

روشی جدید بر مبنای استفاده از المان‌های با ضخامت صفر در مدل‌سازی گسترش باند برشی

رعنا آسمانی* (کارشناس ارشد)

امیدرضا بارانی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهندسی عمران شریف، (تابش ۱۳۹۸)
دوره ۲ - ۳۵، شماره ۱/۳، ص. ۳۲-۲۵

در نوشتار حاضر، یک روش جدید برای مدل‌سازی باند برشی ارائه شده است. برای مدل‌سازی، به منظور یافتن مسیر ناپیوستگی از تحلیل دوشاخه‌یی^۱ استفاده شده است. همچنین برای اولین بار برای مدل‌سازی باند برشی، المان‌های با ضخامت صفر استفاده شده است. با استفاده از درایه‌های تانسور سختی مماسی، یک تابع محاسبه شده است که با استفاده از علامت و ریشه‌های مشتق آن، مکان و جهت ناپیوستگی تعیین شده است. پس از شروع محلی شدن کرنش، با استفاده از المان‌های با ضخامت صفر در مسیر ناپیوستگی، ابتدا رفتار باند برشی و سپس با ادامه‌ی بارگذاری، گسترش باند برشی مدل‌سازی شده‌اند. روش مذکور در دو مثال عددی استفاده شده و با مقایسه‌ی نتایج آن‌ها با نتایج روش‌های موجود، نشان داده شده است که روش جدید در مدل‌سازی رفتار باند برشی توانایی دارد.

واژگان کلیدی: اجزاء محدود، المان با ضخامت صفر، باند برشی، مدل‌سازی، محلی شدن کرنش.

rasemani@mail.kntu.ac.ir
barani@kntu.ac.ir

۱. مقدمه

در بسیاری از سیستم‌های تحت بارگذاری، به جای توزیع ملایم کرنش‌ها در کل سیستم، کرنش‌ها در یک ناحیه‌ی باریک از سیستم متمرکز می‌یابند، در حالی که نواحی دیگر، سیستم باربرداری را تجربه می‌کنند؛ پدیده‌ی مذکور در اصطلاح محلی شدن کرنش^۲ نام دارد و به صورت یک باند برشی و یا یک ناحیه با تمرکز کرنش بالا ظاهر می‌شود.^[۱] البته در برخی موارد، ناحیه‌ی ذکر شده ممکن است به راحتی قابل رؤیت نباشد. پدیده‌ی مذکور می‌تواند به دلیل ناپیوستگی‌ها و نواقص داخلی در محیط، از جمله ریزترک‌ها، حفره‌های داخلی و همچنین تحت شرایط مرزی یا بارگذاری غیریکنواخت ایجاد شود.^[۲]

باند برشی، ناحیه‌ی باریکی است که تغییرشکل‌های برشی زیادی در آن متمرکز می‌شود و عرض آن متفاوت است. با وجود عرض بسیار کوچک باند، تغییرشکل مماسی ناشی از آن تا چند سانتی‌متر امکان گسترش دارد و حتی ممکن است منجر به آثار ماکروسکوپی شود. وقوع باند برشی باعث کاهش ظرفیت جذب انرژی در مواد جامد می‌شود و ممکن است موجب شکست‌های سازه‌یی زود هنگام شود.

باند برشی، ضخامت یا عرض مشخصه‌ی اولیه دارد که با داشتن آن، باند برشی با استفاده از تئوری میدان جابه‌جایی پیوسته از طریق روش اجزاء محدود^[۳] و یا با استفاده از مناطق محلی شدن کرنش قابل مدل‌سازی است.^[۴] روش دیگر که به

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۳/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۶/۹/۵، پذیرش ۱۳۹۶/۹/۱۹.
DOI:10.24200/J30.2019.20922

اگرچه مدل‌سازی محلی شدن کرنش با ناپیوستگی ضعیف باند و ضخامت محدود آن از نظر فیزیکی معتبرتر است، اما محلی شدن کرنش در المان‌های موجود باند برشی باعث می‌شود که المان‌های مذکور، کرنش‌های بسیار زیادی را تجربه کنند که منجر به کاهش دقت و ناپایداری حل عددی می‌شود. از طرف دیگر، استفاده از سطح دارای ناپیوستگی قوی به جای منطقه‌ی محلی شدن کرنش، با حذف ناحیه با مواد با تغییرشکل بسیار زیاد از هندسه‌ی مدل یکسان است. همچنین محلی شدن کرنش خود را در ناپیوسته شدن جابه‌جایی آشکار می‌کند و استفاده از روش ناپیوستگی قوی به ضخامت باند نیازی ندارد و حالت خمیری کلاسیک مستقل از نرخ بعد از دوشاخه‌یی شدن نیز معتبر باقی می‌ماند.

تئوری‌های غیرمحلی^۳ نیز در برخی پژوهش‌ها،^[۵] برای حل مسائل محلی شدن کرنش استفاده شده است. همچنین با استفاده از روش اصلاح مش تطابقی^۴، بررسی‌هایی صورت گرفته است.^[۶] تئوری‌های گرادایانی که بر مبنای استفاده از گرادایان‌های مراتب یک، دو یا مراتب بالاتر کرنش هستند، نیز در برخی مطالعات،^[۷] به عنوان یکی از راه‌های مؤثر در توصیف پدیده‌های محلی شدن کرنش به کار رفته‌اند. استفاده از تئوری کسرات^۵ در اجزاء محدود، اولین بار در سال ۱۹۹۳،^[۸] انجام

شد. برخی پژوهشگران،^[۱۷] نیز تئوری کسرات را برای تحلیل عددی پدیده‌ی محلی شدن کرنش پیشنهاد کردند.

مدل‌سازی ناپیوستگی قوی باند برشی با استفاده از قوانین ساختاری پیوسته، در سال ۱۹۹۳،^[۱۴] مطالعه شد و پس از آن، روش مذکور از طریق ایجاد یک المان با ناپیوستگی قوی برای کرنش‌های کوچک،^[۱۵،۱۶] برای کرنش‌های خمیری محدود،^[۱۷] گسترش یافت؛ که بنا به گزارش‌ها، به کاهش حساسیت نسبت به شبکه‌ی اجزاء محدود در حل عددی مسائل محلی شدن کرنش منجر شد. همچنین در برخی دیگر از مطالعات، تغییر ناپیوستگی ضعیف به قوی با استفاده از المان‌های دارای ناپیوستگی برای کرنش‌های کوچک،^[۱۸،۱۹] و برای کرنش خمیری،^[۲۰] ارائه شده است. همچنین مطالعات بیشتری از مدل‌سازی‌های اجزاء محدود ناپیوستگی قوی با استفاده از تحلیل دوشاخه‌ی^۶،^[۲۱-۲۴] انجام شده است.

