sum_{I=1}^n \phi_I(X) w_I \quad (26)$$

$$\beta_x^h(X) = \sum_{I=1}^n \phi_{xI}(X) \beta_{xI} \quad (27)$$

$$\beta_y^h(X) = \sum_{I=1}^n \phi_{yI}(X) \beta_{yI} \quad (28)$$

که بالانویس h ، دلالت بر مقادیر تقریب‌زده شده‌ی پارامترهای نسبت داده شده به متغیرهای جابه‌جایی و دوران‌های گره‌های واقع در دامنه‌ی میان صفحه‌ی ورق دارد.

۳.۲. اعمال شرایط مرزی

۱.۳.۲. شرایط مرزی هندسی

در روش احجام محدود، شرایط مرزی هندسی ورق را می‌توان با تعریف سلول‌های (احجام کنترل) خطی بر روی مرزهای دامنه‌ی میان صفحه‌ی ورق اعمال کرد. [۲۸] همان‌طوری که در شکل ۵ الف نشان داده شده است، برای انجام این کار گره‌های نسبت داده شده به سلول‌های خطی بر روی مرزهای هندسی میان صفحه‌ی ورق قرار می‌گیرند. برای مثال در حالت ورق با لبه‌های با تکیه‌گاه ساده یا لبه‌های با تکیه‌گاه گیردار، مقدار جابه‌جایی گره‌ی مرزی، برای مثال گره‌ی B در شکل ۶ را می‌توان به صورت روابط ۲۹ و ۳۰ تعریف کرد:

$$w_B = 0 \quad \beta_{nB} = 0 \quad \beta_{tB} = 0 \quad \text{در تکیه‌گاه گیردار} \quad (29)$$

$$w_B = 0 \quad \beta_{tB} = 0 \quad \text{در تکیه‌گاه ساده} \quad (30)$$

$$\beta_y = \frac{6\sqrt{2}r}{Et^3} K_1 \left[4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - (1+v) \left(\cos\frac{\theta}{2} \sin\theta \right) \right] + \frac{6\sqrt{2}r}{Et^3} K_2 \left[-2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (1-v) + (1+v) \left(\sin\frac{\theta}{2} \sin\theta \right) \right] + \frac{6\sqrt{2}r^{\frac{5}{2}}}{Et^3} K_3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [1 + (1+3v) \cos\theta] \quad (پ ۳۸)$$

همچنین در مرجع اخیر، میدان لنگرها و نیروهای برشی متوجه بر روی مقطع عرضی ورق در ناحیه نوک ترک به صورت روابط ۳۹ (الف الی ث) به دست آمده است.

$$M_x = \frac{K_1}{\sqrt{2}r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_2}{\sqrt{2}r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (۳۹ الف)$$

$$M_y = \frac{K_1}{\sqrt{2}r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_2}{\sqrt{2}r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (۳۹ ب)$$

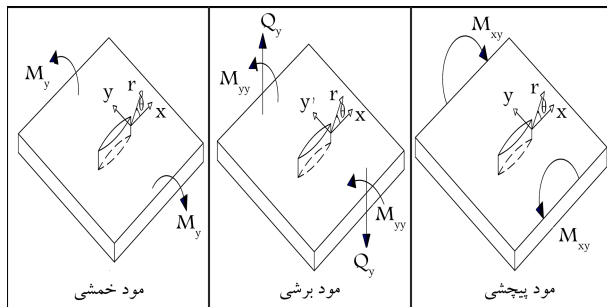
$$M_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2}r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_2}{\sqrt{2}r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (۳۹ پ)$$

$$Q_x = -\frac{K_2}{\sqrt{2}r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (۳۹ ت)$$

$$Q_y = -\frac{K_2}{\sqrt{2}r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (۳۹ ث)$$

در معادلات ۳۸ الف الی ۳۹ ث، K_1 ضریب شدت تنش نوک ترک متناظر با حالتی است که ورق ترک خورده تحت بارگذاری متقارن لنگر در لبه موازی با امتداد ترک قرار گرفته است. همچنین K_2 و K_3 به ترتیب ضرایب شدت نوک ترک در حالتی هستند که ورق تحت بارگذاری متقارن لنگر پیچشی وارد بر لبه موازی با ترک و تحت بارگذاری نیروی برشی خارج صفحه قرار گرفته باشد (شکل ۷). در حقیقت، ضرایب شدت تنش یک ورق خمشی ترک خورده، به صورت مقادیر حدی نیروها و لنگرهای خمشی در ناحیه نوک ترک مطابق روابط ۴۰ تعریف می شوند:

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2}r M_y(r, 0) \\ K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2}r M_{xy}(r, 0) \\ K_3 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2}r Q_y(r, 0) \quad (۴۰)$$



شکل ۷. مودهای مختلف ترک خوردگی ورق خمشی.

