مهندسی عمران شریف (بهار ۱۴۰۲)
دوره‌ی ۲ - ۳۹، شماره‌ی ۱، ص. ۸۱-۹۱، (پژوهشی)

Original Article

ویژه‌سازی الگوریتم بهینه‌سازی غیرخطی برای تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها

مهرشاد قربانزاده (دانشجوی دکتری)
پیمان همامی* (استادیار)
محسن شهروزی (استادیار)
گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی

روش مرتبه‌ی اول هاسفر لین ـ راکیویتز فیسلر به شکل گسترده‌یی در تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها استفاده شده است. با این حال، مرتبه‌ی بالای غیرخطی بودن تابع حالت حدی می‌تواند به ناپایداری حل مسئله در الگوریتم‌های بهینه‌سازی غیرخطی منجر شود. مطالعه‌ی حاضر قصد دارد تا ویژه‌سازی یک الگوریتم بهینه‌سازی غیرخطی عددی جهت یافتن نقطه‌ی طراحی در فضای استاندارد نرمال و احتمال شکست متناظر با آن را در قالب یک ساختارسازی جدید ارائه کند. روش برنامه‌ریزی توالی کمینه‌ی مربعات برای حل یک مسئله‌ی قابلیت اعتماد سازه‌ها، دارای همگرایی سریع و کارایی بالا در مرحله‌ی خطی‌سازی تابع حالت حدی است. روش مذکور، مسئله‌ی اولیه را با یک مسئله‌ی خطی کمینه‌ی مربعات از طریق گسسته‌سازی‌های پایدار برای ماتریس هسیان جایگزین می‌کند و همواره یک حل پایدار را نتیجه می‌دهد. بعد از دستیابی به پاسخ در مرحله‌ی خطی‌سازی، روش میانگین موردانتظار احتمالاتی با در نظر گرفتن ماتریس هسیان و فضای دوران‌یافته استفاده شده است، تا دقت محاسباتی پاسخ به‌دست آمده را به دقتی نزدیک به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو اصلاح کند.

واژگان کلیدی: قابلیت اعتماد سازه‌ها، احتمال شکست، بهینه‌سازی عددی، احتمال موردانتظار، برنامه‌ریزی توالی کمینه‌ی مربعات.

std_mehrshad.ghorbanzadeh@khu.ac.ir
homami@khu.ac.ir
shahruzi@khu.ac.ir

۱. مقدمه

تعیین احتمال شکست، اصلی‌ترین موضوع در بحث قابلیت اعتماد سازه‌هاست. احتمال شکست با استفاده از حل یک انتگرال چندگانه در فضای متغیر محور به‌دست می‌آید. هزینه‌ی محاسباتی حل انتگرال اخیر قابل توجه است و با افزایش تعداد متغیرهای تصادفی دخیل در مسئله با در نظر گرفتن همبستگی بین متغیرهای تصادفی، امری دشوار و در مواقعی ناممکن می‌شود.[۱] روش‌های شبیه‌سازی مونت‌کارلو و نمونه‌گیری، اهمیت جایگزین‌های معرفی شده‌ی انتگرال‌گیری مستقیم جهت تعیین احتمال شکست هستند.[۲-۷] روش‌های ذکر شده در تحلیل بسیاری از مسائل مهندسی، مورد استقبال قرارگرفته و تلاش‌های متعددی برای توسعه‌ی آن‌ها انجام شده است. به‌عنوان نمونه، می‌توان به مطالعه‌ی راه‌گذر و همکاران (۲۰۲۱)، برای کاهش خسارت ناشی از بارگذاری جانبی لرزه‌یی برای سازه‌های فولادی،[۸] و ترکیب روش مونت‌کارلو با روش رویه‌ی پاسخ برای تحلیل سد بتنی قوسی در مطالعه‌ی پورامنیان و اکرانژاد (۲۰۲۱)، اشاره کرد.[۹]

با اینکه روش‌های مبتنی بر شبیه‌سازی، ساده هستند، اما از دیدگاه صرف زمان محاسباتی با چالش همراه هستند و برای مسائل دارای تابع حالت حدی صریح و یا مسائل دارای احتمال شکست کوچک، ناکارآمد محسوب می‌شوند.[۱۰-۱۳] روش‌های مبتنی بر تکرار، انتخاب دیگری برای محاسبه‌ی احتمال شکست هستند که معمولاً بر حسب لنگرهای آماری متغیرهای تصادفی عمل می‌کنند. روش‌های اخیر، جست‌وجو در فضای استاندارد نرمال را از یک نقطه شروع می‌کنند و بعد از چند تکرار تقریبی از نقطه‌ی طراحی که متناظر با پاسخ مسئله و احتمال شکست است، را نتیجه می‌دهند. در بین روش‌های مبتنی بر تکرار، روش تحلیل مرتبه‌ی اول قابلیت اعتماد (FORM)[۱] شناخته شده و پرکاربردترین روش محسوب می‌شود.[۱۴-۱۷]

تحلیل مرتبه‌ی اول قابلیت اعتماد (FORM)، شامل بسط مرتبه‌ی اول تیلور از رویه‌ی حالت حدی یا یک اَبَر سهمی حول نقطه‌ی طراحی است. این مفهوم

---

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۶/۱۶، اصلاحیه ۱۴۰۱/۸/۹، پذیرش ۱۴۰۱/۸/۱۴.
DOI:10.24200/J30.2022.61036.3138

استناد به این مقاله:
قربانزاده، مهرشاد، همامی، پیمان و شهروزی، محسن (۱۴۰۲). «ویژه‌سازی الگوریتم بهینه‌سازی غیرخطی برای تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها»، مهندسی عمران شریف، (۱) ۲-۳۹، ص. ۸۱-۹۱

نخستین بار توسط هاسفر و لین[۲] (۱۹۷۴)،[۱۸] معرفی شده است. راکیویتز و فیسلر[۳] (۱۹۷۸)،[۱۹] روش هاسفر و لین را بهبود بخشیدند، تا استفاده از متغیرهای دارای توزیع غیرنرمال را پوشش بدهند. و روش معرفی شده توسط آن‌ها با نام HLRF شناخته می‌شود. علی‌رغم عملکرد مناسب روش HLRF در بسیاری از مسائل، بروز ناپایداری در مسائل دارای توابع حالت حدی غیرخطی مشکل‌ساز است. ژانگ و کورگیان[۴] (۱۹۹۵)،[۲۰] و سانتوس[۵] و همکاران (۲۰۱۲)،[۲۱] بعدها روش‌های اصلاح شده‌ی iHLRF و nHLRF را معرفی کردند که با بکارگیری قانون آرمیو، مقادیر مناسبی را برای اندازه‌ی جهت در هر گام به‌دست می‌آوردند، تا پایداری بهتری برای حل مسئله تأمین شود. تعیین اندازه‌ی جهت مذکور با مشاهده‌ی تغییرات به‌وجود آمده بر روی تابع برازندگی یا تابع لاگرانژین حاکم بر مسئله‌ی بهینه‌سازی در هر گام به‌دست می‌آید. این اصلاحات تا حدود زیادی مشکل پایداری نسخه‌ی ابتدایی روش تحلیل مرتبه‌ی اول را اصلاح کرده‌اند، اما تعداد زیاد مراحل محاسباتی در مسائل دارای پیچیدگی شدید و نرخ پایین سرعت همگرایی در روش‌های مذکور باقی مانده است. روش تبدیل پایدار (STM)[۶] روش دیگری برای حل ناپایداری روش HLRF است، که توسط یانگ معرفی شده و براساس تئوری کنترل آشفتگی بوده است. روداک[۷] و همکاران (۲۰۱۸)، نسخه‌ی تطبیقی روش STM را به منظور جلوگیری از تعداد تکرارهای زیاد در روش STM توسعه داده‌اند.[۲۲]

منگ[۸] و همکاران (۲۰۱۷)،[۲۳] توسعه‌ی روش STM را ادامه داده و راهبرد کنترل جهت را به کار گرفته و روش DSTM را معرفی کرده‌اند. روش DSTM ارائه شده است تا ناپایداری روش HLRF را مرتفع سازد و کارایی روش STM را افزایش دهد. روش اندازه‌ی گام محدود (FSL)، تلاش دیگری برای کنترل همگرایی در حل مسئله محسوب می‌شود که توسط گنگ[۹] و همکاران (۲۰۱۱)، توسعه یافته و یک پارامتر جدید برای کنترل اندازه‌ی گام در آن معرفی شده است. روش FSL، مستقل از تابع برازندگی و رابطه‌ی جست‌وجوی خطی است. روش HLRF، نیز یک نمونه از خروجی‌های روش FSL محسوب می‌شود، اگر پارامتر کنترل اندازه‌ی گام در آن به بی‌نهایت میل کند.[۲۴]

کشتگار[۱۰] (۲۰۱۷)، ترکیبی از دو روش FSL و جست‌وجوی جهت مزدوج را استفاده و روش CFSL معرفی کرده است،[۲۵] که پیشرفته‌ترین نسخه‌ی ارائه شده در این شاخه از روش‌های تحلیل مرتبه‌ی اول محسوب می‌شود. تعیین شاخص قابلیت اعتماد می‌تواند به عنوان یک مسئله‌ی بهینه‌سازی تحت قید برابری نیز در نظر گرفته شود، که در این حالت روش‌های بهینه‌سازی غیرخطی عددی، گزینه‌های مناسب برای تعیین پاسخ مسئله محسوب می‌شوند. روش‌های تصویرگرادیان (GP)، روش اگمنت لاگرانژ (ALM) و روش برنامه‌ریزی توالی مربعات (SQP)، روش مرتبه‌ی اول مبتنی بر جست‌وجوی مزدوج با گام‌های تطبیقی،[۲۶] نمونه‌هایی از روش‌های بهینه‌سازی غیرخطی عددی هستند.[۲۷] روش SQP، یک روش شناخته شده مبتنی بر گرادیان در بین روش‌های بهینه‌سازی غیرخطی عددی است که روش‌های زیادی با توجه به آن توسعه یافته‌اند.[۲۸-۳۰] روش برنامه‌ریزی توالی کمینه‌ی مربعات (SLSQP)، یکی از روش‌های توسعه‌یافته‌ی مذکور با نرخ سریع همگرایی از مرتبه‌ی خطی است. قواعد روش SLSQP توسط شیتکوفسکی[۱۱] (۱۹۸۲) ارائه شده،[۳۱] و کرافت[۱۲] (۱۹۸۸)، الگوریتم آن را برای یک بهینه‌سازی در علوم هوافضا به کار گرفته است.[۳۲] در مسائل بهینه‌سازی روش SLSQP، ابتدا بردار جهت با استفاده از برنامه‌ریزی مربعات (QP) تعیین می‌شود. سپس، یک رابطه‌ی جست‌وجوی خطی استفاده می‌شود تا اندازه‌ی جهت اصلاح شود. این امر به سادگی و با استفاده از تابع برازندگی نرم L_1 امکان‌پذیر است. این الگوریتم بهینه‌سازی، مسئله‌ی بهینه‌سازی اولیه را به یک مسئله‌ی بهینه‌سازی یافتن کمترین فاصله که از دامنه‌ی پایین محدود است، تبدیل می‌کند و پاسخ آن را با سرعت بالایی از دیدگاه همگرایی نتیجه می‌دهد.