شروع محلی شدن کرنش در حالت خمیری کلاسیک مستقل از نرخ، به صورت از بین رفتن برقراری معادلات تعادل که در آن مواد پایداری خود را از دست می‌دهند، ظاهر می‌شود که نشان‌دهنده‌ی مدول مماسی منفی است و با پاسخ نرم‌شوندگی مواد مرتبط است.^[۲۵] به محض اینکه محلی شدن کرنش رخ می‌دهد، عرض منطقه‌ی کرنش نرم‌شوندگی به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه، اتلاف انرژی در باند از بین می‌رود و حل از نظر فیزیکی بی‌معنی خواهد بود. از سوی دیگر، از آنجا که کاربرد ناپیوستگی قوی شبیه به صرف نظر کردن از ناحیه‌ی محلی شدن کرنش است، ترکش‌های^۷ چسبندگی در سطح مشترک ناپیوستگی اعمال می‌شود. تحلیل‌های محلی شدن کرنش در جامداتی که در جابه‌جایی پرش دارند، در مراجع مختلف با عنوان کرنش نرم‌شوندگی^۸ قابل مشاهده است.^[۲۶-۲۸] همچنین اخیراً کاربرد اجزاء محدود توسعه‌یافته برای مدل‌سازی باند برشی انجام شده،^[۲۹،۳۰] و نیز باند برشی در قالب ناپیوستگی قوی به روش اجزاء محدود توسعه‌یافته مدل‌سازی شده است.^[۳۱] اصول کلی کار عبارت از افزودن نرم ناپیوستگی به تابع چندجمله‌ی المان‌هایی است که در آن‌ها ناپیوستگی رخ می‌دهد. از طرف دیگر، به جهت اینکه در بیشتر موارد ضخامت باند برشی در مقایسه با ابعاد مدل بسیار کوچک است، استفاده از المان‌های با ضخامت صفر قابل توجیه است؛ بنابراین مدل‌سازی محلی شدن کرنش در یک ناحیه‌ی بسیار باریک با استفاده از المان‌های با ضخامت صفر امکان‌پذیر است. در برخی پژوهش‌ها،^[۳۲-۳۵] نیز از المان‌های با ضخامت صفر در مدل‌سازی رشد ترک استفاده شده است.

در پژوهش حاضر، برای اولین بار با استفاده از المان‌های با ضخامت صفر به مدل‌سازی باند برشی پرداخته شده است؛ که در آن باند برشی با استفاده از تحلیل دوشاخه‌ی مکان‌یابی شده و مدل‌سازی رفتار آن با استفاده از المان‌های با ضخامت صفر صورت گرفته است. در بخش ۲، فرمول‌بندی مربوط به تحلیل دوشاخه‌ی و در نتیجه، یافتن مسیر و جهت باند برشی نشان داده شده است. در بخش ۳، المان‌های با ضخامت صفر استفاده شده در امتداد باند برشی توضیح داده شده‌اند. در بخش ۴، دو مثال عددی با استفاده از فرمول‌بندی بخش ۳ حل و نتایج آن نمایش داده شده است. در نهایت، نکات نتیجه‌گیری شده در بخش ۵ بیان شده است.

۲. فرمول‌بندی حل اجزاء محدود یافتن مسیر ناپیوستگی با استفاده از تحلیل دوشاخه‌ی

در بخش حاضر، برخی جنبه‌های تئوری محلی شدن کرنش در تغییرشکل‌های غیرکشسان بررسی شده که توسط برخی پژوهشگران،^[۳۶،۳۷] گسترش یافته است.

برای سادگی، تغییرشکل‌ها کوچک و رفتار غیروابسته به نرخ است. یک جسم جامد همگن به صورت تغییرشکل یافته تحت نمو شبه‌استاتیکی تغییرمکان در نظر گرفته می‌شود. u میدان جابه‌جایی در جسم جامد است. از آنجا که میدان جابه‌جایی بعد از شروع محلی شدن کرنش پیوسته باقی می‌ماند، گرادان جابه‌جایی، یک پرش در مقطع ناپیوستگی دارد (رابطه‌ی ۱):

$$[[u_{i,j}]] \equiv u_{i,j}^+ - u_{i,j}^- \neq 0 \quad (1)$$

که در آن، بالانویس‌های + و - به ترتیب جهت مثبت و منفی ناپیوستگی را نشان می‌دهند و علامت [[...]] نشان‌دهنده‌ی وجود رابطه‌ی مذکور در قسمت ناپیوستگی است. براساس شرط سازگاری ماکسول ضروری است که برای تعدادی از بردارهای g میزان پرش (رابطه‌ی ۱) به صورت رابطه‌ی ۲ باشد:

$$[[u_{i,j}]] = g_i n_j \quad (2)$$

که در آن، g ضریب تناسب برداری و n بردار یکه‌ی عمود بر ناپیوستگی است. همچنین m بردار یکه در امتداد g به صورت رابطه‌ی ۳ تعریف می‌شود:

$$m_i \equiv g_i / g, \quad g \equiv |g_i| \quad (3)$$

جفت بردارهای m و n ، ماهیت ناپیوستگی را کاملاً مشخص می‌کنند. کرنش مربوط به پرش مورد نظر به صورت رابطه‌ی ۴ است:

$$[[\varepsilon_{ij}]] = \frac{1}{\nu} (g_i n_j + g_j n_i) \quad (4)$$

در اینجا دو حالت مرزی قابل توجه است:

الف) m و n بر هم عمود هستند: تغییرشکل در باند به صورت برش ساده است و باند برشی تشکیل می‌شود.

ب) m و n موازی هستند: در باند، کشش عمود بر صفحه‌ی ناپیوستگی وجود دارد و حالت گسیختگی بازشونده تشکیل می‌شود.

علاوه بر دو حالت اخیر، حالت‌هایی نیز وجود دارد که زاویه‌ی بین m و n بین 0° تا 90° درجه است که حالت ترکیبی نام دارد. برای بررسی شرایطی که در آن محلی شدن کرنش اتفاق می‌افتد، جسم جامدی که در شروع محلی شدن کرنش قرار دارد، در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، تنش σ و کرنش ε در کل جسم پیوسته هستند، از طرفی نرخ تنش $\dot{\sigma}$ و نرخ کرنش $\dot{\varepsilon}$ در صفحه‌ی که امتداد آن مشخص خواهد شد، ناپیوستگی دارند. با فرض رفتار مصالح غیروابسته به زمان، رابطه‌ی نمودی تنش - کرنش به صورت رابطه‌ی ۵ است:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (5)$$

که در آن، D تانسور سختی مماسی است. وجود پرش در رابطه‌ی ۵، رابطه‌ی ۶ را نتیجه می‌دهد:

$$[[\dot{\sigma}_{ij}]] = D_{ijkl} [[\dot{\varepsilon}_{kl}]] \quad (6)$$

برقراری تعادل در صفحه‌ی ناپیوستگی، نیازمند پیوسته بودن ترکش است و میزان پرش آن باید برابر صفر باشد (رابطه‌ی ۷):

$$[[\dot{t}_j]] = [[n_i \dot{\sigma}_{ij}]] = n_i [[\dot{\sigma}_{ij}]] = 0 \quad (7)$$