در حالت وجود شرایط مرزی ترکیبی، شرایط مرزی هندسی و شرایط مرزی نیرویی همراه هم اعمال می شوند، به عنوان مثال در حالت ورق با لبه های متکی بر تکیه گاه ساده، سه شرط مرزی ورق از میان شرایط مرزی هندسی (روابط ۳۱-۳۳) و شرایط مرزی نیرویی (روابط ۳۴-۳۶) انتخاب می شود. باید توجه کرد که شرایط مرزی طبیعی در مرزهای ورق را می توان با جای گذاری معادلات ۱۱ الی ۱۴ در معادلات ۳۴ الی ۳۶ بر حسب متغیرهای سراسری β_{yB} ، β_{xB} و ورق نوشت. با جای گذاری مقادیر تقریبی متغیرهای میدان از معادلات ۲۶ الی ۲۸، می توان معادلات شرایط مرزی نیرویی بر حسب پارامترهای مجهول گره های واقع در دامنه ی پشتیبانی همان نقطه ی مرزی را به دست آورد.

با سر هم بندی کردن معادلات تعادل ۸ الی ۱۰ برای تمام سلول های دامنه ی میان صفحه ی ورق به همراه معادلات شرایط مرزی ۳۰ الی ۴۱، مجموعه یی از معادلات خطی بر حسب پارامترهای مجهول جابه جایی و دوران گره های دامنه حاصل می شود.

۳. محاسبه ی ضریب شدت تنش

۳.۱. میدان های نوک ترک برای یک ترک راه به در در ورق رابسنر

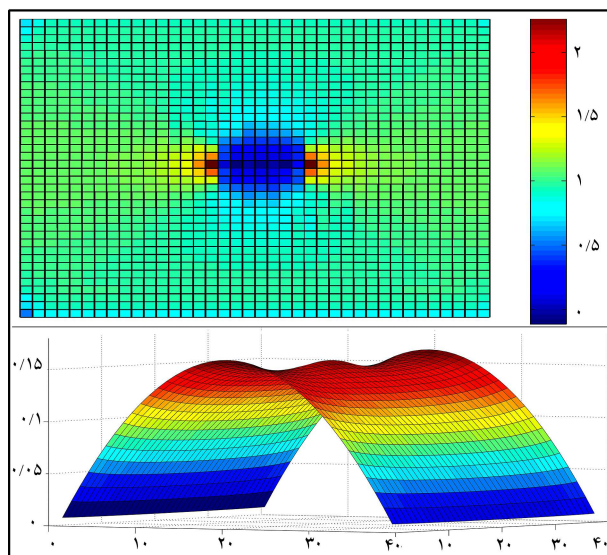
برای محاسبه ی ضریب شدت تنش در نوک یک ترک، نیاز به استفاده از میدان های تنش و جابه جایی در نوک ترک است. از آنجا که المان ورق، مدل ساده شده ی یک جامد سه بعدی است، لذا میدان های مجانب تنش و جابه جایی ورق در ناحیه ی نوک ترک را می توان با اصلاحاتی در میدان های به دست آمده از مدل سه بعدی استخراج کرد.

برخی پژوهشگران (۱۹۶۹) با استفاده از روش بسط سری تابع مختلط میدان های جابه جایی و تنش را برای مسائل ترک سه بعدی استخراج کردند. [۲۵] برخی دیگر (۱۹۸۶) نیز جملات تکین توابع مذکور را انتخاب و با استفاده از آن ها در انتگرال ز، ضرایب شدت تنش ورق رابسنر ترک خورده را محاسبه کردند. [۱۰] همچنین در یک مطالعه ی جزئی تر (۲۰۰۰)، تمام جملات تکین در بسط مذکور و نیز میدان های مجانب تنش و جابه جایی نوک ترک در ورق رابسنر ترک خورده استخراج شد. [۱۱] و میدان های نوک ترک مذکور برای متغیرهای سینماتیکی ورق، یعنی جابه جایی جانبی و مؤلفه های دوران، به صورت رابطه های (۳۸ الف، ب و پ) ارائه شدند.

$$w = \frac{6\sqrt{2}r}{\delta t \mu} K_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{6\sqrt{2}r^{\frac{5}{2}}}{Et^3} K_1 \left[\frac{1}{3} (1+v) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) - (1-v) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{6\sqrt{2}r^{\frac{5}{2}}}{Et^3} K_2 \left[-\frac{1}{3} (5+3v) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + (1-v) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (۳۸ الف)$$

$$\beta_x = \frac{6\sqrt{2}r}{Et^3} K_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [4 - (1+v) (1 + \cos\theta)] + \frac{6\sqrt{2}r}{Et^3} K_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [4 + (1+v) (1 + \cos\theta)] + \frac{6\sqrt{2}r^{\frac{5}{2}}}{Et^3} K_3 \left[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - (1+3v) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta \right] \quad (۳۸ ب)$$

دیگر ضرایب شدت تنش ورق یعنی K_2 و K_3 را می‌توان با روندی مشابه محاسبه کرد.



شکل ۱۱. تغییرات لنگر در ورق با ترک مرکزی و تغییر شکل ورق بر حسب میلیمتر با فرض $h=1\text{mm}$.

