

اثرات تراکم پذیری سیال و مجاورت با گمانه بر شروع و گسترش ترک هیدرولیکی

علی لکی روحانی (استادیار)

دانشکده فنی، دانشگاه زنجان

احمد فهیمی فر (استاد)

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

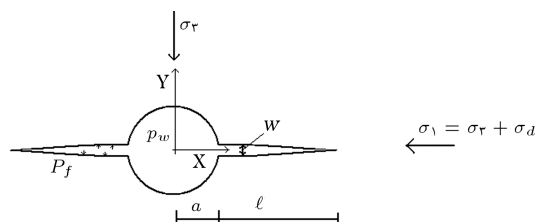
در این نوشتار مسئله‌ی ترک‌های هیدرولیکی مستقر در عرض یک گمانه، در حالت کرنش مسطح در محیط هموژن و کشسان نفوذناپذیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. اثرات تراکم‌پذیری سیال و مجاورت با گمانه به منظور توضیح فاز ناپایداری اولیه در گسترش ترک که طی آزمایش‌های آزمایشگاهی ریزترک برای تعیین تنش‌های برجا انجام می‌شود، در نظر گرفته می‌شوند. راه حل ارائه شده در این پژوهش با در نظر گرفتن فشار خالص سیال، طول و بازشدگی ترک است و مشاهده می‌شود که مسئله فقط بستگی دارد به گرانروی بی‌بعد و پارامتر دیگری که شامل اثر تراکم‌پذیری و اندازه‌ی گمانه است. در ادامه، حل مسئله برای سیال غیرگران‌رو که برای آن فشار داخل ترک یکنواخت است، منجر به شناسایی ناپایداری در مسئله بعد از شکست^۱ می‌شود. پتانسیل رشد ناپایدار ترک بستگی به نسبت طول ترک اولیه به شعاع گمانه، تراکم‌پذیری سیال، حجم سیال، و مدول کشسانی مصالح دارد.

واژگان کلیدی: شکست هیدرولیکی، شروع ترک، تراکم‌پذیری، گمانه.

rou001@znu.ac.ir
fahim@aut.ac.ir

۱. مقدمه

انجام آزمایش برای بررسی فرایند شکست هیدرولیکی تحت شرایط آزمایشگاهی باید به گونه‌ی باشد که ترک تحت شرایطی کنترل شده در نمونه گسترش یابد و با مرزهای خارجی نمونه اندرکنشی نداشته باشد. آزمایش‌های انجام شده روی سیال با گرانروی پایین به صورت نظام‌مند رشد ترک ناپایداری را دقیقاً بعد از شکست نمایش می‌دهند که طی آن افزایش خیلی سریع طول ترک و کاهش شدید فشار مشاهده می‌شود. مدل‌های عددی موجود در زمینه‌ی توصیف گسترش ترک‌های هیدرولیکی مبتنی بر سیال تراکم‌ناپذیر هستند که در آنها گمانه به صورت یک چشمه‌ی بسیار کوچک تزریق لحاظ شده است [۱-۳]. این مدل‌ها چون اثرات تراکم‌پذیری سیال و مشخصات گمانه در آنها لحاظ نشده است، برای تشریح شکست ترک و رشد ترک اولیه مناسب نیستند. در این نوشتار رشد و گسترش دو ترک شعاعی متقارن در عرض یک گمانه به شعاع محدود مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۱ هندسه‌ی گمانه‌ی به شعاع a و دو ترک شعاعی متقارن به طول ℓ ، که توسط تنش‌های میدانی σ_r و $\sigma_\theta = \sigma_r + \sigma_d$ فشار گمانه‌ی p_w ، و فشار داخل ترک p_f بارگذاری شده است، نشان داده شده است. در حالت مرزی که شعاع گمانه در مقایسه با طول ترک قابل اغماض است، مسئله به دو ترک دوبعدی متقارن و بدون حضور گمانه تبدیل می‌شود. فرضیات اساسی مسئله عبارت‌اند از: ۱. ترک در محیط کشسان خطی نفوذناپذیر توسط سیال تراکم‌پذیر نیوتنی گسترش می‌یابد؛ ۲. ترک کاملاً توسط سیال پر شده است و فاصله‌ی بین جلو سیال و رأس ترک نیست؛ ۳. ترک همواره در حالت تعادل پیش‌رونده است



شکل ۱. طرح شماتیک هندسه مسئله، گمانه با دو ترک شعاعی متقارن.