ترکیب دو رابطه‌ی ۶ و ۷، رابطه‌ی ۸ را نتیجه می‌دهد:

$$n_i D_{ijkl} [\dot{\epsilon}_{kl}] = 0 \quad (8)$$

در نهایت ترکیب دو رابطه‌ی ۴ و ۸، منجر به تشکیل رابطه‌ی ۹ می‌شود:

$$A_{jk}(n)m_k = (n_i D_{ijkl} n_l) m_k = 0 \quad (9)$$

که در آن، $A_{jk}(n)$ ماتریس محلی شدن کرنش است. برای ایجاد حالت محلی شدن کرنش، لازم است این شرط توسط m و n ارضاء شود. بنابراین محلی شدن کرنش در راستای n نیازمند آن است که ماتریس محلی شدن کرنش $A_{jk}(n)$ دست‌کم یک مقدار ویژه‌ی صفر داشته باشد (رابطه‌ی ۱۰):

$$f(n) \equiv \det(A_{jk}(n)) = 0 \quad (10)$$

اگر بردار n که در شرط ۱۰ صدق می‌کند، محاسبه شود، با استفاده از رابطه‌ی ۹، بردار m مرتبط با آن که در شرط حالت محلی شدن کرنش صدق می‌کند، به دست می‌آید. در حالت دوبعدی، ماتریس $A_{jk}(n)$ به صورت 2×2 است (رابطه‌ی ۱۱):

$$\begin{aligned} \det(A_{jk}(n)) &= a_0 n_1^2 + a_1 n_1 n_2 + a_2 n_2^2 \\ &+ a_3 n_1 n_2 + a_4 n_2^2 \\ &= A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن، درایه‌های ماتریس محلی شدن کرنش به صورت روابط ۱۲ است:

$$\begin{aligned} A_{11} &= n_1 D_{1111} n_1 + n_1 D_{1112} n_2 \\ &+ n_2 D_{2111} n_1 + n_2 D_{2112} n_2 \\ A_{12} &= n_1 D_{1121} n_1 + n_1 D_{1122} n_2 \\ &+ n_2 D_{2121} n_1 + n_2 D_{2122} n_2 \\ A_{21} &= n_1 D_{1211} n_1 + n_1 D_{1212} n_2 \\ &+ n_2 D_{2211} n_1 + n_2 D_{2212} n_2 \\ A_{22} &= n_1 D_{1221} n_1 + n_1 D_{1222} n_2 \\ &+ n_2 D_{2221} n_1 + n_2 D_{2222} n_2 \end{aligned} \quad (12)$$

و ضرایب a_0 تا a_4 به صورت روابط ۱۳ تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} a_0 &= D_{1111} D_{1212} - D_{1112} D_{2111} \\ a_1 &= D_{1111} D_{1222} + D_{1112} D_{2211} \\ &- D_{1112} D_{2211} - D_{1122} D_{2111} \\ a_2 &= D_{1111} D_{2222} + D_{1112} D_{1222} + D_{1211} D_{2212} \\ &- D_{1122} D_{1212} - D_{1122} D_{2211} - D_{1212} D_{2211} \\ a_3 &= D_{1112} D_{2222} + D_{1211} D_{2222} \\ &- D_{1122} D_{2212} - D_{1222} D_{2111} \\ a_4 &= D_{1212} D_{2222} - D_{2212} D_{1222} \end{aligned} \quad (13)$$

با قرار دادن $n_2 = \sin \theta$ و $n_1 = \cos \theta$ در رابطه‌ی ۱۱، شرط محلی شدن کرنش به صورت رابطه‌ی ۱۴ در می‌آید:

$$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (14)$$

که در آن، $x = \tan \theta$ است.

چندجمله‌یی $f(x)$ قبل از شروع محلی شدن کرنش در همه جا مثبت است. بنابراین شروع محلی شدن کرنش با یک بررسی ساده یعنی تعیین علامت کمینه‌ی مقدار $f(x)$ مشخص می‌شود؛ این اتفاق در ریشه‌های چندجمله‌یی درجه سه $f'(x)$ که در فرم بسته فرمول‌بندی کاردن^[۲۷] قابل محاسبه است، واقع می‌شود. تا زمانی که کمینه‌ی مقدار تابع $f(x)$ مثبت باقی بماند، محلی شدن کرنش آغاز نمی‌شود و با گذر یک کمینه‌ی $f(x)$ از محور x آغاز می‌شود. با داشتن بردار n و با استفاده از رابطه‌ی ۹، رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

که از آن رابطه‌ی ۱۶ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} A_{11} m_1 + A_{12} m_2 = 0 \\ A_{21} m_1 + A_{22} m_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

در نهایت بردار m به صورت رابطه‌ی ۱۷ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} m_1 &= \pm \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2}} \\ m_2 &= \pm \frac{A_{11}}{\sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین با استفاده از علامت تابع $f(x)$ که منفی شدن آن شروع محلی شدن کرنش را نشان می‌دهد و دو بردار m و n که در حالت وجود باند برشی به ترتیب جهت عمود بر ناپیوستگی و جهت ناپیوستگی را نشان می‌دهند، مکان و جهت ناپیوستگی کاملاً مشخص می‌شود.

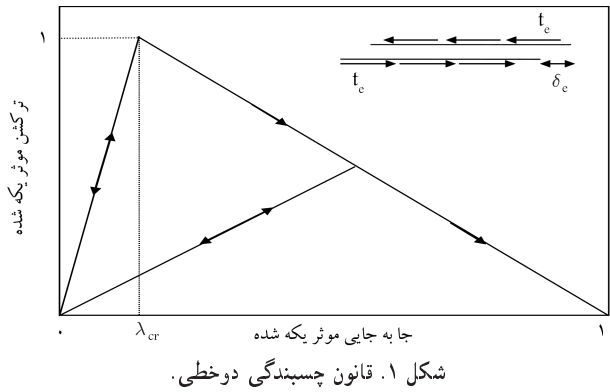
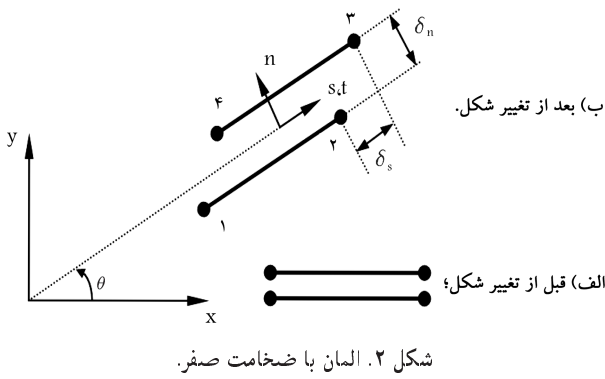
۳. روابط المان با ضخامت صفر برای مدل‌سازی ناپیوستگی