مقابل تعداد گره‌های شبکه به ازاء مقادیر مختلف a_s مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، فرض اندازه‌ی دامنه‌ی پشتیبانی در محدوده‌ی $26 - 24 = a_s$ ، کمترین مقدار خطا را ایجاد می‌کند. از طرف دیگر، خطای روش در حالت استفاده از شبکه‌ی 39×39 به حدود ۱٪ می‌رسد، که خطای قابل قبولی در کارهای عددی است. شایان ذکر است که در مسئله‌ی ذکر شده، مقدار ضریب شدت تنش مود دوم یعنی K_2 برابر صفر به‌دست آمده است. در شکل ۱۲، نمودار تغییرات زمان موردنیاز تحلیل بر حسب تعداد گره‌های شبکه نشان داده شده است که مطابق آن، زمان موردنیاز تحلیل در حالت استفاده از شبکه‌ی 19×19 با توجه به اندازه‌ی دامنه‌ی پشتیبانی a_s از ۶۰ ثانیه تا ۷۷ ثانیه تغییر می‌کند، که تغییرات مذکور برای شبکه‌ی 39×39 از ۳۰۶ ثانیه تا ۳۹۳ ثانیه است.

۲.۴. ورق با ترک اریب مرکزی تحت لنگر خمشی در لبه‌ها

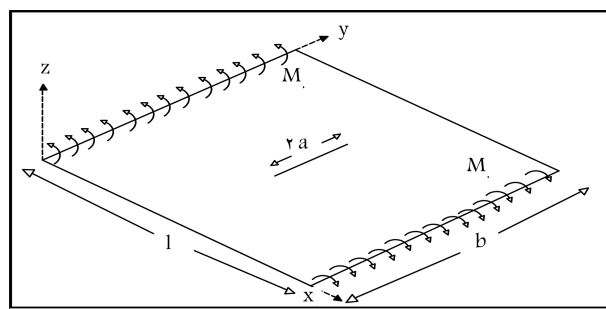
در مسئله‌ی کنونی، ورق با همان شرایط مرزی هندسی و شرایط بارگذاری و همچنین خصوصیات مصالح مسئله‌ی اخیر در نظر گرفته شده است، لکن ترک مرکزی به‌صورت اریب تحت زاویه‌ی دلخواه α و با طول $2a$ در مرکز ورق واقع شده است (شکل ۱۳).

نتایج دقیق ضرایب شدت تنش مسئله‌ی کنونی در مرجع^[۴۷] به‌صورت رابطه‌ی (۴۷) الف و ب) به‌دست آمده است:

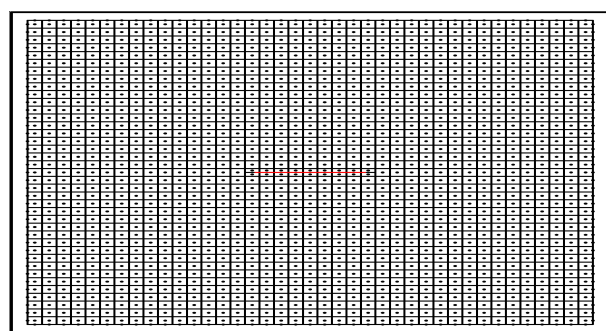
$$K_1 = 0.82 M_0 \sqrt{a} \cos^2 \beta \quad (47 \text{ الف})$$

$$K_2 = 0.68 M_0 \sqrt{a} \sin \beta \cos \beta \quad (47 \text{ ب})$$

برای محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش در مسئله‌ی حاضر، با توجه به نتایج به‌دست آمده از حل مسئله‌ی اول، اندازه‌ی بدون بعد دامنه‌ی پشتیبانی برابر $a_s = 26$ فرض شده است. همچنین شبکه‌ی سلولی مورد استفاده، ابتدا به‌صورت یک شبکه‌ی منظم 39×39 با تعداد گره کل برابر با ۱۵۲۱ فرض شده است، سپس بنا به مقدار زاویه‌ی ترک، هر کدام از سلول‌های واقع در محدوده‌ی هندسه‌ی ترک به دو سلول مجزا تبدیل شده‌است. در شکل ۱۴، شبکه‌ی سلولی مورد استفاده در تحلیل ورق، در حالتی که زاویه‌ی ترک برابر با $\alpha = 45^\circ$ درجه است،



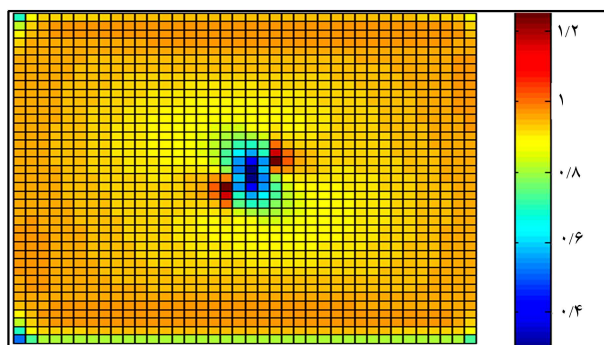
شکل ۹. ورق با ترک مرکزی تحت لنگر خمشی یکنواخت در لبه‌های موازی با ترک.