و گسترش آن به صورت شبه‌استاتیکی و تحت قوانین «مکانیک شکست کشسان خطی»^۲ صورت می‌پذیرد.

در ادامه، راه‌حلی ارائه می‌شود که در آن نقش تراکم‌پذیری سیال و اثر گمانه در مرحله‌ی اولیه‌ی گسترش ترک برحسب نسبت طول ترک به شعاع گمانه، بازشدگی ترک^۳، و فشار تزریق برای حالت ساده‌شده‌ی سیال غیرگران‌رو -- که از گردایان فشار آن در طول ترک چشم پوشی شده است -- بررسی شده است.

۲. مدل ریاضی ۲.۱. معادله‌ی کشسانی

اولین معادله‌ی ریاضی مورد استفاده، معادله‌ی انتگرالی کشسانی است که نشان‌گر رابطه‌ی بازشدگی ترک w و فشار خالص سیال p_f است. این معادله، با توجه به

تاریخ: دریافت ۱۳۸۵/۱۱/۱۶، داوری ۱۳۸۶/۹/۱۹، پذیرش ۱۳۸۷/۵/۸.

تقارن، برای ترک سمت راست عبارت است از: [۴]

$$(p_f(x, t) - \sigma_\tau) + (p_w - \sigma_\tau) h_1(x) - \sigma_d h_2(x) = \frac{E'}{4\pi} \int_a^{a+l} \frac{\partial w}{\partial \xi} \left[\frac{1}{x-\xi} + K(x, \xi) + \frac{1}{x+\xi} + K(x, -\xi) \right] d\xi \quad (1)$$

که در آن E' مدول یانگ محیط در حالت کرنش مسطح است و داریم $E' = E / (1 - \nu^2)$ (E مدول یانگ مطلق محیط و ν ضریب پواسون است). ξ نیز متغیر کمکی هم‌سو با x است و برای توابع h_1, h_2 داریم:

$$h_1(x) = \frac{a^2}{x^2}, \quad h_2(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{x^2} - 3 \frac{a^4}{x^4} \right)$$

معادله ۱ را می‌توان با برهم‌نهی جابه‌جایی‌های لبه‌یی جهش‌یافته^۴ به دست آورد. عبارت $\partial w / \partial \xi$ در انتگرال، در واقع چگالی جابه‌جایی^۵ است [۵]. عبارت داخل کروشه، هسته‌ی انتگرال است و عبارت اول آن، یعنی $(x - \xi)^{-1}$ ، هسته‌ی انتگرال کوشی^۶ ساده است که در تمام مسائل ترک صفحه‌یی وجود دارد و در نقطه‌ی $x = \xi$ منفرد است. عبارت متعارف $K(x, \xi)$ مربوط به اثرگمانه، و مقدار آن عبارت است از: [۶]

$$K(x, \xi) = -\frac{\xi}{\xi x - a^2} - \frac{\xi (\xi^2 - a^2)}{(\xi x - a^2)^2} + \frac{(\xi^2 - a^2)^2 a^2}{\xi (\xi x - a^2)^3} + \frac{\xi^2 - a^2}{\xi x^2}$$

(دو عبارت آخر، عبارات متناظر مربوط به اثر ترک سمت چپ هستند.)