در نوشتار حاضر، ویژه‌سازی روش SLSQP برای تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها و ترکیب آن با روش میانگین موردانتظار احتمال شکست مدنظر قرار گرفته است تا توسط آن روشی جامع برای حل مسائل قابلیت اعتماد سازه‌ها در دسترس باشد که در کنار نرخ سریع همگرایی با دقت محاسباتی مشابه روش‌های نمونه‌گیری را نتیجه دهد. بدین منظور، علاوه بر روش بهینه‌سازی، روش ساده‌ی میانگین موردانتظار احتمال شکست با درنظر گرفتن ماتریس هسیان به‌دست آمده از بخش بهینه‌سازی که مخصوص روش‌های مبتنی بر تکرار است، نیز استفاده شده است تا با تعداد محدودی نمونه در روش شبیه‌سازی بتوان دقت محاسباتی را به سطح مطلوبی اصلاح کرد. در بخش دوم، روش بهینه‌سازی موردنظر نوشتار حاضر ارائه شده است. در بخش سوم، روش کاهش و کنترل خطای روش بهینه‌سازی بررسی شده است؛ و در بخش چهارم، مثال‌های چالشی به منظور نمایش کارایی روش پیشنهادی و مقایسه بین نتایج حل روش پیشنهادی و روش سایر پژوهشگران ارائه شده است.

۲. ویژه‌سازی برنامه‌ریزی توالی کمینه‌ی مربعات برای تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها

برنامه‌ریزی توالی کمینه‌ی مربعات، جهت یافتن کمترین فاصله بین مرکز مختصات و رویه‌ی حالت حدی در فضای استاندارد نرمال استفاده شده است. در این راستا، مسئله‌ی بهینه‌سازی، شامل تابع هدف و قید برابری مطابق رابطه‌ی ۱ تعریف می‌شود:[۳۰]

$$\begin{cases} \min & f(x) = 0/5\|x\|^2 \\ \text{subject to} & G(x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن، بردار x شامل متغیرهای تصمیم‌گیری بهینه‌سازی در فضای استاندارد نرمال، G تابع حالت حدی، $\|x\|^2$ نرم L_2 بردار پاسخ هستند. در ضمن فرض شده است که تابع هدف f و قید برابری G دارای مشتق مرتبه‌ی دوم پیوسته در نقطه‌ی طراحی هستند. در روش ذکر شده، تبدیل مسئله‌ی عمومی بهینه‌سازی رابطه‌ی ۱ به مسئله‌ی بهینه‌سازی با فرمت SQP، اولین گام محسوب می‌شود؛ که شامل یک تابع هدف مربعی شده و قید خطی‌سازی شده مطابق رابطه‌ی ۲ خواهد بود:

$$\begin{cases} \min & \nabla f(x_k)^T d_k + \frac{1}{2} d^T B_k d_k \\ \text{subject to} & G(x_k) + \nabla G(x_k)^T d_k = 0 \end{cases} \quad (2)$$

که در آن، $\nabla f(x_k)$ و $\nabla G(x_k)$ به ترتیب برابر با بردارهای گرادیان تابع هدف و تابع حالت حدی نسبت به متغیر x، d_k بردار جهت گام و B_k ماتریس هسیان متناظر با تابع لاگرانژین مسئله‌ی بهینه‌سازی رابطه‌ی ۱ است که در رابطه‌ی ۳ ارائه شده است:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T G(x) \quad (3)$$

که در آن، λ ضریب لاگرانژین است. با برابر صفر قرار دادن گرادیان تابع لاگرانژین که در رابطه‌ی ۴ ارائه شده است، معادله‌ی موردنظر برای تعیین ضریب لاگرانژین به‌دست می‌آید:

$$\nabla L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \lambda \nabla G(x) \approx 0 \quad (4)$$

براساس رابطه‌ی ۴، ضریب لاگرانژین با استفاده از روش کمینه‌ی مربعات، مطابق رابطه‌ی ۵، تعیین می‌شود. در صورت معکوس‌پذیر نبودن عبارت داخل براکت در رابطه‌ی ۵، بکارگیری گسسته‌سازی QR و ترکیب آن با روش کمینه‌ی مربعات جهت تعیین ضریب لاگرانژین استفاده می‌شود:

$$\lambda = -\left[\nabla G\left(x_k\right)^T \nabla G\left(x_k\right)\right]^{-۱} \nabla G\left(x_k\right)^T \nabla f\left(x_k\right) \qquad (۵)$$

همچنین علت اصلی نام‌گذاری این روش بهینه‌سازی، استفاده از روش کمینه‌ی مربعات برای تعیین ضریب لاگرانژین است. گام بعدی در روش بهینه‌سازی مذکور، محاسبه‌ی تقریبی ماتریس هسیان با استفاده از روش BFGS به‌صورت رابطه‌ی ۶ است:

$$B_{k+۱} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} \qquad (۶)$$

که در آن، پارامترهای از رابطه‌های ۷ و ۸ تعیین می‌شوند:

$$y_k = \nabla L\left(x_{k+۱}, \lambda\right) - \nabla L\left(x_k, \lambda\right) \qquad (۷)$$

$$s_k = x_{k+۱} - x_k \qquad (۸)$$

در این محاسبات، ماتریس همانی $B_۰$ در اولین گام به‌کار گرفته می‌شود. به این ترتیب رابطه‌ی بهینه‌سازی ۲ به یک مسئله‌ی کمینه‌ی مربعات قابل تبدیل است. به این منظور ابتدا نیاز است تا ماتریس هسیان با گسسته‌سازی LDL^T، مطابق رابطه‌ی ۹ بازنویسی شود:

$$B = LDL^T \qquad (۹)$$

که در آن، L ماتریس پایین‌مثلثی و D یک ماتریس قطری است. حال فرمت مربعی شده‌ی مسئله‌ی بهینه‌سازی رابطه‌ی ۲ به صورت مسئله‌ی بهینه‌سازی رابطه‌ی ۱۰ بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \min & \left|D^{۱/۲} L^T d + D^{-۱/۲} L^{-۱} \nabla f\left(x_k\right)\right|| \\ \text{subject to} & \nabla G\left(x_k\right)^T d + G\left(x_k\right) = ۰ \end{cases} \qquad (۱۰)$$

که در آن، $D^{۱/۲} = diag(\sqrt{\delta_۱}, \cdots, \sqrt{\delta_n})$ طوری تعریف شده است که از مثبت و معین بودن ماتریس هسیان اطمینان حاصل شود و پارامتر δ_i برابر iاُمین عضو از ماتریس قطری D محسوب می‌شود. با تعریف متغیر جدید $F = D^{۱/۲} L^T$ می‌توان رابطه‌ی ۱۰ را به صورت رابطه‌ی ۱۱ بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \min & ||Fd + F^{-T} \nabla f(x_k)|| \\ \text{subject to} & \nabla G(x_k)^T d + G(x_k) = ۰ \end{cases} \qquad (۱۱)$$

که در آن، F یک ماتریس بالا مثلثی است. گام بعدی در بهینه‌سازی موردنظر، کاهش مسئله‌ی بهینه‌سازی رابطه‌ی ۱۱ به مسئله‌ی بهینه‌سازی یافتن کمینه‌ی فاصله است که دارای قید برابری جدیدی نسبت به مسئله‌ی قبلی است و این کار با استفاده از تعریف متغیر z مطابق رابطه‌ی ۱۲ صورت می‌گیرد:

$$z = Fd + F^{-T} \nabla f(x_k) \qquad (۱۲)$$

شکل نهایی مسئله‌ی بهینه‌سازی ذکر شده در روش برنامه‌ریزی توالی کمینه‌ی مربعات با توجه به توضیحات ارائه شده به صورت رابطه‌ی ۱۳ بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \min & ||z|| \\ & \nabla G(x_k)^T F^{-۱} z - ... \\ \text{subject to} & \\ & \nabla G(x_k) F^{-۱} F^{-T} \nabla f(x_k) + G(x_k) = ۰ \end{cases} \qquad (۱۳)$$

براساس رابطه‌ی ۱۳، هدف از حل مسئله‌ی بهینه‌سازی اشاره شده، یافتن پاسخ z تحت قید برابری معرفی شده است که در آن z همواره مثبت باشد و روش حل آن، استفاده از روش کمینه‌ی مربعات غیرمنفی $(nnls)$ است.[۳۳] زمانی که پارامتر z تعیین شود، بردار گام جهت d به‌دست می‌آید. اقدام بعدی در روش بهینه‌سازی موردنظر، اصلاح بردارگام جهت با استفاده از مقدار اندازه‌ی جهت s_m است که به این منظور کنترل تابع برازندگی صورت می‌پذیرد. تابع برازندگی یا فیلتر در مسئله‌ی بهینه‌سازی اخیر از ترکیب تابع هدف و قید برابری تشکیل شده است، که در ادبیات فنی به تابع برازندگی $L_۱$ معروف است و در رابطه‌ی ۱۴ ارائه شده است:

$$\phi(x_k, c) = f(x_k) + c|G(x_k)| \qquad (۱۴)$$

گرادیان تابع برازندگی مطابق رابطه‌ی ۱۵، جهت کنترل کاهش تابع برازندگی در گام‌های حل مسئله استفاده می‌شود:

$$\nabla\phi(x_k, c) = \nabla f(x_k) + c|\nabla G(x_k)| \qquad (۱۵)$$

این کنترل به صورت رابطه‌ی نابرابری ۱۶ است که به منظور تعیین اندازه‌ی جهت در هر گام از حل مسئله استفاده می‌شود:

$$\phi(x_{k+۱}, c) - \phi(x_k, c) \leq a.s_m.(\nabla\phi(x_k, c)^T d_k) \qquad (۱۶)$$