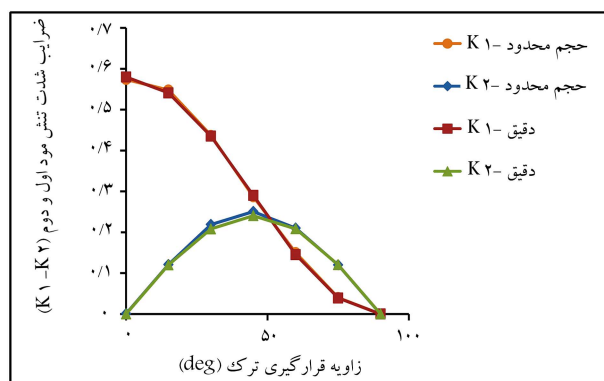
شکل ۱۰. شبکه‌ی سلولی 39×39 با ۱۵۲۶ گره مرکز سلول و ۱۵۶ گره مرزی مورد استفاده در تحلیل ورق با ترک مرکزی.

میلی‌متر در نظر گرفته شده است. ضرایب کشسانی و پواسون مصالح ورق به ترتیب برابر 10^5 مگاپاسکال و 0.3 فرض شده است. به منظور تحلیل حجم محدود ورق ترک‌خورده، مطابق شکل ۱۰، میان صفحه‌ی ورق با یک شبکه‌ی یکنواخت سلولی گسسته‌سازی شده است که به مرکز هر سلول یک گره‌ی محاسباتی که مرکز سلول نیز محسوب می‌شود، اختصاص یافته است. این تذکر لازم است که سلول‌هایی از شبکه که خط ترک از میان آن‌ها عبور می‌کند، با دو سلول در مجاور ترک جایگزین شده‌اند. همچنین گره‌های اضافی در لبه‌های خارجی ورق توزیع شده‌اند، به طوری که در وجه سلول‌هایی که بر مرزهای ورق منطبق است، یک گره واقع شده است.

تحلیل ورق برای سه حالت تراکم شبکه‌ی سلولی 19×19 ، 29×29 ، 39×39 (۱۹ انجام شده است. در شکل ۱۰، شبکه‌ی سلولی با تراکم 39×39 مورد استفاده در تحلیل مسئله‌ی حاضر مشاهده می‌شود که مطابق آن تعداد کل گره‌های محاسباتی در شبکه‌ی مذکور، برابر با ۱۶۸۲ گره است که ۱۵۶ عدد از آن‌ها در مرزهای ورق قرار داده شده‌اند. جهت اعمال شرایط مرزی هندسی، ورق دو لبه‌ی موازی با ترک (لبه‌های بالا و پایین) به صورت تکیه‌گاه ساده و دو لبه‌ی دیگر ورق (لبه‌های چپ و راست) به صورت لبه‌ی آزاد فرض شده‌اند. برای انتگرال‌گیری نیروها، روی هر کدام از وجوه سلول، دو نقطه‌ی گوسی فرض شده است. همچنین برای محاسبه‌ی توابع پایه از چندجمله‌ی‌های درجه دو با ۶ جمله ($m = 6$) استفاده شده است. دامنه‌ی انتگرال اندرکنشی به‌صورت مربعی با مرکزیت نوک ترک و طول ضلعی برابر a (نصف طول ترک) فرض شده است که برای محاسبه‌ی جملات انتگرال اندرکنشی، رابطه‌ی ۴۲ این دامنه با یک شبکه‌ی سلولی 10×10 گسسته شده و از تریب گوس دو نقطه‌ی در هر سلول آن استفاده شده است. در شکل‌های ۱۱ الف و ب) به ترتیب نمودار تغییرات لنگر خمشی M_{xx} و تغییر شکل جانبی میان صفحه‌ی ورق نشان داده شده است. همچنین در شکل ۱۲ الف، مقدار خطای تقریب ضریب شدت تنش K_1 در مقایسه با مقادیر دقیق ارائه‌شده در مرجع^[۵]، در



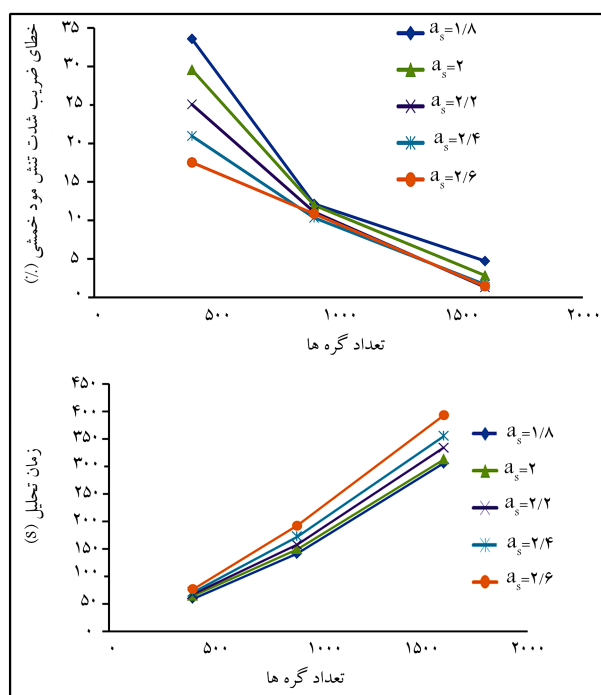
شکل ۱۵. تغییرات لنگر خمشی M_{xx} ورق با زاویه‌ی ترک $\alpha = 45^\circ$.