برخی پژوهشگران^[۲۷]، (۲۰۰۶)، با استفاده از معادله‌ی جدانشدگی - نیروی چسبندگی خطی که برای اولین بار در سال ۲۰۰۳^[۲۸] بیان شد، ناحیه‌ی چسبندگی را مدل‌سازی کردند. این مدل‌سازی با در نظر گرفتن حالت ترکیبی با فرمول‌بندی مؤثر، که برای اولین بار در سال ۱۹۹۹ ارائه شده است^[۲۹]، انجام شد. در روش مذکور، ترکشن مؤثر و جابه‌جایی مؤثر بین دو وجه المان ترک به دو جزء عمودی و مماسی تجزیه می‌شود: (رابطه‌ی ۱۸)

$$\begin{aligned} t_e &= \sqrt{t_n^2 + t_s^2} \\ \delta_e &= \sqrt{\delta_n^2 + \delta_s^2} \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن، t_e ترکشن مؤثر، t_n ترکشن عمودی، t_s ترکشن برشی، δ_e جابه‌جایی مؤثر، δ_n بازشدگی عمودی و δ_s جابه‌جایی برشی را نشان می‌دهند. جابه‌جایی مؤثر بدون بعد λ_e به صورت رابطه‌ی ۱۹ تعریف می‌شود که در آن δ_c مقدار جابه‌جایی بحرانی متناظر با بازشدگی کامل و صفر شدن نیروهای چسبندگی است:

$$\lambda_e = \sqrt{(\delta_n / \delta_c)^2 + (\delta_s / \delta_c)^2} \quad (19)$$



به‌منظور پیاده کردن مفاهیم پایه‌ی مدل رفتاری در چهارچوب اجزاء محدود، یک سری المان با ضخامت صفر و داشتن ۲ سطح بین المان‌های اصلی مدل‌سازی شده‌اند که نقاط سطوح کاملاً بر هم منطبق هستند. شکل ۲، یک المان با ضخامت صفر را قبل و بعد از تغییر شکل نشان می‌دهد.

برای هر نقطه در المان با ضخامت صفر، جابه‌جایی‌های نسبی به صورت $\mathbf{u} = \{u_s, u_n\}^T$ و $\boldsymbol{\delta} = \{\delta_s, \delta_n\}^T$ بیان می‌شود، که در آن $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{top} - \mathbf{u}_{bot}$ است و \mathbf{u}_{bot} و \mathbf{u}_{top} معرف جابه‌جایی‌های سطح بالا و پایین المان در جهات محلی (n, s) هستند. جابه‌جایی‌های نسبی در هر نقطه از المان با استفاده از رابطه‌ی ۲۴ به جابه‌جایی‌ها مرتبط می‌شود:

$$\boldsymbol{\delta} = \{-(\mathbf{N}_f)_{bot} \quad (\mathbf{N}_f)_{top}\} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{bot} \\ \bar{\mathbf{u}}_{top} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_f \bar{\mathbf{u}} \quad (24)$$

که در آن، $\bar{\mathbf{u}}^I = \{u_s^I, u_n^I\}^T$ است و u_s^I و u_n^I جابه‌جایی‌های گره‌ی در مختصات (n, s) هستند. توابع شکل المان با ضخامت صفر است و به صورت $(\mathbf{N}_f)_{bot} = \{\mathbf{N}_{f1}, \mathbf{N}_{f2}\}$ و $(\mathbf{N}_f)_{top} = \{\mathbf{N}_{f3}, \mathbf{N}_{f4}\}$ تعریف می‌شود. میدان جابه‌جایی محلی توسط ماتریس دوران محوره‌های مختصات \mathbf{R} و براساس جابه‌جایی‌های سیستم در مختصات عمومی مطابق رابطه‌ی ۲۵ بیان می‌شود:

$$\bar{\mathbf{u}}_{local}^I = \begin{Bmatrix} u_s^I \\ u_n^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^I \\ v^I \end{Bmatrix} = \mathbf{R}^I \bar{\mathbf{u}}_{global}^I \quad (25)$$

که در آن، u^I و v^I جابه‌جایی‌های گره‌ی در مختصات عمومی هستند و θ استفاده از رابطه‌ی $\theta = \arctan(\frac{\delta_y}{\delta_x} / \frac{\delta_x}{\delta_y})$ محاسبه می‌شود.

کرنش‌های برشی و عمودی $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\gamma, \varepsilon_n\}$ از جابه‌جایی‌های نسبی به صورت $\varepsilon_n = \frac{1}{w} \delta_n$ و $\gamma = \frac{1}{w} \delta_s$ به دست می‌آیند که در آن‌ها w عرض المان با ضخامت صفر است. بنابراین بردار کرنش را می‌توان از رابطه‌ی $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_f \bar{\mathbf{u}}$ به دست آورد که در آن \mathbf{B}_f برابر با $\frac{1}{w} \mathbf{N}_f \mathbf{R}$ است. با تعیین ماتریس \mathbf{B}_f ، می‌توان ماتریس سختی مربوط به هر المان با ضخامت صفر را با انتگرال‌گیری در دامنه‌ی آن المان تعیین کرد. برای آنکه انتگرال‌گیری در کل المان‌ها روی یک حوزه‌ی ثابت انجام شود، از سیستم مختصات طبیعی ξ و η در بازه‌ی $[-1, 1]$ استفاده می‌شود. به این ترتیب ماتریس سختی یک المان با ضخامت صفر دلخواه در حالت کلی به صورت رابطه‌ی ۲۶ است:

$$\mathbf{K}_f = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2} w d\xi \quad (26)$$

که در آن، $\mathbf{D}_f = w \mathbf{C}_f$ است و \mathbf{C}_f با استفاده از روابط ۲۱ الی ۲۳ تعیین می‌شود.

شکل ۱، قانون چسبندگی دوخطی را نشان می‌دهد. ناحیه‌ی قبل از رأس نمودار، قسمت کشسان قانون چسبندگی و قسمت بعد از رأس نمودار، نرم‌شوندگی را نشان می‌دهد.