که در آن، a یک مقدار مثبت برابر با ۰/۵ است و پارامتر c مطابق رابطه‌ی ۱۷ تعیین می‌شود:

$$c = \gamma(||x_k||/\nabla G(x_k)||) + \eta \qquad (۱۷)$$

که در آن، $\gamma = ۲$ و $\eta = ۱۰$ مقادیر مثبت هستند و نهایتاً مقدار اندازه‌ی جهت با استفاده از رابطه‌ی ۱۸ تعیین می‌شود:

$$s_m = b^k \qquad (۱۸)$$

که در آن، b یک مقدار ثابت بین ۰ و ۱ است، که معمولاً برابر با ۰/۵ در نظر گرفته می‌شود. پارامتر k، نشان‌دهنده‌ی شماره‌ی تکرار جاری است که از مقدار ۰ شروع می‌شود و در صورت عدم برقراری رابطه‌ی ۱۶، با اضافه شدن مقدار واحد به آن تا یک مقدار بیشینه‌ی از پیش تعیین شده، اندازه‌ی جهت مناسب تعیین می‌شود. به این ترتیب با استفاده از رابطه‌ی تکرار جست‌وجوی خطی نشان داده شده در رابطه‌ی ۱۹، مقدار بردار پاسخ در هر گام قابل محاسبه است:

$$x_{k+۱} = x_k + s_m d_k \qquad (۱۹)$$

دو معیار به منظور همگرایی روش ذکر شده، استفاده می‌شود. معیار اول در رابطه‌ی ۲۰ ارائه شده است:

$$|\nabla f_k^T(x_k) d_k| + \lambda_i |G(x_k)| < tol \qquad (۲۰)$$

جدول ۱. برنامه‌ریزی توالی کمینه‌ی مربعات.

۱. مقداردهی $k = ۰$؛
۲. انتخاب مقدار اولیه برای متغیرهای تصادفی ($x_۰$)؛
۳. تعیین تابع هدف $f(x_k)$ و تابع حالت حدی $G(x_k)$؛
۴. تعیین گرادیان تابع هدف: $\nabla f(x_k)$ و گرادیان تابع حالت حدی: $\nabla G(x_k)$؛
۵. تعیین ضریب لاگرانژین λ به وسیله‌ی روش کمینه‌ی مربعات؛
۶. محاسبه‌ی B_k به وسیله‌ی روش BFGS (انتخاب ماتریس همانی در گام اول)؛
۷. به‌دست آوردن جهت گام d_k به وسیله‌ی حل مسئله‌ی بهینه‌سازی کمینه‌ی فاصله؛
۸. اگر $\lvert\nabla f^T(xk)\rvert + \lambda\lvert G(xk)\rvert < tol$؛
اتمام فرایند و چاپ نتایج.
در غیر این‌صورت:
۹. به‌روزرسانی جهت گام با تابع برازندگی و اندازه‌ی جهت s_m؛
۱۰. محاسبه‌ی بردار طراحی جدید: $x_{k+۱} = x_k + s_m.d_k$؛
۱۱. تعیین مقدار برای تابع هدف $f(x_{k+۱})$ و تابع حالت حدی $G(x_{k+۱})$؛
۱۲. اگر $\lvert f_{k+۱} - f_k\rvert < tol$؛
اتمام فرایند و چاپ نتایج،
در غیر این‌صورت:
۱۳. مقداردهی $k = k + ۱$؛
۱۴. اگر $k > k_{\max}$:
اتمام فرایند و چاپ نتایج.
در غیر این‌صورت:
۱۵. بازگشت به مرحله‌ی ۴ و تکرار چرخه.

که عبارت اول در رابطه‌ی اخیر، نمایانگر بیشینه‌ی کاهش به‌دست آمده برای تابع هدف در جهت بردار گرادیان است و عبارت دوم آن، مقدار قید حاکم بر مسئله‌ی بهینه‌سازی است که توسط ضریب لاگرانژین به‌دست آمده در هر گام حل مسئله، وزن‌دهی می‌شود. رابطه‌ی ۲۰ بیان می‌کند که اگر مقدار کاهش در تابع هدف و قید مسئله از مقدار از پیش تعیین‌شده‌ی tol کمتر باشد، الگوریتم به همگرایی دست یافته است. معیار دوم در کنترل همگرایی مطابق رابطه‌ی ۲۱ بیان می‌شود:

$$\lvert f_{k+۱} - f_k\rvert < tol \qquad (۲۱)$$

این معیار جهت جلوگیری از ادامه‌ی تکرارها در صورت تغییرات ناچیز در تابع حالت حدی است. مقدار tol در مطالعه‌ی حاضر برابر با ۰/۰۰۰۱ در نظر گرفته شده است. در جدول ۱، مراحل موردنیاز برای برنامه‌ریزی توالی کمینه‌ی مربعات به طور خلاصه ارائه شده است.

۳. میانگین موردانتظار احتمالاتی با ماتریس هسیان

اخیراً، رشکی (۲۰۲۱)،[۳۴] به منظور بهبود دقت روش تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها، روشی براساس تئوری شک ارائه کرده است (مطابق رابطه‌ی ۲۲) که بیانگر نحوه‌ی تعیین احتمال شکست دقیق است. به عبارت دیگر، روش ذکر شده، ترکیبی از روش‌های مبتنی بر تکرار و روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو است، و در آن به تعداد محدودی نمونه جهت بهبود تقریب محاسباتی نیاز است:

$$P_f = \bar{P}_f + \xi \qquad (۲۲)$$

که در آن، P_f مقدار دقیق احتمال شکست، $\bar{P}_f$ مقدار احتمال شکست به‌دست آمده از یک روش تقریبی مانند روش مرتبه‌ی اول قابلیت اعتماد و ξ خطای تقریبی محاسبات است. ترم خطا در رابطه‌ی ۲۲ می‌تواند دقیق، بالادست یا پایین‌دست تخمین زده شود که به ترتیب برابر با حالت‌های $\xi = ۰$، $\xi > ۰$ و $\xi < ۰$ است. براساس قانون میانگین موردانتظار، رابطه‌ی ۲۲ به صورت رابطه‌ی ۲۳ بازنویسی می‌شود:

$$E(P_f) = E(\bar{P}_f) + E(\xi) = E(\bar{P}_f) + \mu_g \qquad (۲۳)$$

که در آن، μ_g مقدار میانگین خطای تقریبی است. اگر تخمین خطا توسط رابطه‌ی اخیر، نااُریب باشد؛ آنگاه ترم $E(\bar{P}_f)$، یک تخمین دقیق از احتمال شکست را نتیجه می‌دهد. به طور خلاصه، اگر میانگین خطای تقریبی برابر با صفر باشد، میانگین مورد انتظار احتمال شکست به‌دست آمده به‌وسیله‌ی یک روش مبتنی بر جست‌وجوی تحلیل قابلیت اعتماد می‌تواند مطابق رابطه‌ی ۲۴ به‌دست بیاید:

$$E(\bar{P}_f) = E(\Phi(\beta_۱) - \Phi(\beta_۲)) \qquad (۲۴)$$

که در آن، $\beta_۱$ و $\beta_۲$ مقدار فاصله‌ی تابع حالت حدی برای هر نمونه در روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو نسبت به مقدار میانگین مورد انتظار هستند. به‌منظور یافتن پاسخ رابطه‌ی ۲۴، نیاز به حل دو مسئله است.

اولین مسئله، یک مسئله‌ی بهینه‌سازی برای تعیین اندازه‌ی باقیمانده‌ی هر نمونه در راستای بردار اهمیت تا رویه‌ی حالت حدی است، که در رابطه‌ی ۲۵ ارائه شده است:

$$\begin{cases} \min & \lvert\lvert x_k - c_۱\alpha\rvert\rvert \\ \text{subject to} & G(x_k) = ۰ \end{cases} \qquad (۲۵)$$

که در آن $c_۱$ پاسخ مسئله‌ی بهینه‌سازی و α بردار اهمیت است که خروجی یک تحلیل مرتبه‌ی اول قابلیت اعتماد است و از نسبت گرادیان تابع حالت حدی به اندازه‌ی این بردارگرادیان به‌دست می‌آید. پاسخ مسئله‌ی بهینه‌سازی مذکور، فاصله‌ی بین نمونه‌ی بررسی شده تا نقطه‌یی بر روی حالت حدی ($G = ۰$)، را که در راستای بردار اهمیت با یکدیگر مرتبط هستند، نتیجه می‌دهد؛ که موازی با خط متصل‌کننده بین مرکز مختصات و نقطه‌ی طراحی در فضای استاندارد نرمال است.