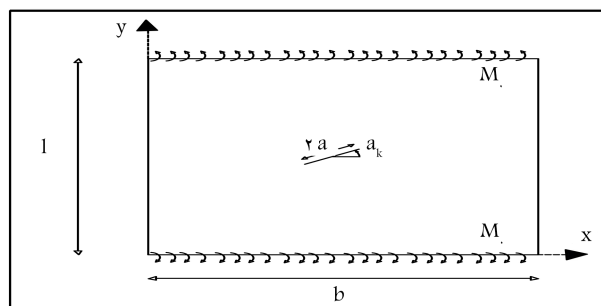
شکل ۱۶. مقدار ضرایب شدت تنش مود ترکیبی در ورق با ترک مرکزی به ازاى مقادیر مختلف زاویه‌ی قرارگیری ترک.

شرایط مرزى قرار داده شده است. شرایط مرزى لبه‌های ورق همانند مثال قبل است.

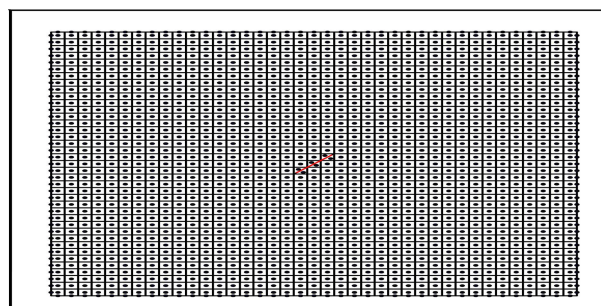
همچنین مشخصات دامنه‌ی انتگرال اندرکنشی همانند مثال قبل است، البته با این تفاوت که دامنه‌ی انتگرال‌گیری متناسب با زاویه‌ی امتداد ترک دوران می‌یابد. ضرایب شدت تنش مود اول و دوم ترک‌خوردگی یعنی K_1 و K_2 محاسبه شده‌اند. در شکل ۱۵، نمودار تغییرات لنگر M_{xx} نشان داده شده است. در این نمودار وجود گرادیان زیاد لنگر خمشی در محدوده‌ی ترک کاملاً روشن است، که این امر قابل پیش‌بینی است. نتایج ضرایب شدت تنش مود اول و دوم حاصل از تحلیل حجم محدود به همراه نتایج دقیق در شکل ۱۶ مشاهده می‌شود، که مطابق آن نتایج تحلیل حجم محدود کاملاً منطبق بر نتایج دقیق است، که این امر نشان از دقت خوب نتایج روش حجم محدود و در نتیجه توانایی آن در تحلیل مسئله‌ی ورق ترک‌خورده با زاویه‌ی دلخواه دارد. شایان ذکر است که مسئله‌ی کنونی در مرجع [۱۱] با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته حل شده است، که در آن از یک مش متراکم و هم‌راستاى با امتداد ترک استفاده شده است، که این امر موجب صرف وقت زیادترى برای مش‌بندی مسئله در مقایسه با شبکه‌ی یک‌نواخت مورد استفاده در پژوهش حاضر می‌شود، در روش حجم محدود به‌واسطه‌ی قابلیت تقسیم دلخواه سلول‌های مجاور ترک و همچنین استفاده از تقریب مرتبه‌ی بالای ML/S نیازی به مش‌بندی پیچیده، همانند نمونه‌ی که در مرجع اخیر انجام شده است، نیست. به‌واسطه‌ی بررسی و محاسبه‌ی مدت زمان تحلیل در یک شبکه و دامنه‌ی پشتیبانی مشابه در مثال قبل و همچنین همانندی نتایج جهت حفظ اختصار، از ارائه‌ی زمان تحلیل مربوط به مثال کنونی صرف‌نظر شده است.



شکل ۱۷. خطای محاسبه ضرایب شدت تنش و زمان انجام تحلیل برحسب تعداد گره‌های شبکه با فرض مقادیر مختلف برای اندازه دامنه پشتیبانی.

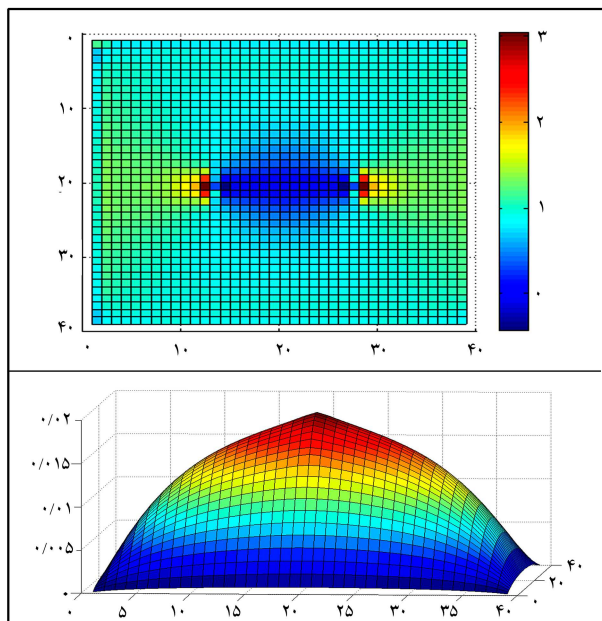


شکل ۱۸. هندسه‌ی ورق با ترک اریب مرکزی تحت بارگذاری خمشی در لبه‌ها.