با توجه به اینکه تنش‌های قائم در وجوه باند برشی، فشاری هستند و تحت اثر تنش‌های فشاری، امکان بازشدگی وجود ندارد؛ با فرض اینکه ترکشن عمودی فشاری باشد $(t_n(\theta, \delta_n = 0) = 0)$ ترکشن برشی ناشی از چسبندگی با استفاده از رابطه‌ی ۲۰ به دست می‌آید:^[۳۰]

$$t_{sC} = \frac{\tau_c}{\lambda_{cr}} \left(\frac{\delta_s}{\delta_c} \right), \lambda_e < \lambda_{cr}$$

$$t_{sC} = \frac{\tau_c}{\lambda_e} \frac{1 - \lambda_e}{1 - \lambda_{cr}} \left(\frac{\delta_s}{\delta_c} \right), \lambda_e > \lambda_{cr} \quad (\text{بارگذاری})$$

$$t_{sC} = \frac{\tau_c}{\lambda_e} \frac{1 - \lambda_{e1}}{1 - \lambda_{cr}} \left(\frac{\delta_s}{\delta_c} \right), \lambda_e > \lambda_{cr} \quad (\text{باربرداری}) \quad (20)$$

که در آن، τ_c مشخصه برشی ماده است و جابه‌جایی مؤثر بدون بعد آن به صورت $\lambda_e = |\delta_s / \delta_c|$ تعریف می‌شود. به‌منظور ایجاد ماتریس مدول سختی المان‌های با ضخامت صفر \mathbf{C}_f ، کافی است از ترکشن‌ها نسبت به جابه‌جایی‌های عمودی و برشی مشتق گرفته شود. بنابراین اگر λ_e کوچک‌تر از λ_{cr} باشد، رابطه‌ی ۲۱ به دست می‌آید:

$$\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sn} \\ C_{ns} & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{sC}}{\partial \delta_s} & \frac{\partial t_{sC}}{\partial \delta_n} \\ \frac{\partial t_n}{\partial \delta_s} & \frac{\partial t_n}{\partial \delta_n} \end{bmatrix}$$

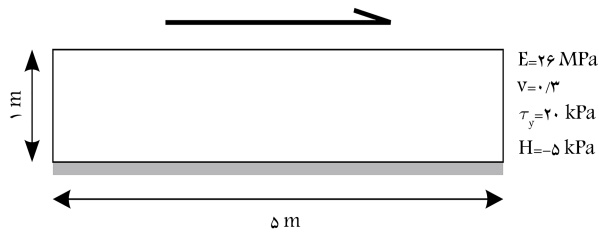
$$= \begin{bmatrix} \frac{\tau_c}{\lambda_{cr} \delta_c} & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

که در آن، k_n ضریب پنازتی عمودی است. اگر λ_e بزرگ‌تر از λ_{cr} باشد، در حالت بارگذاری، مؤلفه‌های ماتریس \mathbf{C}_f به صورت رابطه‌ی ۲۲ است:

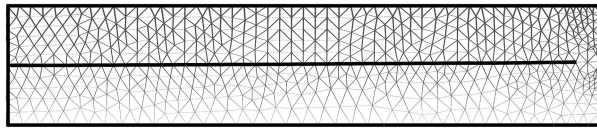
$$\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} -\frac{\delta_c \tau_c}{1 - \lambda_{cr}} \left(\frac{\delta_s}{\lambda_c \delta_c^2} \right)^2 + & 0 \\ (1 - \lambda_e) \frac{\delta_c \tau_c}{1 - \lambda_{cr}} \left(\frac{1}{\lambda_c \delta_c^2} - \frac{1}{\lambda_e^2 \delta_c^2} \right) & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

و در حالت باربرداری، مؤلفه‌های ماتریس \mathbf{C}_f به صورت رابطه‌ی ۲۳ است:

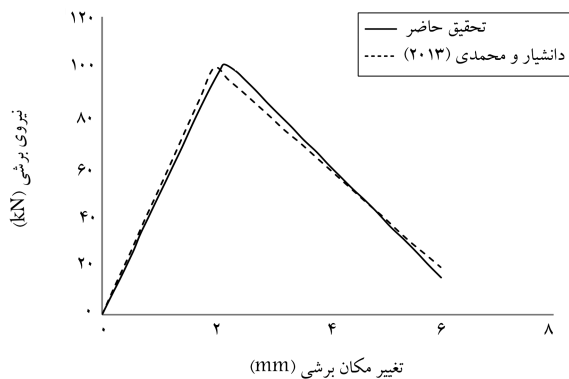
$$\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} \frac{\tau_c}{\delta_c} \left(\frac{1 - \lambda_{e1}}{1 - \lambda_{cr}} \right) \frac{1}{\lambda_{e1}} & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (23)$$



شکل ۴. مسئله‌ی برش ساده، هندسه و شرایط مرزی.



شکل ۵. مسیر گسترش باند برشی و مکان قرارگیری المان‌های با ضخامت صفر.



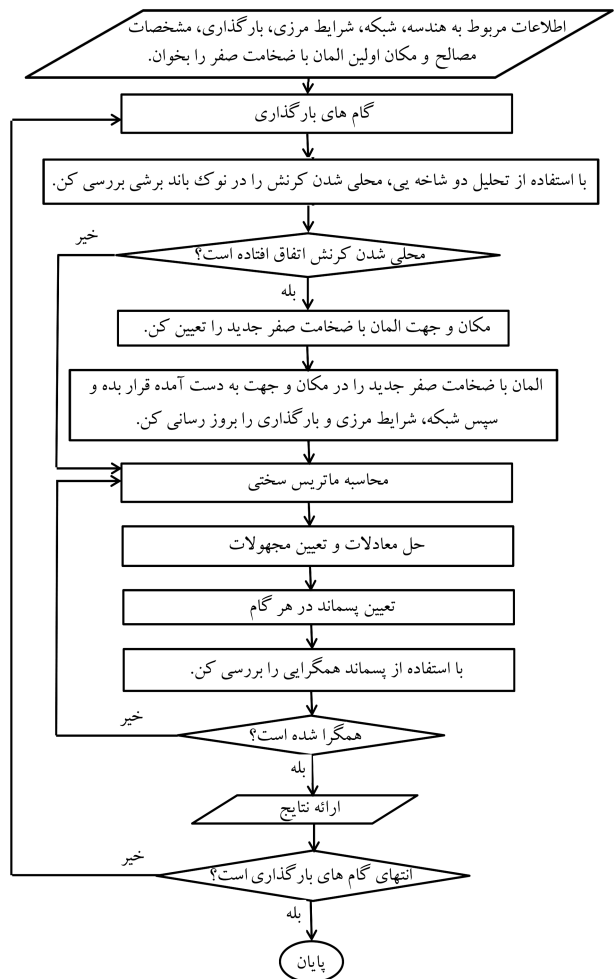
شکل ۶. نمودار نیروی برشی - جابه‌جایی برشی.

(شکل ۴). شرایط کرنش صفحه‌یی و مدل کشسان‌خمیری با مشخصات مصالح مدول یانگ ۲۶MPa، ضریب پواسون ۰٫۳، تنش تسلیم برشی ۲۰kPa و شیب خطی سخت‌شوندگی ۵kPa- است.