مسئله‌ی دوم، یک مسئله‌ی ریشه‌یابی ساده است (مطابق رابطه‌ی ۲۶) که هدف از حل آن، تعیین فاصله بین موقعیت تصویرسازی شده‌ی نمونه‌ی مورد بررسی بر روی رویه‌ی حالت حدی تا خطی است که مرکز مختصات را قطع می‌کند و موازی با خطی‌سازی تابع حالت حدی در نقطه‌ی طراحی به‌دست آمده از روش مبتنی بر جست‌وجوی تحلیل قابلیت اعتماد است.

$$x_k + (c_۱ + c_۲)\alpha = ۰ \qquad (۲۶)$$

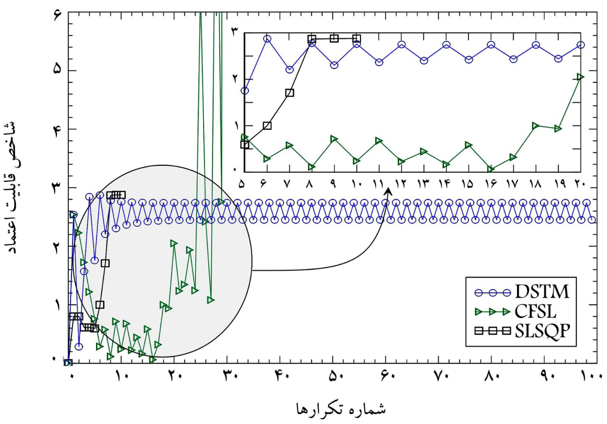
پاسخ مسئله‌ی بهینه‌سازی اخیر، $c_۲$ است. فرایند ساده‌ی اشاره شده، برای تمامی نمونه‌های محدودی که به جهت اصلاح دقت محاسباتی در روش‌های مبتنی بر جست‌وجو استفاده شده‌اند، اعمال می‌شود و میانگین مقادیر به دست آمده برای پارامتر ($c_۲$ پاسخ نهایی) که احتمال شکست اصلاح شده است، را نتیجه می‌دهد. نکته‌ی قابل اهمیت در ارتباط با روش اخیر، تولید نمونه‌های مورد نیاز در جهت کاهش خطای محاسباتی است. به همین دلیل در نوشتار حاضر، از مفاهیم به کار گرفته شده در روش کاهش ابعاد استفاده شده است.[۳۵] در روش کاهش ابعاد مبتنی بر ماتریس هسیان، نمونه‌های تولید شده در راستاهای اصلی حول نقطه‌ی طراحی

تولید می‌شوند، که این امر درکاهش خطا و حجم محاسبات بسیار مؤثر واقع می‌شود. کاهش خطا و محاسبه‌ی دقیق‌تر، احتمال شکست براساس دوران فضای استاندارد نرمال U به فضای استاندارد نرمال V انجام می‌شود. به این منظور نیاز است تا ماتریس دوران R که دارای ابعاد $N \times N$ است (N تعداد متغیرهای تصادفی در مسئله)، محاسبه شود. روش گرام اشمیت برای تعیین ماتریس دوران استفاده می‌شود، با این تفاوت که ورودی آن، که ماتریس هسیان در فضای U است، نیاز به محاسبه‌ی مجدد ندارد و ماتریس هسیان مذکور به‌عنوان خروجی روش SLSQP در دسترس است. به این ترتیب بعد از تولید نمونه‌های موردنیاز با استفاده از رابطه‌ی $u = Rv$، نمونه‌ها از فضای V به فضای U انتقال پیدا می‌کنند و محاسبه‌ی تابع حالت حدی ممکن می‌شود، با ذکر این نکته که نمونه‌ها در فضای V دارای مختصات هندسی به صورت $V_i = \{0, ..., v_i, \beta\}$ هستند و مختصات نقطه‌ی طراحی به‌دست آمده از روش SLSQP نیز به صورت $V^* = \{0, ..., 0, ..., \beta\}$ است. این بدان معناست که سطرهای ماتریس دوران R، عمود بر بردار اهمیت به‌دست آمده از روش SLSQP است و آخرین سطر ماتریس اخیر را بردار اهمیت تشکیل می‌دهد که خود به عنوان یکی از جهت‌های اصلی در نظر گرفته شده است.

با داشتن محورهای اصلی در نقطه‌ی طراحی می‌توان نمونه‌های موردنیاز را به روش مربع ـ گاوسی تولید کرد و به صورت نمونه‌سازی خطی در هر جهت به حل مسئله پرداخت. نکته‌ی مهم در این زمینه برای مسائلی است که دارای شعاع انحناء متفاوت در طرفین نقطه‌ی طراحی هستند، که برای این مسائل می‌توان با انتقال نمونه‌ها بر روی محور موردنظر، وضعیت مناسبی برای تولید نمونه‌ها ایجاد کرد. روش پیشنهادی نوشتار حاضر، که با نام SLSQP-PE در بخش مثال‌های عددی بیان شده است، ترکیبی از دو روش بیان‌شده در قسمت‌های پیشین است. در روش SLSQP-PE، ابتدا نقطه‌ی طراحی با استفاده از روش SLSQP که دارای نرخ سریع همگرایی و مجهز به مکانیزم‌های مناسب در برابر غیرخطی بودن تابع حالت حدی است، تعیین می‌شود که در صورت خطی‌بودن تابع حالت حدی می‌توان آن را به عنوان پاسخ دقیق مسئله در نظر گرفت. در گام بعدی، با استفاده از یکی از روش‌های نمونه‌سازی، تعداد محدودی نمونه حول نقطه‌ی طراحی تولید خواهد شد که آن‌ها با استفاده از روش میانگین مورد انتظار احتمالاتی و حرکت در جهت محورهای اصلی و کاهشی به‌دست آمده با استفاده از ماتریس هسیان تخمینی در روشSLSQP، در مختصات جدید قرار می‌گیرند و خطای هر نمونه نسبت به پاسخ روش SLSQP محاسبه می‌شود. میانگین خطای به‌دست آمده درکنار پاسخ موجود، به پاسخ اصلاح شده با دقت بالا منجر می‌شود.

۴. مثال‌های عددی

در بخش حاضر، چهار مثال از ادبیات فنی بررسی شده است، تا کارایی روش پیشنهادی مشخص شود. مثال‌ها، شامل چالش‌هایی مانند انواع غیرخطی بودن تابع حالت حدی و پیچیدگی‌های عددی در ترکیب متغیرهای تصادفی هستند. به منظور ساده‌سازی در حل مسائل، روش پیشنهادی SLSQP و ترکیب آن با روش میانگین مورد انتظار، SLSQP-PE نامیده شده است. نتایج روش پیشنهادی با دو روش نوین محاسباتی شامل روش‌های DSTM و CFSL که برای مقابله با غیرخطی بودن تابع حالت حدی توسعه‌یافته و پیش‌تر توضیح داده شده‌اند، مقایسه شده است. به منظور آماده‌سازی دو روش مذکور جهت مقایسه‌ی نتایج، از تنظیمات ارائه شده در نوشتارهای یانگ و همکاران (۲۰۲۰)،[۳۶] و روداک وکرملو (۲۰۱۹)[۳۷] استفاده



شکل ۱. تاریخچه‌ی تکرارها برای مثال ۱.

شده و مقدار ضریب کنترل ۰/۱ برای روش DSTM، مقدار اندازه‌ی گام و ضریب تطبیقی برای روش CFSL به ترتیب برابر ۵۰ و ۱/۵ در نظر گرفته شده است. معیار همگرایی یکسان، یعنی $||\nabla f(x_k) + \lambda \nabla G(x_k)||$، برای تمامی الگوریتم‌ها در نظر گرفته شده است. احتمال شکست به‌دست آمده با استفاده از روش‌های SORM و مونت‌کارلو (MCS)، نیز به‌وسیله‌ی 1×10^6 نمونه محاسبه شده است، تا معیاری برای مقایسه‌ی دقت روش‌ها در اختیار قرار گیرد.

علاوه بر این، مثال‌های ارائه شده در مطالعه‌ی حاضر، قابل حل و مدل‌سازی به‌وسیله‌ی نرم‌افزار BI هستند که یک نرم‌افزار تحت ویندوز برای تحلیل‌های قابلیت اعتماد سازه‌هاست و توسط نویسندگان نوشتار حاضر توسعه یافته است که در آدرس www.betaindexsoftware.com قابل دسترسی است.

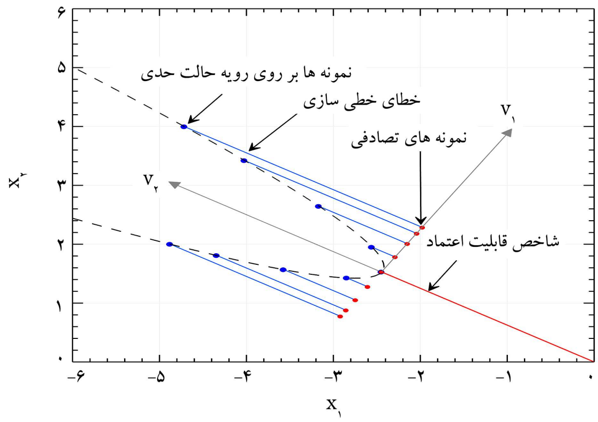
۱.۴. مثال ۱: تابع حالت حدی چندجمله‌یی مربعی

تابع حالت حدی در مثال اول، یک چندجمله‌یی مربعی غیرخطی است که دارای دو متغیر استاندارد نرمال مطابق رابطه‌ی ۲۷ است.[۳۶،۳۸]

$$G(X) = X_1 - 1.7X_2 + 1.5(X_1 + 1.7X_2)^2 + 5 \tag{27}$$

تاریخچه‌ی همگرایی سه روش بررسی شده‌ی DSTM، CFSL و SLSQP برای مثال ۱ در شکل ۱ مشاهده می‌شود. دو روش اول، فاقد همگرایی بوده‌اند، با اینکه رفتار عدم همگرا شدن در آنها متفاوت است (شکل ۱) روش DSTM بین دو نقطه، که هیچ‌کدام پاسخ مسئله نیستند، نوسان می‌کند که این مورد در بخش بزرگ‌نمایی شده در شکل ۱ مشخص است. از طرف دیگر، روش CFSL، عدم همگرایی به پاسخ غیرصحیح را درگام‌های ابتدایی نتیجه داده و در ادامه‌ی روند حل مسئله به دلیل نیافتن اندازه‌ی گام‌های مناسب، موفقیتی برای اصلاح پاسخ به‌دست نیاورده است. در بین روش‌های ذکر شده، روش SLSQP کارایی مناسبی نشان داده و به شاخص قابلیت اعتماد برابر با ۲/۸۷۸۷ همگرا شده است که متناظر با نقطه‌ی طراحی (۱/۵۲۶۴، ۲/۴۴۰۸−) است.

پاسخ اخیر، بهترین نتیجه‌ی مورد انتظار از خطی‌سازی تابع حالت حدی محسوب می‌شود، یعنی کمترین فاصله بین مرکز مختصات تا رویه‌ی حالت حدی است که برای آن از بسط مرتبه‌ی اول تیلور استفاده شده باشد. این مسئله توسط سایر پژوهشگران و روش‌های توسعه‌یافته نیز حل شده است. براساس نوشتار یانگ و همکاران (۲۰۲۰)،[۳۶] پاسخ روش مذکور با ۲۸۵۲ فراخوانی تابع حالت حدی با استفاده از روش iHLRF برابر با ۲/۸۷۸۷ و نتیجه‌ی مشابه با روش STM بوده



شکل ۲. رویه‌ی نمونه‌سازی جهت بهبود دقت محاسبات برای مثال ۱.