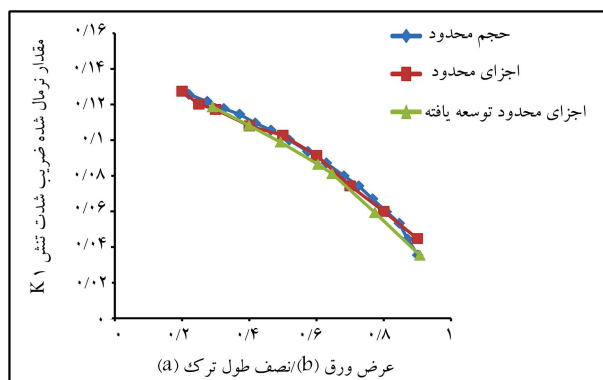


شکل ۱۹. شبکه‌ی سلولی مورد استفاده در ورق با ترک اریب مرکزی در حالت زاویه‌ی $\alpha = 45^\circ$ درجه.

مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن هر کدام از سلول‌های شبکه، که خط ترک از میان آن عبور می‌کند، به دو سلول در مجاور ترک تقسیم می‌شود که به هر کدام از سلول‌های جدید یک گره‌ی محاسباتی به‌عنوان مرکز سلول تخصیص می‌یابد، در نتیجه در این حالت تعداد کل سلول‌های شبکه به ۱۵۲۴ سلول رسیده است. همچنین همانند مسئله‌ی قبل، تعداد ۱۵۶ گره در مرزهای ورق به منظور اعمال



شکل ۱۹. تغییرات لنگر در ورق دارای ترک با طول $a = 18mm$ و تغییر شکل ورق ترک خورده.

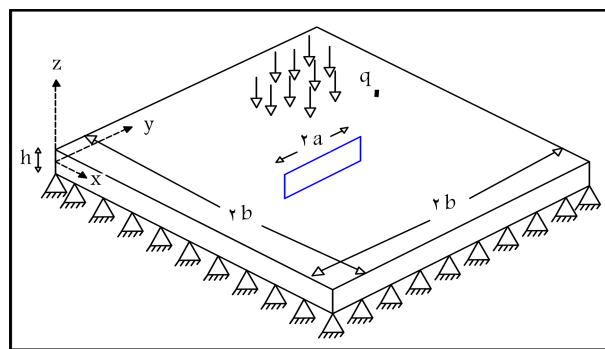


شکل ۲۰. ضریب شدت تنش مود اول خمشی در ورق ترک خورده با تکیه‌گاه ساده در چهار طرف تحت بار گسترده‌ی جانبی.

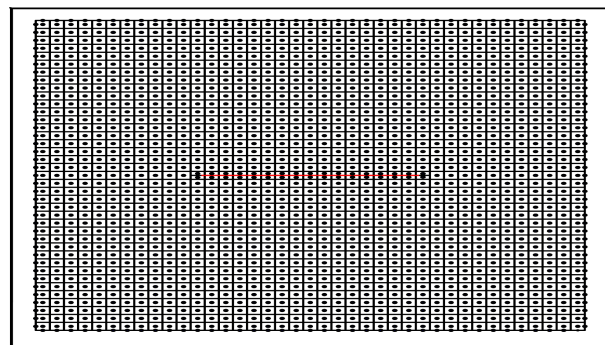
محدود^[۱۰] و روش اجزای محدود توسعه یافته^[۲۲] نشان داده شده است. همانطوری که دیده می‌شود نتایج حاصل از حجم محدود تطابق خوبی با نتایج دیگر روش‌های عددی موجود دارد که این امر نشان دهنده توانایی روش حجم محدود در حل مسئله ورق ترک خورده خمشی تحت اثر بارهای جانبی (خارج صفحه) می‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، روش حجم محدود کلاسیک جهت محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش در ورق خمشی رایسنر ترک خورده توسعه داده شده است. در روش مذکور با استفاده از تقریب کمینه‌ی مربعات متحرک، توابع شکل در هر نقطه از میان صفحه‌ی ورق تقریب زده می‌شوند. توابع پایه‌ی مورد نیاز در تقریب نیز به صورت چند جمله‌ی‌های درجه دوم فرض می‌شوند. نتایج حاصل نشان می‌دهند که فرض اندازه‌ی دامنه‌ی پشتیبانی در محدوده‌ی $2/4$ تا $2/6$ می‌تواند نتایج با دقت مناسب را برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش ورق حاصل کند. همچنین با تحلیل مسائل مختلف ورق ترک خورده،



شکل ۱۷. ورق مستطیلی با ترک مرکزی با تکیه‌گاه ساده در ۴ طرف تحت بار گسترده‌ی عرضی.



شکل ۱۸. شبکه‌ی سلولی 40×40 مورد استفاده در حالت ورق ترک خورده با طول ترک $a = 4$.