۲.۲ معادله‌ی پویزنی^۷

طبق قانون پویزنی، نرخ جریان شعاعی (q) برابر است با: [۷]

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_f}{\partial x} \quad (2)$$

که در آن $\mu' = 12\mu$ و μ گرانروی دینامیک سیال است.

۳.۲ قانون بقای جرم و پیوستگی

طبق معادله‌ی پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

با ترکیب معادله‌ی پیوستگی و معادله‌ی پویزنی، معادله‌ی روان‌سازی^۸ (رابطه‌ی ۴) به دست می‌آید: [۷]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\mu'} \frac{\partial}{\partial x} \left(w^3 \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) \quad (4)$$

۴.۲ شرایط مرزی

شرط مرزی در رأس ترک، بازشدگی ترک و صفر بودن جریان در رأس ترک است. یعنی:

$$w = 0, \quad q = 0, \quad \text{at } x = \pm(l + a) \quad (5)$$

چون جلو سیال منطبق بر رأس ترک است پس شرایط مرزی خاصی برای فشار سیال در این نقاط وجود ندارد.

براساس مکانیک شکست کشسان خطی، مشخصه‌ی میدان تنش در نزدیکی رأس ترکی که در محیط کشسان خطی گسترش می‌یابد، منفرد بودن تابع آن از درجه‌ی عکس ریشه‌ی دوم است [۸]. بنابراین بازشدگی ترک در رأس با عبارت حدی ریشه‌ی دوم کلاسیک (رابطه‌ی ۶) بیان می‌شود:

$$w(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_I}{E'} \lim_{x \rightarrow (l+a)} \sqrt{(l+a) - x} \quad (6)$$

که در آن، K_I ضریب شدت تنش در حالت اول^۹ است.

شرط مرزی دیگر در رأس ترک، معیار گسترش ترک است. با این فرض که ترک به صورت شبه‌استاتیکی گسترش یابد، این شرط به صورت رابطه‌ی ۷ بیان می‌شود: [۹]

$$K_I = K_{Ic} \quad (7)$$

که در آن K_{Ic} نشان‌گر «سختی» یا چقرمگی^{۱۰} است، که یک پارامتر مرتبط با مواد و مصالح است و بیان‌گر مقدار بحرانی ضریب شدت تنش است که به‌ازاء آن ترک در حالت تعادل حدی گسترش می‌یابد.

در ادامه، پارامتر C_f به‌عنوان تراکم‌پذیری ظاهری سیستم تعریف می‌شود که نه‌تنها تراکم‌پذیری سیستم تزریق و گمانه، بلکه تراکم‌پذیری حجم سیال بالادست دهانه‌ی ترک را نیز شامل می‌شود. با فرض ثابت بودن تراکم‌پذیری سیستم، رابطه‌ی بین تغییر فشار در گمانه و تغییر حجم سیال به‌عملت تراکم‌پذیری به‌صورت رابطه‌ی ۸ بیان می‌شود:

$$\frac{dV_c}{dt} = -C_f V_c \frac{dp_w}{dt} \quad (8)$$

که در آن V_c حجم سیال اولیه در سیستم، تحت فشار خالص صفر است. با انتگرال‌گیری از معادله‌ی ۸، نسبت به زمان و با فرض شرایط اولیه‌ی مناسب، رابطه‌ی ۹ حاصل می‌شود:

$$V_c = -C_f V_c (p_w - \sigma_\tau) \quad (9)$$

شرط مرزی در دهانه‌ی ورودی ترک برحسب نرخ جریان که مؤلفه‌ی تراکم سیال را نیز شامل می‌شود، عبارت است از:

$$q = \frac{Q_0}{2} - \frac{1}{2} C_f V_c \frac{\partial p_w}{\partial t} \quad \text{at } x = a \quad (10)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی پیوستگی ۳ (نسبت به زمان و مکان) و استفاده از شرایط مرزی فوق، به معادله‌ی موازنه‌ی کلی حجم سیال می‌رسیم:

$$Q_0 t - C_f V_c (p_w - \sigma_\tau) = 2 \int_a^{a+l} w(x) dx \quad (11)$$

که در آن Q_0 دبی ورودی به سیستم است.