است، که با ۳۰۲ فراخوانی تابع حالت حدی به‌دست آمده است. گام بعدی حل مسئله، بهبود دقت محاسباتی است. در شکل ۲، فرایند استفاده شده برای تعیین میانگین مورد انتظار احتمالاتی جهت کاهش خطای خطی‌سازی مشاهده می‌شود.

مسئله‌ی کنونی از دو جهت تشکیل شده است. در روش مورد نظر این امکان وجود دارد تا از نمونه‌های تصادفی استفاده شود؛ اما مطالعه‌ی حاضر، روش جایگزین مربع ـ گاوسی،[۳۹] را برای تولید نمونه‌های تصادفی به کار گرفته است، که برای مثال حاضر، از ۹ نقطه‌ی اولیه در جهت محور v_1 استفاده شده است که با رنگ قرمز در شکل ۲ مشخص شده‌اند. گام بعدی، انتقال نقاط اولیه به روی رویه‌ی حالت حدی در راستای بردار حساسیت است. در گام قبلی، نقطه‌ی طراحی و بردار حساسیت به‌وسیله‌ی روش SLSQP محاسبه شده است. نقاط مذکور با رنگ‌های آبی در شکل ۲ مشاهده می‌شوند. مرحله‌ی بعد، تعیین خطای هر نمونه نسبت به شاخص قابلیت اعتماد به‌دست آمده از روش SLSQP است.

خط فرضی متصل‌کننده‌ی نقاط قرمز در شکل ۲، بیانگر تقریب خطی تابع حالت حدی حول نقطه‌ی طراحی به‌دست آمده به وسیله‌ی SLSQP است که به دلیل دوران محورهای مختصاتی، خط فرضی مذکور بر روی محور اصلی دوران‌یافته‌ی v_1 قرار خواهد گرفت. خط‌های آبی کم‌رنگ که اتصال‌دهنده‌ی نمونه‌ها روی رویه‌ی حالت حدی به محور v_1 هستند، بیانگر خطای هر نمونه نسبت به روش خطی‌سازی محسوب می‌شوند. نهایتاً، با میانگیری کردن خطاهای به‌دست آمده مطابق آنچه در بخش سوم بیان شد، مقدار شاخص قابلیت اعتماد برابر با ۳/۳۴۰ به‌دست آمد که بسیار نزدیک به پاسخ روش مونت‌کارلو ۳/۳۳۹ است.

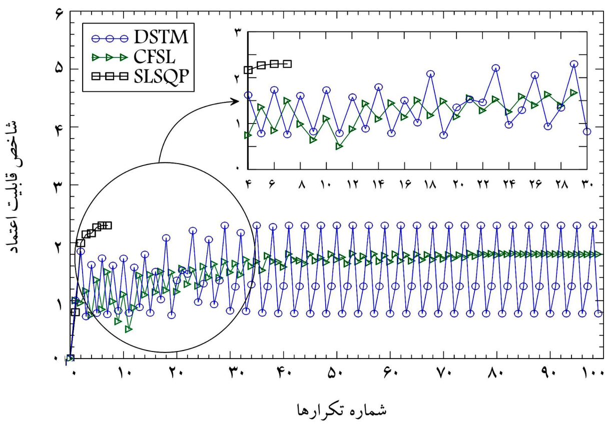
در جدول ۲، خلاصه‌یی از نتایج پایانی روش‌های مختلف ارائه شده است، که β شاخص قابلیت اعتماد، p_f احتمال شکست و تعداد تکرار موردنیاز و تعداد دفعات فراخوانی تابع حالت حدی برای هر روش ارائه شده است. پاسخ نهایی روش بهینه‌سازی که در آن از اصلاح به روش میانگین مورد انتظار استفاده شده است، به شکل SLSQP-PE در جدول ۲ نام برده شده است. کارایی مناسب روش پیشنهادی جهت مقابله با غیرخطی بودن تابع حالت حدی، سرعت بالای همگرایی و اصلاح خطای خطی‌سازی با مکانیسم ارائه شده از نتایج به‌دست آمده‌ی قابل برداشت است.

۲.۴. مثال ۲: تابع حالت حدی نمایی ـ لگاریتمی

در مثال ۲، ترکیب نمایی و لگاریتمی متغیرهای تصادفی در تابع حالت حدی (مطابق

جدول ۲. نتایج روش‌های مختلف برای مثال ۱.

روش	β	P_f	تکرارها	فراخوان تابع
DSTM	—	—	—	—
CFSL	—	—	—	—
SORM	۳/۳۳۰	۰/۰۰۰۴۳۴	—	۶ + Hessian
SLSQP	۲/۸۷۸	۰/۰۰۲۰۰۱	۶	۶
SLSQP-PE	۳/۳۴۰	۰/۰۰۰۴۱۸	۹ + ۶	۹ + ۶
MCS	۳/۳۳۹	۰/۰۰۰۴۲۰	10^6	10^6



شکل ۳. تاریخچه‌ی تکرارها برای مثال ۲.

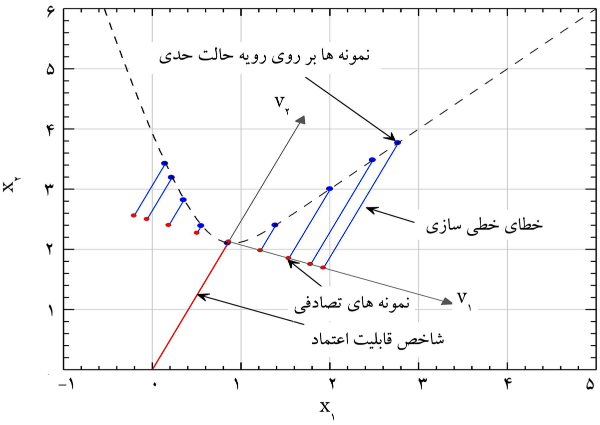
رابطه‌ی ۲۸) در نظر گرفته شده است.[۲۴،۳۷و۴۰]

$$G(X) = \ln(e^{1+X_1-X_2}) + e^{5-5X_1-X_2} \qquad (28)$$

هر دو متغیر تصادفی، دارای توزیع احتمالاتی استاندارد نرمال هستند. در شکل ۳، تاریخچه‌ی گام‌های محاسباتی برای تعیین قابلیت اعتماد مشاهده می‌شود.

غیرخطی بودن بالای تابع حالت حدی در مثال ۲ به عدم همگرایی برای روش‌های DSTM و CFSL منجر شده است. روش DSTM، رفت و برگشت بین دو نقطه‌ی اشتباه را نتیجه داده است. با اینکه روش CFSL به نتیجه‌ی پایدار رسیده است، ولی پاسخ به‌دست آمده صحیح نیست. روش SLSQP دارای پاسخ صحیح درکنار همگرایی سریع در این مرحله است که همان استفاده از خطی‌سازی تابع حالت حدی بوده است. مثال ۲، با روش‌های دیگری نیز حل شده است، که در ادبیات فنی موجود هستند؛ از جمله: روش پیشنهادی روداک و همکاران (۲۰۱۷)،[۴۱] روش گنگ (۲۰۱۱)،[۲۴] روش پیشنهادی گنگ و همکاران (۲۰۱۴)،[۴۲] روش‌های ذکر شده، توانایی مقابله با غیرخطی بودن تابع حالت حدی را داشته‌اند، اما تلاش محاسباتی آن‌ها، به‌میزان کمینه نبوده است (به منظور بررسی بهتر، مراجع ذکر شده مطالعه شوند). بنابراین می‌توان این طور بیان کرد که روش SLSQP، کارایی بالاتری بین روش‌های مقایسه شده و روش‌های اشاره شده در ادبیات فنی که براساس خطی‌سازی تابع حالت حدی عمل کرده است، را دارد.

گام بعدی، بررسی دقت پاسخ به‌دست آمده است. مشابه مثال ۱، مثال ۲ از دو متغیر تصادفی تشکیل شده است که دو بُعد را پوشش می‌دهد. روش میانگین مورد انتظار احتمالاتی، بار دیگر به کار گرفته خواهد شد تا خطای خطی‌سازی را کاهش دهد. بعد از دوران و انتقال به محورهای اصلی v_1 و v_2 از ۹ نقطه به روش مربعی ـ گاوسی استفاده شده است. در شکل ۴، فرایند تعیین خطای هر نمونه مشابه توضیحات ارائه شده در مثال ۱ مشاهده می‌شود.



شکل ۴. رویه‌ی نمونه‌سازی جهت بهبود دقت محاسبات برای مثال ۲.

جدول ۳. نتایج روش‌های مختلف برای مثال ۲.

روش	β	P_f	تکرارها	فراخوان تابع
DSTM	—	—	—	—
CFSL	۱/۷۹۶	۰/۰۳۶۲۴۷	۱۰۰	۱۰۰
SORM	۳/۷۰۶	۰/۰۰۳۴۰۴	—	۶ + Hessian
SLSQP	۲/۲۷۰	۰/۰۰۳۴۰۰	۶	۶
SLSQP-PE	۲/۷۴۰	۰/۰۰۳۰۷۲	۶ + ۹	۶ + ۹
MCS	۲/۷۴۵	۰/۰۰۳۰۲۵	$۱۰^۶$	$۱۰^۶$

میانگین خطای محاسبه شده و نتیجه‌ی آن، تعیین شاخص قابلیت اعتماد برابر با ۲/۷۴۰ است که موافق با پاسخ روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو ۲/۷۴۵ است. در جدول ۳، نتایج نهایی شاخص قابلیت اعتماد و احتمال شکست متناظر به‌دست آمده برای روش‌های مختلف ارائه شده است.