همچنین در مدل‌سازی، از شبکه‌ی اجزاء محدود با اجزاء مثلثی ۳- گره‌یی استفاده شده است. شکل ۵، مسیر گسترش باند برشی را نشان می‌دهد که مسیر باند برشی محل قرارگیری المان‌های با ضخامت صفر نیز است. همچنین در شکل ۶، نمودار نیروی برشی - جابه‌جایی برشی رسم شده است که با نتایج گزارش شده در منابع ذکر شده مطابقت دارد.^[۲۹]

۲.۴. مسئله‌ی گسیختگی شیب

مسئله‌ی کنونی، اولین بار برای مدل‌سازی گسیختگی مواد،^[۲۲] و سپس برای مدل حالت خمیری J۲، توسط برخی پژوهشگران،^[۴۰،۲۴] و پس از آن در سال ۲۰۱۳،^[۲۹] بررسی شده است. در مثال حاضر، یک جابه‌جایی به سمت پایین در وسط بلوک صلب، که در بالای شیب قرار دارد، اعمال شده است (شکل ۷). شرایط کرنش صفحه‌یی و مدل کشسان‌خمیری با مشخصات مصالح مدول یانگ ۱۰MPa، ضریب پواسون ۰٫۴، تنش تسلیم ۱۰۰kPa و شیب خطی سخت‌شوندگی ۰٫۱MPa- است. همچنین شبکه‌ی اجزاء محدود با اجزاء مثلثی ۳- گره‌یی استفاده شده است. بلوک صلب، به‌صورت کشسان و مدول یانگ آن، ۱۰۰۰ برابر بیشتر از مدول یانگ شیب در نظر گرفته شده است. به دلیل غیریکنواختی دامنه‌ی تنش، محلی شدن کرنش از المان مجاور گوشه‌ی سمت راست بلوک صلب شروع می‌شود. شکل



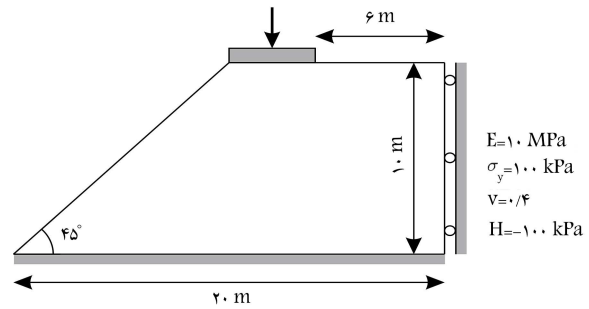
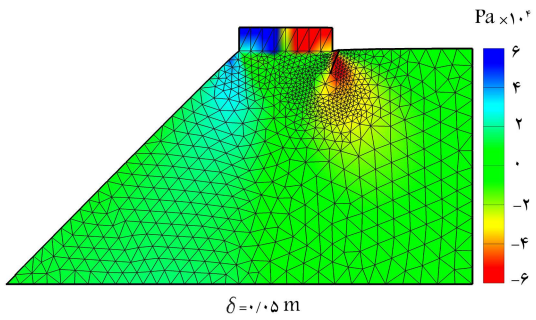
شکل ۳. فلوجارت فرایند مدل‌سازی گسترش باند برشی.

بنابراین به منظور مدل‌سازی باند برشی، ابتدا یک تحلیل دوشاخه‌یی در تمام المان‌های مسئله انجام می‌شود، تا اولین المانی که دچار محلی شدن کرنش شده است، مشخص شود. سپس با استفاده از دو بردار m و n که در حالت وجود باند برشی به ترتیب جهت عمود بر ناپیوستگی و جهت ناپیوستگی را نشان می‌دهند، مکان و راستای قرارگیری اولین المان با ضخامت صفر تعیین می‌شود و اولین المان با ضخامت صفر در راستای ناپیوستگی قرار داده می‌شود و شبکه‌ی اجزاء محدود جدید ایجاد و شرایط مرزی و بارگذاری در شبکه‌ی اجزاء محدود جدید برقرار می‌شود. مجدداً تحلیل دوشاخه‌یی در نوک باند برشی انجام و روند مذکور تکرار می‌شود، تا باند برشی به طور کامل تشکیل شود. در شکل ۳، فلوجارتی از فرایند مدل‌سازی گسترش باند برشی، پس از قرار دادن اولین المان با ضخامت صفر در مکانی که برای اولین بار در آن محلی شدن کرنش رخ داده است، ارائه شده است.

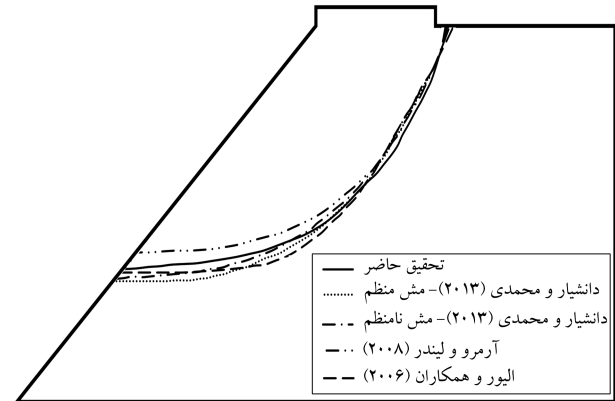
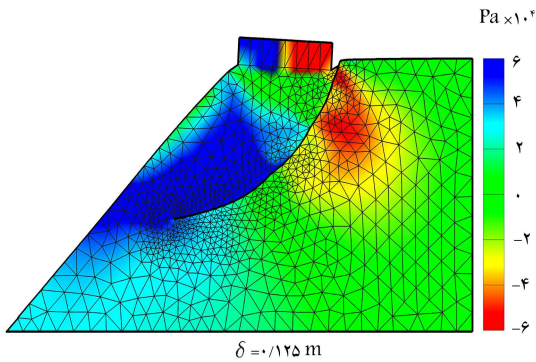
۴. مثال عددی

۱.۴. مسئله‌ی برش ساده

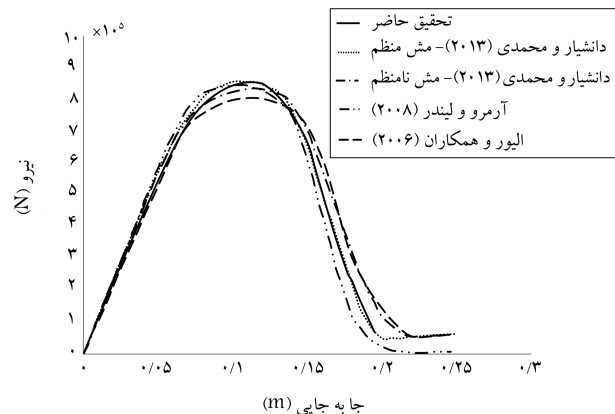
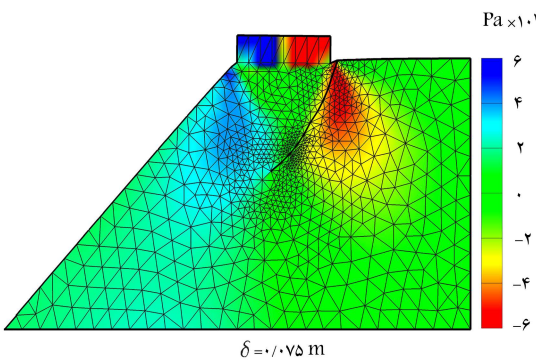
در بخش حاضر، یک مسئله‌ی برش ساده، که قبلاً توسط برخی پژوهشگران مطالعه شده است،^[۲۹] مورد نظر است. مسئله، یک جامد مستطیل‌شکل است که قسمت پایین آن مفید و قسمت بالای آن تحت تغییرمکان برشی یکنواخت است