۳.۴. ورق با ترک مرکزی تحت بار گسترده‌ی جانبی

در مسئله‌ی حاضر، به محاسبه‌ی ضریب شدت تنش ورق خمشی با ترک مرکزی تحت بار گسترده‌ی جانبی وارده بر سطح بالایی آن با استفاده از روش حجم محدود پرداخته شده است. شکل ۱۷، هندسه‌ی ورق به همراه شرایط مرزی و همچنین بارگذاری وارده را نشان می‌دهد. لبه‌های خارجی ورق به صورت تکیه‌گاه ساده فرض شده است. مسئله‌ی کنونی در مراجع^[۲۵،۲۶] نیز مطالعه شده است، لذا ابعاد ورق و خصوصیات مصالح و بارگذاری وارده در پژوهش حاضر به صورت یکسان با مطالعات اخیر فرض شده‌اند، که عبارت‌اند از: طول و عرض ورق برابر با $b = 1$ واحد، ضخامت ورق برابر $h = 0.1$ ، همچنین خصوصیات مصالح ورق به ترتیب عبارت‌اند از: ضریب کشسانی $E = 100$ مگاپاسکال و ضریب پواسون مصالح ورق برابر $\nu = 0.3$. شبکه سلولی مورد استفاده در این مساله به صورت یک شبکه یکنواخت با تراکم 39×39 سلول فرض شده است، در شکل ۱۸ این شبکه در حالت طول ترک برابر با $a = 4$ نشان داده شده است، البته در اثر عبور ترک از میان سلول‌های ناحیه خط ترک این سلول‌ها به دو سلول مجزا در اطراف خط ترک تقسیم می‌شوند. همچنین اندازه بدون بعد دامنه پشتیبانی $a_s = 0.26$ مورد استفاده قرار گرفته است. از چند جمله‌ای‌های درجه دوم با تعداد جمله برابر در ساخت توابع شکل استفاده شده است. در شکل ۱۹ الف نمودار تغییرات لنگر M_{xx} در حالت طول ترک برابر با $a = 0.4$ نشان داده شده است، همچنین در شکل ۱۹ ب منحنی تغییر شکل جانبی ورق ترک خورده نشان داده شده است. در شکل ۲۰ نیز تغییرات مقدار نرمال شده ضریب شدت تنش مود اول که از رابطه $\frac{K_1}{pb\sqrt{a}}$ محاسبه شده است، حاصل از حل حجم محدود مساله در کنار نتایج ارائه شده روش اجزای

روش کمینه‌ی مربعات متحرک در تولید تابعی پیوسته از میدان جابه‌جایی، سلول‌بندی مجدد شبکه در ناحیه‌ی خط ترک با هر امتداد دلخواهی به راحتی امکان‌پذیر است و ضریب شدت تنش ورق ترک‌خورده با دقت مناسبی محاسبه می‌شود.

توانایی روش مذکور در محاسبه‌ی ضریب شدت تنش ورق‌های خمشی در حالت‌های مختلف بارگذاری خارجی نشان داده شد. با توجه به انعطاف‌پذیری روش حجم محدود در به‌کارگیری شکل‌های دلخواه برای سلول‌های شبکه و همچنین توانایی

پانوشته‌ها

1. through the thickness crack
2. stress intensity factor
3. perturbation
4. mode
5. energy release rate
6. modified virtual crack closure integral
7. singular
8. extended finite element method
9. enrichment
10. fractal
11. boundary collocation method
12. invarian integrals
13. element free galerkin method
14. reproducing kernel
15. stabilized conforming nodal integration
16. sub-domain stabilized conforming integration
17. extended isogeometric analysis
18. meshless local petrov galerkin
19. moving least squares

منابع (References)