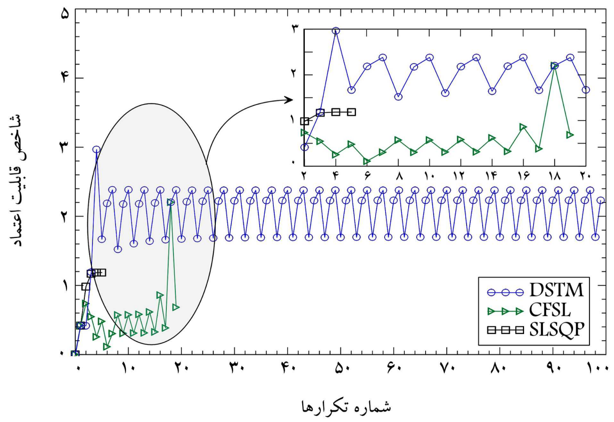
روش SLSQP علاوه بر کارایی مناسب در برابر غیرخطی بودن تابع حالت حدی، حجم محاسباتی بهینه را نیز نتیجه داده است و در ترکیب با روش میانگین مورد انتظار احتمالاتی به دقتی در حد روش شبیه‌سازی مونت‌کالو رسیده است. این در حالی است که فقط از ۹ نمونه برای اصلاح دقت پاسخ استفاده شده است.

۳.۴. مثال ۳: تابع حالت حدی دارای نویز

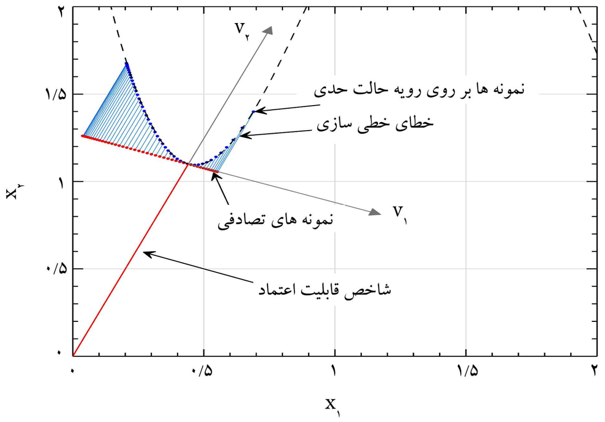
تابع حالت حدی دارای ترم نویز در مثال ۳ مطابق رابطه‌ی ۲۹ بررسی شده است.[۴۳,۴۴] دو متغیر تصادفی استفاده شده در مثال کنونی، دارای توزیع نرمال با میانگین‌های به ترتیب برابر با ۱/۵ و ۲/۵ هستند و مقدار انحراف معیار برای هر دو متغیر تصادفی برابر ۱/۰ است.

$$G(X) = \frac{(X_1^2+4)(X_2-1)}{20} - \sin\left(\frac{5X_1}{2}\right) - 2 \qquad (29)$$

تمامی گام‌های محاسباتی به همراه بزرگ‌نمایی گام‌های اولیه به منظور درک بهتر رفتار روش‌ها در شکل ۵ مشاهده می‌شود. مشابه مثال‌های قبلی، روش DSTM نوسان بین پاسخ‌های اشتباه و عدم توانایی در یافتن پاسخ را نشان می‌دهد. از طرف دیگر، روش CFSL دچار ناپایداری عددی شده و از ادامه‌ی حل مسئله، بعد از گام ۱۹ بازمانده است. قابلیت اعتماد برابر با ۱/۱۸۵ به پایان رسیده است که این پاسخ بهترین پاسخ در حالت خطی‌سازی تابع حالت حدی، یعنی کم‌ترین فاصله



شکل ۵. تاریخچه‌ی تکرارها برای مثال ۳.



شکل ۶. رویه‌ی نمونه‌سازی جهت بهبود دقت محاسبات برای مثال ۳.

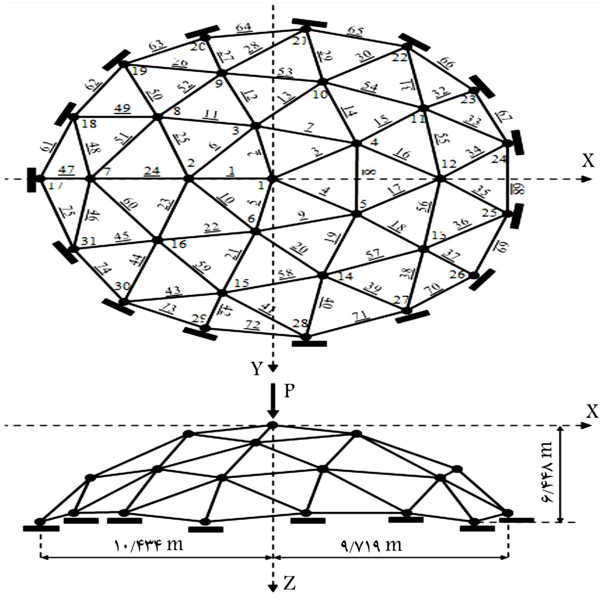
بین مرکز مختصات و رویه‌ی حالت حدی در فضای استاندار نرمال است. اما پاسخ اخیر با نتیجه‌ی به‌دست‌آمده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو (۱/۸۶۱) تفاوت زیادی داشته است، که نیاز به اصلاح را یادآورد می‌شود. ذکر این نکته ضروری است که این مورد ضعف روش بهینه‌سازی نبوده است، زیرا وظیفه‌ی روش SLSQP، یافتن نزدیک‌ترین فاصله‌ی ذکر شده در حالت خطی‌سازی بوده و این امر صورت پذیرفته است.

نقطه‌ی طراحی به‌دست آمده دارای مختصات (۰/۴۴۰۹۷, ۱/۱۰۰۰۷) بوده‌است که در شکل ۶ مشاهده می‌شود. خطای محاسباتی مثال حاضر، به وجود ترم نویز و شعاع انحناء نامتقارن در نقطه‌ی طراحی بر می‌گردد. اگر مشابه مثال‌های قبلی، از روش میانگین مورد انتظار احتمالاتی استفاده شود، بعد از دوران محور به مختصات محورهای اصلی و تولید نمونه‌های متقارن نسبت به محور v_2، تأثیر چندانی در بهبود خطای مسئله رخ نخواهد داد. به این دلیل، برای مسئله‌ی حاضر از ۵۰ نقطه به روش مربع ـ گاوسی و انتقال به سمت چپ محور مذکور به مقدار ۰/۱۵ استفاده شده است. همچنین در شکل ۶، نمونه‌های تولید شده بر این اساس به همراه خطای هر نمونه حول نقطه‌ی طراحی مشاهده می‌شوند.

بهترین عملکرد در مسئله‌ی حاضر، متعلق به روش SLSQP است که فقط با ۶ تکرار در مرحله‌ی خطی‌سازی به نتیجه رسیده است. نهایتاً، روش SLSQP-PE منجر به بهبود دقت پاسخ مسئله شده است، که نتایج آن در جدول ۴ ارائه شده است. در مثال حاضر، روش SORM به دلیل کوچک بودن مقدار شاخص قابلیت اعتماد، تأثیر چندانی در بهبود دقت نهایی نداشته است.

جدول ۴. نتایج روش‌های مختلف برای مثال ۳.

روش	β	P_f	تکرارها	فراخوان تابع
DSTM	—	—	—	—
CFSL	—	—	—	—
SORM	۱/۱۹۱	۰/۱۱۶۸۲	—	۶ + Hessian
SLSQP	۱/۱۸۵	۰/۱۱۷۹۷	۶	۶
SLSQP-PE	۱/۸۴۰	۰/۰۳۱۷۹	۶ + ۵۰	۶ + ۵۰
MCS	۱/۸۶۱	۰/۰۳۱۳۳	$۱۰^۶$	$۱۰^۶$



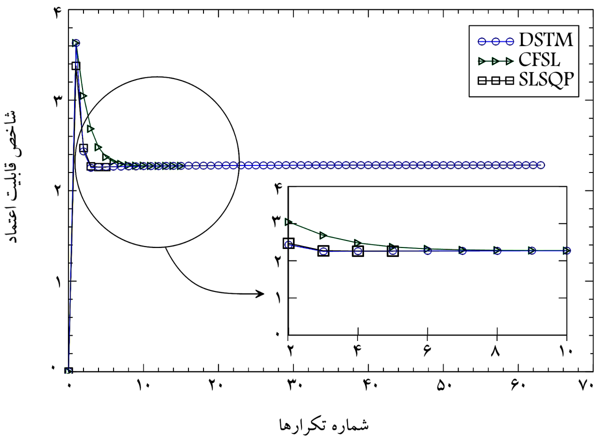
شکل ۷. سازه‌ی خرپایی گنبد مثال ۴.

۴.۴. مثال ۴: مسئله‌ی مهندسی گنبد (سازه‌ی خرپای فضایی)

سازه‌ی گنبد یا سازه‌ی خرپای فضایی با ۷۵ عضو در مسئله‌ی حاضر مدنظر قرار گرفته است، تا کارایی روش پیشنهادی برای یک مسئله‌ی مهندسی با ابعاد زیاد نشان داده شود. تغییرمکان بیشینه در گره مرکزی سازه برای ساخت یک تابع حالت حدی صریح، برخلاف مثال‌های گذشته، استفاده شده است. تابع حالت حدی در رابطه‌ی ۳۰ ارائه شده است.[۴۵]

$$G(X) = ۰/۰۰۳۵ - \Delta_z^{۱} \qquad (۳۰)$$

شماره و مختصات هندسی تمامی گره‌های تشکیل‌دهنده‌ی سازه در جدول ۵ ارائه شده‌اند. در شکل ۷، مدل اجزاء محدود سازه‌ی گنبد مشاهده می‌شود. شکل ۷، شامل المان‌ها، گره‌ها، و شماره‌ی آن‌هاست. شماره‌های ساده (بدون خط زیر) مربوط به گره‌ها و شماره‌هایی که زیرشان خط دارند، مرتبط با المان‌ها هستند. مدل سازه‌یی اخیر، شامل ۳۱ گره، ۷۵ المان خرپایی با مصالح یکسان، ۱۵ تکیه‌گاه ساده و یک نیروی متمرکز در گره ۱ (گره مرکزی) در راستای محور Z بوده است. سطح مقطع اعضا، مدول کشسانی و بار اعمال شده بر روی سازه، به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده‌اند؛ که مشخصات مربوط به توزیع آماری و سایر پارامترهای موردنیاز آن‌ها در جدول ۶ ارائه شده است.



شکل ۸. تاریخچه‌ی تکرارها برای مثال ۴.