۳. مقیاس‌گذاری^{۱۱}

مقیاس‌گذاری مناسب برای مسئله‌ی مورد مطالعه باید از دو ویژگی برخوردار باشد: از طرفی باید بازتاب فرایند اتفاق افتاده طی شروع و گسترش ترک هیدرولیکی باشد،

(U_k) و تنش انحرافی میدانی بی بعد (S_k) ، مجدداً تعریف کرد:

$$A_k = a \left(\frac{K'}{E' Q_0 t} \right)^{1/\tau}, \quad M_k = \mu' \left(\frac{E' Q_0}{K' \tau} \right), \quad (16)$$

$$U_k = C_f V_0 \left(\frac{K'}{E' \tau Q_0 t} \right)^{1/\tau}, \quad S_k = \sigma_d \left(\frac{E' Q_0 t}{K' \tau} \right)^{1/\tau}$$

بنابراین مقادیر میدانی Ψ ، Π ، Ω تابعی از مختصات بی بعد (ζ) ، گران روی بی بعد (M_k) و سه پارامتر گسترش A_k ، U_k و S_k هستند و در نتیجه:

$$\ell(t) = L \gamma_k(A_k, M_k, U_k, S_k), \quad (17)$$

$$w(x, t) = \varepsilon L \Omega_k(\zeta; A_k, M_k, U_k, S_k),$$

$$p(x, t) = \varepsilon E' \Pi_k(\zeta; A_k, M_k, U_k, S_k),$$

$$q(x, t) = Q_0 \Psi_k(\zeta; A_k, M_k, U_k, S_k).$$

با دقت به پارامترهای گسترش در رابطه ی ۱۷، مشاهده می شود که M_k ثابت، و سه پارامتر A_k ، U_k و S_k به صورت توابع نمای از زمان تریق (t) و ضرایب به دست آمده از ترکیب پارامترهای فیزیکی مسئله هستند. پس بهتر است پارامترهای گسترش براساس مقیاس زمانی^{۱۶} معرفی شوند، یعنی:

$$U_k = \left(\frac{t_1}{t} \right)^{1/\tau} = \tau^{-1/\tau}, \quad A_k = \left(\frac{t_1}{t} \right)^{1/\tau} = \eta \tau^{-1/\tau}, \quad (18)$$

$$S_k = \theta \tau^{-1/\tau}$$

که در آن:

$$t_1 = \frac{(C_f V_0)^{\tau/\tau} K'}{E' \tau Q_0}, \quad t_2 = \frac{a^{\tau/\tau} K'}{E' Q_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_1}, \quad (19)$$

$$\eta = \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^{1/\tau} = \frac{a}{(E' C_f V_0)^{1/\tau}}, \quad \theta = \sigma_d \frac{(E' U)^{1/\tau}}{K'}$$

با توجه به این که A_k یک تابع نمای از زمان با توان منفی است، وقتی که زمان به بی نهایت میل کند، A_k به سمت صفر و مسئله به دو ترک دوبعدی متقارن بدون حضور گمانه، تبدیل می شود.

۴. حالت خاص، سیال غیر گران رو

در ادامه، حل مسئله ی ترک هیدرولیکی پیش رفته توسط سیال غیر گران رو، در محیط کشسان خطی نفوذناپذیر با در نظر گرفتن اثرات تراکم پذیری بالادست در شرایط مرزی دهانه ی ترک، دنبال شده است.