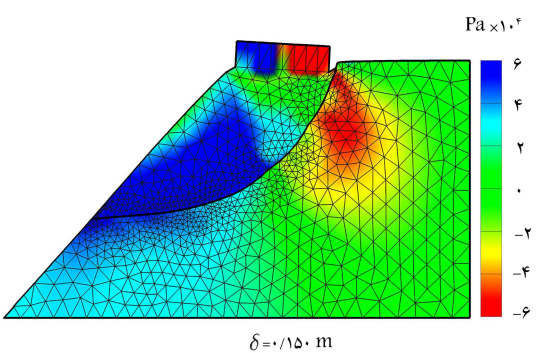
شکل ۷. مسئله‌ی گسیختگی شیب، هندسه و شرایط مرزی.



شکل ۸. مقایسه‌ی مسیر باند برشی.



شکل ۹. نمودار نیرو - جابه‌جایی.



شکل ۱۰. توزیع تنش τ_{xy} در مراحل مختلف گسترش باند برشی.

۸، الگوی نهایی باند برشی و مقایسه‌ی آن با منابع را تحت جابه‌جایی 0.25 m در وسط بلوک صلب، نشان می‌دهد. نمودار نیرو - جابه‌جایی در شکل ۹، و کاتوره‌های تنش τ_{xy} در مراحل مختلف گسترش باند برشی در شکل ۱۰ نشان داده شده‌اند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج حل عددی با نتایج گزارش شده در منابع مطابقت دارد. از طرفی، مزیت روش ذکر شده نسبت به دیگر روش‌های استفاده شده در برخی پژوهش‌ها،^{[۲۹]، [۲۱]} در سادگی نسبت به آن‌هاست و همچنین روش جدید قابلیت پیاده‌سازی^{۱۰} در داخل نرم‌افزارهای تجاری را دارد. در ضمن روش ارائه شده به دلیل استفاده از المان‌های با ضخامت صفر در مسیر باند برشی، قابلیت مدل‌سازی تغییرشکل‌های برشی بزرگ را دارد، که سایر روش‌های موجود به دلیل منفی شدن زاویه المان‌های معمولی، که در آن‌ها تغییرشکل زیاد رخ می‌دهد، از مدل‌سازی آن ناتوان هستند. لازم به ذکر است برای اینکه حل به اندازه‌ی المان وابسته نباشد، کافی است ناحیه‌ی که در آن المان‌های با ضخامت صفر تغییرشکل می‌دهند، تا جایی که میزان تنش در آن‌ها به صفر برسد (ناحیه‌ی فرایند^{۱۱})، به دست کم ۵ المان تقسیم شود تا تغییرات تنش در المان‌های با ضخامت صفر به خوبی قابل مدل‌سازی باشد. در پژوهشی در این زمینه (۱۱، ۲۰^[۲۳])، به بررسی اثر اندازه‌ی المان‌های با ضخامت صفر در ترک‌های مختلف و با موده‌های مختلف پرداخته شده و نتایج آن نشان داده است در زمانی که شبکه‌ی المان‌بندی در ناحیه‌ی مذکور به اندازه‌ی کافی ریز باشد،

ناتوان هستند. لازم به ذکر است برای اینکه حل به اندازه‌ی المان وابسته نباشد، کافی است ناحیه‌ی که در آن المان‌های با ضخامت صفر تغییرشکل می‌دهند، تا جایی که میزان تنش در آن‌ها به صفر برسد (ناحیه‌ی فرایند^{۱۱})، به دست کم ۵ المان تقسیم شود تا تغییرات تنش در المان‌های با ضخامت صفر به خوبی قابل مدل‌سازی باشد. در پژوهشی در این زمینه (۱۱، ۲۰^[۲۳])، به بررسی اثر اندازه‌ی المان‌های با ضخامت صفر در ترک‌های مختلف و با موده‌های مختلف پرداخته شده و نتایج آن نشان داده است در زمانی که شبکه‌ی المان‌بندی در ناحیه‌ی مذکور به اندازه‌ی کافی ریز باشد،

موجود شود. در روش جدید، به منظور یافتن مسیر ناپیوستگی، از تحلیل دوشاخه‌یی و برای مدل‌سازی ناپیوستگی، از المان‌های با ضخامت صفر استفاده شده است. روش جدید در حل دو مثال عددی استفاده شد که نتایج آن شامل مسیرگسترش باند برشی و نمودار نیرو - جابه‌جایی، نشان‌دهنده‌ی مطابقت خوبی با منابع موجود و توانایی روش در مدل‌سازی باند برشی است. همچنین روش ارائه شده با استفاده از المان‌های با ضخامت صفر، قابلیت مدل‌سازی تغییرشکل‌های برشی بزرگ را دارد که المان‌های معمولی مورد استفاده در روش‌های موجود قابلیت ذکر شده را ندارند.

نتایج حل مستقل از اندازه‌ی المان‌ها خواهد بود. نتایج مثال‌های حل شده در پژوهش حاضر نیز به همین دلیل، مستقل از اندازه‌ی شبکه‌ی المان‌بندی آن‌هاست.