تاریخچه‌ی همگرایی روش‌های محاسباتی و عدم توانایی همگرایی سریع روش DSTM، در شکل ۸ کاملاً نمایان است. نکته‌ی قابل توجه در مسئله‌ی حاضر، یکسان بودن تقریبی ۴ گام ابتدایی برای روش‌هاست. در مثال کنونی، نیز همگرایی سریع برای روش SLSQP بوده است. نتایج روش‌های مختلف در جدول ۷ ارائه شده است. در مسئله‌ی مهندسی حاضر، تمامی روش‌ها به پاسخ پایدار و نهایی رسیده‌اند. با توجه به جدول ۷، خطای روش DSTM نسبت به سایر روش‌ها بالاتر بوده است. دو روش CFSL و SLSQP، پاسخ‌های نزدیک به یکدیگر را گزارش کرده‌اند. تفاوت اصلی در هزینه‌ی محاسباتی بین روش‌های ذکر شده است که روش CFSL عملکرد مناسب‌تری را نسبت به روش DSTM با ۶۴ تکرار، ۵۶۷ فراخوانی تابع حالت حدی و ۶/۸۳ ثانیه زمان حل برای عملیات‌های محاسباتی نتیجه داده است. با این حال، روش SLSQP فقط با نیاز به ۵ تکرار، ۴۶ فراخوانی تابع حالت حدی، و زمان تقریبی ۱ ثانیه سریع‌تر نسبت به روش CFSL، عملکرد بسیار مناسبی را نشان داده است. در ادامه، اصلاح پاسخ نتیجه‌ی روش بهینه‌سازی با استفاده از روش میانگین مورد انتظار احتمالاتی صورت پذیرفته است، که به شاخص قابلیت اعتماد ۲/۱۸۴۶۲ رسیده است، که با دقت ۴ رقم اعشار به پاسخ روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو نزدیک شده است و فقط ۰/۰۱۳ ثانیه زمان بیشتر نسبت به روش SLSQP نیاز دارد، که تأییدی بر کارایی مناسب روش است. بیشتر بودن تعداد فراخوانی تابع حالت حدی نسبت به تعداد تکرارها در مسئله‌ی حاضر، به‌علت صریح بودن تابع حالت حدی و استفاده از روش تفاضلات محدود جهت تعیین گرادیان تابع حالت حدی است.

نقطه‌ی طراحی به‌دست آمده برای مسئله‌ی حاضر براساس ترتیب ارائه شده در جدول ۴ برابر است با:

$$A_۱ = ۰/۰۰۲۱ \qquad A_۲ = ۰/۰۰۱۹$$
$$A_۳ = ۰/۰۰۰۹ \qquad A_۴ = ۰/۰۰۱۱۹$$
$$A_۵ = ۰/۰۰۲۱۹ \qquad A_۶ = ۰/۰۰۱۵$$
$$E = ۶۸/۶۲۷ \qquad P = ۱۰۸/۸۳$$

۵. نتیجه‌گیری

روش‌های تحلیل مرتبه‌ی اول قابلیت اعتماد به شکل گسترده‌یی جهت تعیین احتمال شکست یا ایمنی و تعیین شرایط بهینه در مسائل مهندسی استفاده می‌شوند که

جدول ۵. مختصات هندسی گره‌ها برای مثال ۴.

Node	(X, Y, Z) meter	Node	(X, Y, Z) meter
۱	(+۰/۰۰۰, +۰/۰۰۰, +۰/۰۰۰)	۱۷	(−۱۰/۴۳۴, +۰/۰۰۰, +۶/۴۴۸)
۲	(−۴/۰۰۴, +۰/۰۰۰, +۰/۷۰۹)	۱۸	(−۹/۲۴۶, −۳/۸۰۸, +۵/۶۵۸)
۳	(−۱/۲۳۷, −۳/۸۰۸, +۰/۷۰۹)	۱۹	(−۶/۴۷۹, −۷/۶۱۷, +۵/۶۵۸)
۴	(+۰/۷۰۹, −۲/۳۵۴, +۱/۲۳۷)	۲۰	(+۶/۴۴۸, −۹/۹۲۳, −۳/۲۲۴)
۵	(+۳/۲۴۰, +۲/۳۵۴, +۰/۷۰۹)	۲۱	(+۰/۷۶۵, −۹/۹۷۱, +۵/۶۵۸)
۶	(−۳/۲۴۰, +۳/۸۰۸, +۰/۷۰۹)	۲۲	(+۵/۲۴۲, −۸/۵۱۶, +۵/۶۵۸)
۷	(−۸/۰۰۹, +۰/۰۰۰, +۳/۱۸۳)	۲۳	(+۸/۴۴۱, −۶/۱۳۳, +۶/۴۴۸)
۸	(−۵/۷۲۹, −۴/۱۶۲, +۲/۳۹۵)	۲۴	(+۹/۷۱۹, −۲/۳۵۴, +۵/۶۵۸)
۹	(−۲/۴۷۵, −۷/۶۱۷, +۲/۸۸۳)	۲۵	(+۹/۷۱۹, +۲/۳۵۴, +۵/۶۵۸)
۱۰	(+۲/۱۸۸, −۶/۷۳۵, +۲/۳۹۵)	۲۶	(+۸/۴۴۱, +۶/۱۳۳, +۶/۴۴۸)
۱۱	(+۶/۴۷۹, −۴/۷۰۸, +۳/۱۸۳)	۲۷	(+۵/۲۴۲, +۸/۵۱۶, +۵/۶۵۸)
۱۲	(+۷/۰۸۲, +۶/۴۷۹, +۳/۱۸۳)	۲۸	(+۰/۷۶۵, +۹/۹۷۱, +۵/۶۵۸)
۱۳	(+۶/۴۷۹, +۴/۷۰۸, +۳/۱۸۳)	۲۹	(−۳/۲۲۴, +۹/۹۲۳, +۶/۴۴۸)
۱۴	(+۲/۱۸۸, +۶/۷۳۵, +۲/۳۹۵)	۳۰	(−۶/۴۷۹, +۷/۶۱۷, +۵/۶۵۸)
۱۵	(−۲/۴۷۵, +۷/۶۱۷, +۳/۱۸۳)	۳۱	(−۹/۲۴۶, +۳/۸۰۸, +۵/۶۵۸)
۱۶	(−۵/۷۲۹, +۴/۱۶۲, +۲/۳۹۵)		

جدول ۶. متغیرهای تصادفی و توزیع‌های احتمالاتی برای مثال ۴.

متغیر	نوع توزیع	میانگین	انحراف معیار
$A_{۱} - A_{۵}(m^{۲})$	نرمال	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۰۳۷۵
$A_{۶} - A_{۱۰}(m^{۲})$	نرمال	۰/۰۰۲۰	۰/۰۰۰۲۴
$A_{۱۱} - A_{۲۵}(m^{۲})$	نرمال	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۰۸
$A_{۲۶} - A_{۵۰}(m^{۲})$	نرمال	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۰۹۶
$A_{۵۱} - A_{۶۰}(m^{۲})$	نرمال	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۰۲۲
$A_{۶۱} - A_{۷۵}(m^{۲})$	نرمال	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۰۱۵
E (GPa)	نرمال	۷۰	۳/۵
P (kN)	گامبل	۸۰	۱۲/۰

جدول ۷. نتایج روش‌های مختلف برای مثال ۴.

روش	β	P_f	تکرارها	فراخوان تابع	زمان (s)
DSTM	۲/۲۸۳۱۱	۰/۰۱۱۲۱	۶۴	۵۷۶	۶/۸۳۰
CFSL	۲/۲۷۳۲۷	۰/۰۱۱۵۰	۱۶	۱۴۴	۲/۰۶۸
SORM	۲/۱۵۰۰۱	۰/۰۱۵۷۷	—	۴۶ + Hessian	۳/۲۸۰
SLSQP	۲/۲۶۰۵۳	۰/۰۱۱۸۹	۵	۴۶	۱/۱۱۷
SLSQP-PE	۲/۱۸۴۶۰	۰/۰۱۴۴۵	۵ + ۵۰	۴۶ + ۵۰	۱/۱۳۰
MCS	۲/۱۸۴۶۲	۰/۰۱۴۴۵	$۶/۵ \times ۱۰^{۶}$	$۶/۵ \times ۱۰^{۶}$	۸۹۶/۰

اساس کار آن‌ها، خطی‌سازی تابع حالت حدی است. غیرخطی بودن تابع حالت حدی، چالشی در همگرایی روش‌های مذکور را وارد می‌کند، که نیاز به توسعه و ترکیب‌های جدید در این زمینه را الزامی می‌دارد. نوشتار حاضر، روشی براساس بهینه‌سازی غیرخطی عددی را بررسی کرده است که دارای فیلترهای ساده است و در دستیابی به پاسخ‌های پایدار و همگرایی سریع بسیار موفق عمل می‌کند و نیز جهت جلوگیری از ناپایداری‌های عددی، مسئله‌ی بهینه‌سازی اولیه را با یک مسئله‌ی بهینه‌سازی یافتن کمترین فاصله جایگزین می‌کند. عملکرد مناسب و کارایی بالای روش مذکور برای تعداد محدودی مثال در مطالعه‌ی حاضر نشان داده شده است. تخمین نقطه‌ی طراحی در فضای خطی‌سازی شده با استفاده از روش SLSQP اولین اقدام است که در مقایسه با سایر روش‌ها، با نرخ همگرایی سریع‌تری صورت می‌پذیرد. گام بعدی در روش ارائه‌شده، اصلاح پاسخ به‌دست آمده است، تا پاسخی نزدیک به روش‌های شبیه‌سازی و تقریب مناسب را نتیجه دهد. به این منظور، تعدادی نمونه‌ی تصادفی حول نقطه‌ی طراحی تولید شده است، که این نقاط به وسیله ماتریس هسیان به‌دست آمده از روش SLSQP به فضای کاهش یافته و