1. Willums, M.L. "The bending stress distribution at the base of a stationary crack", *J. appl. Mech.*, **28**(1), pp. 78-82 (1961).
2. Knowels, J.K. and WANG, N.M. "On the bending of an elastic plate containing a crack", *J. Math. Phys.*, **39**(1-4), pp. 223-236 (1960).
3. Boduroglu, H. and Erdogan, F. "Internal and edge cracks in a plate of finite width under bending", *Journal of Applied Mechanics*, **50**(3), pp. 621-628 (1983).
4. Hartranft, R.J. and Sih, G.C. "Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks", *Journal of Mathematics and Physics*, **47**(1-4), pp. 276-291 (1968).
5. Joseph, P. and Erdogan, F. "Bending of a thin Reissner plate with a through crack", *Journal of Applied Mechanics*, **58**(3), pp. 842-846 (1991).
6. Hui, C.Y. and Zehnder, A.T. "A theory for the fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments", *Int. J. Fract.*, **61**(3), pp. 211-229 (1993).
7. Viz, M.J., Potyondy, D.O., Zehnder, A.T. and et al. "Computation of membrane and bending stress intensity factors for thin, cracked plates", *Int. J. Fract.*, **72**(1), pp. 21-38 (1995).
8. Wilson, W.K. and Thompson, D.G. "On the finite element method for calculating stress intensity factors for cracked plates in bending", *Engng. Fracture Mech.*, **3**(2), pp. 97-102 (1971).
9. Ahmad, J. and Loo, F.T.C. "Solution of plate bending problems in fracture mechanics using a specialized finite element technique", *Engineering Fracture Mechanics*, **11**(4), pp. 661-673 (1979).
10. Sosa, H. and Eischen, J. "Computation of stress intensity factors for plate bending via a path-independent integral", *Engineering Fracture Mechanics*, **25**(4), pp. 451-462 (1986).
11. Dolbow, J., Moes, N. and Belytschko, T. "Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method", *International Journal of Solids and Structures*, **37**(48-50), pp. 7161-7183 (2000).
12. Su, R.K.L. and Sun, H.Y. "Numerical solution of cracked thin plates subjected to bending, twisting and shear loads", *International Journal of Fracture*, **117**(4), pp. 323-335 (2002).
13. Su, R.K.L., Leung, A.Y.T. "Mixed mode cracks in Reissner plates", *Int. J. Fract.*, **107**(3), pp. 235-257 (2001).
14. Wang, Y.H., Tham, L.G., Lee, P.K.K. and et al. "A boundary collocation method for cracked plates", *Comput. Struct.*, **81**(28), pp. 2621-2630 (2003).
15. Zehnder, A.T. and Viz, M.J. "Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending and twisting loads", *Appl. Mech. Rev.*, **58**(1), pp. 37-48 (2005).
16. Palani, G.S., Iyer, N.R. and Dattaguru, B. "A generalised technique for fracture analysis of cracked plates under combined tensile, bending and shear loads", *Computers and Structures*, **84**(29), pp. 2050-2064 (2006).
17. Areias, P.M.A. and Belytschko, T. "Non-linear analysis of shells with arbitrary evolving cracks using XFEM", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **62**(3), pp. 384-415 (2005).
18. Dirgantara, T. and Aliabadi, M.H. "Stress intensity factors for cracks in thin plates", *Engineering Fracture Mechanics*, **69**(13), pp. 1465-1486 (2002).
19. Lasry, J., Pommier, J., Renard, Y. and et al. "Extended finite element methods for thin cracked plates with Kirchhoff-Love theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **84**(9), pp. 1115-1138 (2010).
20. Lasry, J., Renard, Y. and Salaun, M. "Stress intensity factors computation for bending plates with extended finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **91**(9), pp. 909-928 (2012).
21. Rouzegar, S.J. and Mirzaei, M. "Modeling dynamic fracture in Kirchhoff plates and shells using the extended finite element method", *ScientiaIranica*, **20**(1), pp. 120-130 (2013).
22. Bayesteh, H. and Mohammadi, S. "XFEM fracture analysis of shells: The effect of crack tip enrichments", *Computational Materials Science*, **50**(10), pp. 2793-2813 (2011).

23. Tanaka, S., Suzuki, H., Sadamoto, S. and et al. "Analysis of cracked shear deformable plates by an effective meshfree plate formulation", *Eng. Fract. Mech.*, **144**, pp. 142-157 (2015).
24. Tanaka, S., Suzuki, H., Sadamoto, S. and et al. "Accurate evaluation of mixed-mode intensity factors of cracked shear-deformable plates by an enriched mesh-free Galerkin formulation", *Archive of Applied Mechanics*, pp. 1-20 (2016).
25. Bhardwaj, G., Singh, I.V., Mishra, B.K. and et al. "Numerical simulations of cracked plate using XIGA under different loads and boundary conditions", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **23**(16), pp. 704-714 (2016).
26. Onate, E., Cervera, M. and Zienkiewicz, O.C. "A finite volume format for structural mechanics", Int. Centre for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, 15, to be published in Int. J. Numer. Methods Eng. (1992).
27. Wheel, MA. "A finite volume method for analyzing the bending deformation of thick and thin plates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **147**(1-2), pp. 199-208 (1997).
28. Fallah, N. "A cell vertex and cell centred finite volume method for plate bending analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**(33-35), pp. 3457-3470 (2004).
29. Atluri, S.N. and Shen, S. "The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods", *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **3**(1), pp. 11-52 (2002).
30. Moosavi, M.R., Delfanian, F. and Khelil, A. "Orthogonal meshless finite volume method applied to crack problems", *Thin-walled Structures*, **52**(61-65), pp. 61-65 (2012).
31. Belinha, J. and Dinis, L.M.J.S. "Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method", *Computers and Structures*, **84**(22-23), pp. 1547-1559 (2006).
32. Mindlin, R.D. "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", *ASME J. Appl. Mech.*, **18**, pp. 73- 31 (1951).
33. Liu, G.R. "Meshfree methods: moving beyond the finite element method", CRC Press (2010).
34. Fleming, M., Chu, Y.A., Moran, B. and et al. "Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **40**(8), pp. 1483-1504 (1997).
35. Hartranft, R.J. and Sih, G C. "The use of eigenfunction expansions in the general solution of the three-dimensional crack problems", *J. Math. Mech.*, **19**(2), pp. 123-138 (1969).
36. Rhee, H.C. and Atluri, S.N. "Hybrid stress finite element analysis of bending of a plate with a through flaw", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **18**(2), pp. 259-271 (1982).
37. Sih, G. "Mechanics of fracture 3: Plates and shells with cracks", Noordho, The Netherlands (1977).