۵. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، یک روش جدید برای مدل‌سازی باند برشی ارائه شده است که به دلیل سادگی و قابلیت پیاده‌سازی در داخل نرم‌افزارها می‌تواند جایگزین روش‌های

پانویس‌ها

1. bifurcation analysis
2. Strain Localization
3. nonlocal
4. adaptivity
5. cosserat
6. bifurcation analysis
7. traction
8. strain-softening
9. Cardan's formulae
10. implementation
11. process zone

منابع (References)

1. Jirasek, M. "objective modeling of strain localization", *Revue Francaise de Genie Civil*, **6**(6), pp. 1119-1132 (2002).
2. Lai, T.Y., Borja, R.I., Duvernay, B.G. and et al. "Capturing strain localization behind a geosynthetic-reinforced soil wall", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **27**(5), pp. 425-451 (2003).
3. Khoei, A., Tabarraie, A. and Gharehbaghi, S. "H-adaptive mesh refinement for shear band localization in elasto-plasticity Cosserat continuum", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **10**(3), pp. 253-286 (2005).
4. Khoei, A., Gharehbaghi, S., Tabarraie, A. and et al. "Error estimation, adaptivity and data transfer in enriched plasticity continua to analysis of shear band localization", *Applied Mathematical Modelling*, **31**(6), pp. 983-1000 (2007).
5. Belytschko, T., Fish, J. and Engelmann, B. "A finite element with embedded localization zones", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **70**(1), pp. 59-89 (1988).
6. De Borst, R., Sluys, L.J., Muhlhaus, H.B. and et al. "Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation", *Engineering Computations*, **10**(2), pp. 99-121 (1993).
7. Muhlhaus, H.B. and Aifantis, E. "A variational principle for gradient plasticity", *International Journal of Solids and Structures*, **28**(7), pp. 845-857 (1991).
8. Lewis, R.W. and Khoei, A.R. "Numerical analysis of strain localization in metal powder forming processes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **52**(5-6), pp. 489-501 (2001).
9. Khoei, A.R. and Lewis, R.W. "H-adaptive finite element analysis for localization phenomena with reference to metal powder forming", *Finite Elements in Analysis and Design*, **38**(6), pp. 503-519 (2002).
10. Fleck, N.A. and Hutchinson, J.W. "A phenomenological theory of strain gradient plasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **41**(12), pp. 1825-1857 (1993).
11. De Borst, R. and Muhlhaus, H.B. "Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**(3), pp. 521-539 (1992).
12. De Borst, R. "A generalization of J2-flow theory for polar continua", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **103**(3), pp. 347-362 (1993).
13. Tejchman, J. and Wu, W. "Numerical study on patterning of shear bands in Cosserat continuum", *Acta Mechanica*, **99**(1), pp. 61-74 (1993).
14. Simo, J.C., Oliver, J. and Armero, F. "An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids", *Computational Mechanics*, **12**(5), pp. 277-296 (1993).
15. Oliver, J. "Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations- Part 1", *Fundamentals, International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**(21), pp. 3575-3600 (1996).
16. Oliver, J. "Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations- Part 2", *Numerical Simulation, International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**(21), pp. 3601-3623 (1996).
17. Armero, F. and Garikipati, K. "An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids", *International Journal of Solids and Structures*, **33**(20-22), pp. 2863-2885 (1996).

18. Oliver, J., Cervera, M. and Manzoli, O. "Strong discontinuities and continuum plasticity models: The strong discontinuity approach", *International Journal of Plasticity*, **15**(3), pp. 319-351 (1999).
19. Huespe, A.E. and Needleman, A. and Oliver, J. and et al. "A finite thickness band method for ductile fracture analysis", *International Journal of Plasticity*, **25**(12), pp. 2349-2365 (2009).
20. Huespe, A.E., Needleman, A., Oliver, J. and et al. "A finite strain, finite band method for modeling ductile fracture", *International Journal of Plasticity*, **28**(1), pp. 53-69 (2012).
21. Borja, R. "A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on standard galerkin approximation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**(11), pp. 1529-1549 (2000).
22. Regueiro, R. and Borja, R. "Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with strong discontinuity", *International Journal of Solids and Structures*, **38**(21), pp. 3647-3672 (2001).
23. Callari, C. and Armero, F. "Analysis and numerical simulation of strong discontinuities in finite strain poroplasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**(27), pp. 2941-2986 (2004).
24. Armero, F. and Linder, C. "New finite elements with embedded strong discontinuities in the finite deformation range", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**(33-40), pp. 3138-3170 (2008).
25. Baùant, Z.P. and Belytschko, T.B. "Wave propagation in a strain softening bar: exact solution", *Journal of Engineering Mechanics*, **111**(3), pp. 381-389 (1985).
26. Simo, J.C. and Oliver, J. "A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids", In *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, Bazant, Z.P., Bittnar, Z., Jirasek, M. and Mazars, J. Eds., E & FN Spon, London, pp. 25-39 (1994).
27. Ortiz, M., Leroy, Y. and Needleman, A. "A finite element method for localized failure analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **61**(2), pp. 189-214 (1987).
28. Borja, R. and Regueiro, R. "Strain localization in frictional materials exhibiting displacement jumps", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**(20), pp. 2555-2580 (2001).
29. Daneshyar, A. and Mohammadi, S. "Strong tangential discontinuity modeling of shear bands using the extended finite element method", *Computational Mechanics*, **52**(5), pp. 1023-1038 (2013).
30. Bobiński, J. and Tejchman, J. "Simulations of shear zones and cracks in engineering materials using extended finite element method", In *Bifurcation and Degradation of Geomaterials in the New Millennium*, Springer, Cham, pp. 1-6 (2015).
31. Mikaeili, E., Kazemi, M.T. and Mohammadi, S. "XFEM Modeling of Cohesive Crack Propagation in Saturated Porous Media", *International Journal of Computing Communication and Instrumentation Engineering*, **3**, pp. 36-41 (2016).
32. Barani, O.R., Khoei, A.R. and Mofid, M. "Modeling of cohesive crack growth in partially saturated porous media, a study on the permeability of cohesive fracture", *International Journal of Fracture*, **167**(1), pp. 15-31 (2011).
33. Khoei, A.R., Barani, O.R. and Mofid, M. "Modeling of dynamic cohesive fracture propagation in porous saturated media", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **35**(10), pp. 1160-1184 (2011).
34. Barani, O.R. and Khoei, A.R. "3D Modeling of cohesive crack growth in partially saturated porous media; A parametric study", *Engineering Fracture Mechanics*, **124-125**, pp. 272-286 (2014).
35. Barani, O.R., Majidaie, S. and Mosallanejad, M. "Numerical modeling of water pressure in propagating concrete cracks", *Journal of Engineering Mechanics*, **142**(4), pp. 04016011 (2016).
36. Rice, J.R. "The localization of plastic deformation", In *Theoretical and Applied Mechanics*, Koiter, W.T. ed., North Holland, Amsterdam, pp. 207-220 (1976).
37. Song, S., Paulino, G. and Buttlar, W. "A bilinear cohesive zone model tailored for Fracture of asphalt concrete considering viscoelastic bulk material", *Engineering Fracture Mechanics*, **73**(18), pp. 2829-2848 (2006).
38. Espinosa, H. and Zavattieri, P. "A grain level model for the study of failure initiation and evolution in polycrystalline brittle materials. Part I: Theory and numerical implementation", *Mechanics of Materials*, **35**(3), pp. 333-364 (2003).
39. Ortiz, M. and Pandolfi, A. "A class of cohesive elements for the simulation of three-dimensional crack propagation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **44**(5), pp.1267-1282 (1999).
40. Oliver, J., Huespe, A., Blanco, S. and Linero, D. "Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**(52), pp. 7093-7114 (2006).