جهت‌های اصلی انتقال پیدا کرده و در مرحله‌ی پایانی، با استفاده از روش میانگین مورد انتظار احتمالاتی، اصلاح پاسخ و افزایش دقت محاسباتی صورت پذیرفته است. لازم به ذکر است روش مذکور در مسائل، دارای تابع حالت حدی محدب و دارای یک نقطه‌ی طراحی، نتایج مطلوبی را نتیجه می‌دهد و با توجه به همگرایی سریع مناسب برای مسائل مهندسی، دارای تابع حالت حدی ضمنی است. این در حالی است که در مسائل دارای چند نقطه‌ی طراحی، روش اخیر فقط یک نقطه‌ی طراحی ارائه می‌دهد و توانایی یافتن تمامی نقاط طراحی را ندارد که این مورد از محدودیت‌های آن است. محدودیت بعدی روش SLSQP برای مسائل دارای متغیرهای همبسته با ضریب همبستگی غیرخطی است که به منظور برطرف کردن آن، نیاز به استفاده از روش توانمند تبدیل متغیرهای تصادفی است. به‌منظور بررسی جامع‌تر و درک بهتر مثال‌های ارائه شده در نوشتار حاضر و تعدادی از مثال‌های مهندسی حل شده با استفاده روش پیشنهادی، ابزار محاسباتی و نرم‌افزار با نام BI توسط نویسندگان نوشتار حاضر تهیه و در آدرس www.betaindexsoftware.com قرار داده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده از مثال‌های عددی، سرعت و پایداری روش ارائه شده تأیید شده است. از نظر دقت محاسباتی نیز راهکاری همچون به کارگیری روش میانگین مورد انتظار احتمالاتی در کنار استفاده از اطلاعات ماتریس هسیان معرفی شده است. ساختارسازی ارائه شده، این امکان را در اختیار پژوهشگران قرار می‌دهد تا در مسائل پیچیده و دارای دشواری‌های محاسباتی، یک ابزار توانمند و مقرون به صرفه از نقطه‌نظر حجم محاسباتی را در اختیار داشته باشند.

پانوشت‌ها

1. First Order Reliability Method (FORM)
2. Hasofer & Lind
3. Rackwitz & Flessler
4. Zhang & Kiureghian
5. Santos
6. Stability Transformation Method (STM)
7. Roudak
8. Meng
9. Gong
10. Keshtegar
11. Schittkowski
12. Kraft

منابع (References)

1. Chen, G. and Yang, D. “Direct probability integral method for stochastic response analysis of static and dynamic structural systems”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, **357**, p. 112612 (2019).
2. Dodwell, T.J., Kynaston, S., Butler, R. and et al. “Multilevel monte carlo simulations of composite structures with uncertain manufacturing defects”, *Probabilistic Eng. Mech*, **63**, p. 103116 (2021).
3. Yun, W., Lu, Z., Wang, L. and et al. “Error-based stopping criterion for the combined adaptive Kriging and importance sampling method for reliability analysis”, *Probabilistic Eng. Mech*, **65**, p. 103131 (2021).
4. Guo, Q., Liu, Y., Chen, B. and et al. “An active learning Kriging model combined with directional importance sampling method for efficient reliability analysis”, *Probabilistic Eng. Mech*, **60**, p. 103054 (2020).
5. Xu, Z., Cao, J., Zhang, G. and et al. “Active learning accelerated Monte-Carlo simulation based on the modified K-nearest neighbors algorithm and its application to reliability estimations”, Def Technol (In Press) (2022).
6. Betz, W., Papaioannou, I. and Straub, D. “Bayesian post-processing of monte carlo simulation in reliability analysis”, *Reliab. Eng. Syst. Saf*, **227**, p. 108731 (2022).
7. Xiao, S. and Nowak, W. “Reliability sensitivity analysis based on a two-stage Markov chain Monte Carlo simulation”, *Aerosp. Sci. Technol*, **130**, p. 107938 (2022).
8. Rahgozar, N., Pouraminian, M. and Rahgozar, N. “Reliability-based seismic assessment of controlled rocking steel cores”, *J. Build. Eng*, **44**, p. 102623 (2021).
9. Pouraminian, M. and Ekranejad, H. “Reliability analysis of concrete arch dam under stage construction and hydrostatic pressure by MCS and RS methods”, *Sharif J. Civ. Eng*, **37.2**(3.2-3), pp. 135-145 (2021).
10. Bjerager, P. “Probability integration by directional simulation”, *J. Eng. Mech*, **114**(8), pp. 1285-1302 (1988).
11. Engelund, S. and Rackwitz, R. “A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability”, *Struct. Saf*, **12**(4), pp. 255-276 (1993).
12. Hsu, W.C. and Ching, J. “Evaluating small failure probabilities of multiple limit states by parallel subset simulation”, *Probabilistic Eng. Mech*, **25**(3), pp. 291-304 (2010).
13. Au, S.-K. and Beck, J.L. “Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation”, *Probabilistic Eng. Mech*, **16**(4), pp. 263-277 (2001).
14. Breitung, K. “40 years FORM: Some new aspects”, *Probabilistic Eng. Mech*, 42, pp. 71-77 (2015).
15. Xiang, Y. and Liu, Y. “Application of inverse first-order reliability method for probabilistic fatigue life prediction”, *Probabilistic Eng. Mech*, **26**(2), pp. 148-156 (2015).
16. Zhao, Y.G., Zhang, X.Y. and Lu, ZH. “Complete monotonic expression of the fourth-moment normal transformation for structural reliability”, *Comput. Struct*, **196**, pp. 186-199 (2018).
17. Lutes, L.D. and Winterstein, S.R. “A dynamic inverse FORM method: Design contours for load combination problems”, *Probabilistic Eng. Mech*, **44**, pp. 118-127 (2016).

18. Hasofer, A.M. and Lind, N.C. "Exact and invariant second-moment code format", *J. Eng. Mech. Div*, **100**(1), pp. 111-121 (1974).
19. Rackwitz, R. and Flessler, B. "Structural reliability under combined random load sequences", *Comput. Struct*, **9**(5), pp. 489-494 (1978).
20. Zhang, Y. and Kiureghian, A. "Two improved algorithms for reliability analysis", Reliab. Optim. Struct. Syst., Boston, MA: Springer US, pp. 297-304 (1995).
21. Santos, S.R., Matioli, L.C. and Beck, A.T. "New optimization algorithms for structural reliability analysis", *C - Comput. Model Eng. Sci*, **83**, pp. 23-55 (2012).
22. Roudak, M.A., Shayanfar, M.A. and Karamloo, M. "Improvement in first-order reliability method using an adaptive chaos control factor", *Structures*, **16**, pp. 150-156 (2018).
23. Meng, Z., Li, G., Yang, D. and et al. "A new directional stability transformation method of chaos control for first order reliability analysis", *Struct. Multidiscip. Optim*, **55**, pp. 601-612 (2017).
24. Gong, J.-XX and Yi, P. "A robust iterative algorithm for structural reliability analysis", *Struct. Multidiscip. Optim*, **43**(4), pp. 519-527 (2011).
25. Keshtegar, B. "A hybrid conjugate finite-step length method for robust and efficient reliability analysis", *Appl. Math. Model*, **45**, pp. 226-237 (2017).
26. Wang, X., Zhao, W., Chen, Y. and et al. "A first order reliability method based on hybrid conjugate approach with adaptive Barzilai-Borwein steps", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, **401**, 115670 (2022).
27. Liu, P.L. and Der Kiureghian, A. "Optimization algorithms for structural reliability", *Struct. Saf*, **9**(3), pp. 161-177 (1991).
28. Lalee, M., Nocedal, J. and Plantenga, T. "On the implementation of an algorithm for large-scale equality constrained optimization", *SIAM J. Optim*, **8**(3), pp. 682-706 (1998).
29. Schittkowski, K. "A robust implementation of a sequential quadratic programming algorithm with successive error restoration", *Optim. Lett*, **5**, pp. 283-296 (2011).
30. Byrd, R.H., Hribar, M.E. and Nocedal, J. "An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming", *SIAM J. Optim*, **9**(4), pp. 877-900 (1999).
31. Schittkowski, K. "The nonlinear programming method of Wilson, Han, and powell with an augmented Lagrangian type line search function - Part 2: An efficient implementation with linear least squares subproblems", *Numer. Math*, **38**, pp. 115-127 (1982).
32. Kraft, D. "A software package for sequential quadratic programming", Koln, 88 (1988).
33. Lawson, C.L., Lawson, C.L. and Hanson, R.J. "Solving least squares problems", Prentice-Hall (1974).
34. Rashki, M. "Structural reliability reformulation", *Struct. Saf*, **88**, p. 102006 (2021).
35. Kang, S.B., Park, J.W. and Lee, I. "Accuracy improvement of the most probable point-based dimension reduction method using the hessian matrix", *Int. J. Numer. Methods Eng*, **111**(3), pp. 203-217 (2017).
36. Yang, M., Zhang, D. and Han, X. "New efficient and robust method for structural reliability analysis and its application in reliability-based design optimization", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, **366**, p. 113018 (2020).
37. Roudak, M.A. and Karamloo, M. "Establishment of non-negative constraint method as a robust and efficient first-order reliability method", *Appl. Math. Model*, **68**, pp. 281-305 (2019).
38. Jiang, C., Han, S., Ji, M. and et al. "A new method to solve the structural reliability index based on homotopy analysis", *Acta Mech*, **226**, pp. 1067-1083 (2015).
39. Zhao, Y.-G. and Ono, T. "New point estimates for probability moments", *J. Eng. Mech*, **126**, pp. 433-436 (2000).
40. Huang, P., Huang, H.Z. and Huang, T. "A novel algorithm for structural reliability analysis based on finite step length and Armijo line search", *Appl. Sci*, **9**(12), p. 2546 (2019).
41. Roudak, M.A., Shayanfar, M.A., Barkhordari, M.A. and et al. "A robust approximation method for nonlinear cases of structural reliability analysis", *Int. J. Mech. Sci*, **133**, pp. 11-20 (2017).
42. Gong, J., Yi, P. and Zhao, N. "Non-gradient-based algorithm for structural reliability analysis", *J. Eng. Mech*, **140**(6), 04014029 (2014).
43. Liu, B. and Xie, L. "An improved structural reliability analysis method based on local approximation and parallelization", *Mathematics*, **8**(2), p. 209 (2020).
44. Bichon, B.J., Eldred, M.S., Swiler, L.P. and et al. "Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions", *AIAA J*, **46**(10), pp. 2459-2468 (2008).
45. Keshtegar, B. and Chakraborty, S. "A hybrid self-adaptive conjugate first order reliability method for robust structural reliability analysis", *Appl. Math. Model*, **53**, pp. 319-332 (2018).