۱.۴. فرمولاسیون برای سیال غیر گران رو

عبارات خاصی که در این حالت مورد استفاده قرار می گیرند به راحتی از معادلات حاکمه که پیش از این ارائه شد استنتاج می شوند. از آنجا که سیال گران رو نیست، فشار داخل ترک یکنواخت است. بر این اساس، مدل فوق به سه دسته معادله -- معادله ی کشسان برای حجم ترک، موازنه ی کلی حجم سیال (بقای جرم)، و شرط گسترش ترک -- کاهش می یابد. در اینجا تعریف ضریب شدت تنش (K_I) و حجم ترک (V_f) برحسب مقادیر معادل آن برای ترک گرفتاریت، ضرورت می یابد:

$$K_I = (p_f \setminus (\beta) - \sigma_d f_2 (\beta)) K_{I*} \quad (20)$$

$$V_f = (p_g \setminus (\beta) - \sigma_d g_2 (\beta)) V_{f*} \quad (21)$$

و از طرف دیگر باید متغیرهای مسئله را به مقادیر بی بعد از درجه ی (1) کاهش دهد. طبق روش پیشنهادی محققین، بازشدگی ترک $w(x, t)$ ، فشار خالص سیال $p(x, t) = p_f(x, t) - \sigma_\tau$ ، نرخ جریان $q(x, t)$ و طول ترک $\ell(t)$ ، را چنین تعریف می کنیم:^{۱۰}

$$w = \varepsilon L \Omega, \quad p = \varepsilon E' \Pi, \quad q = Q_0 \Psi, \quad \ell = L \gamma \quad (12)$$

که در آن ها $\varepsilon(t)$ یک پارامتر کوچک، و $L(t)$ مقیاس طول است. Ω ، Ψ ، Π ، γ نیز به ترتیب عبارت اند از: بازشدگی ترک بی بعد، فشار خالص بی بعد، نرخ جریان و طول ترک بی بعد.

با تعریف مختصات شعاعی بی بعد $\zeta = \frac{x-a}{\ell}$ ، بازنویسی معادلات حاکمه برحسب مقادیر بی بعد Ω ، Ψ ، Π ، γ ، ما را به شناسایی شش گروه بی بعد در معادلات حاکمه رهنمون می شود:

$$G_a = \frac{a}{L}, \quad G_m = \frac{\mu'}{\varepsilon^\tau E' t}, \quad G_k = \frac{K'}{\varepsilon L \tau E'}, \quad (13)$$

$$G_v = \frac{Q_0 t}{\varepsilon L}, \quad G_u = \frac{\varepsilon C_f V_0 E'}{Q_0 t}, \quad G_s = \frac{\sigma_d}{\varepsilon E'}$$

که در آن:

$$K' = \frac{\lambda}{\sqrt{\tau \pi}} K_{Ic} \quad (14)$$

همچنین گروه های G_k ، G_m مربوط به فرایندهای اتلاف انرژی هستند درحالی که گروه های G_u ، G_v مربوط به ذخیره ی سیال^{۱۲}، گروه G_a مربوط به اثر شعاع گمانه، و گروه G_s مربوط به تنش انحرافی میدانی هستند. در حقیقت G_m به معنی گران روی، G_k سختی، G_v ذخیره ی سیال در ترک، و G_u ذخیره ی سیال در گمانه به علت اثرات تراکم پذیری است.

چهار نوع مقیاس گذاری^{۱۳} خاص می توان تعریف کرد که هر یک رژیم گسترش خاصی را تعریف می کند. در هر رژیم گسترش یک گروه ذخیره ی سیال و یک گروه اتلاف انرژی بر دیگر گروه ها غلبه دارد. برای این کار، یکی از گروه های مربوط به اتلاف انرژی -- یعنی G_k یا G_m -- مساوی ۱ در نظر گرفته شده، و نیز گروه های مربوط به ذخیره ی سیال -- یعنی G_u ، G_v -- مساوی ۱ یا معادل هم در نظر گرفته شده اند تا از این طریق به عبارات معینی برای پارامتر کوچک $\varepsilon(t)$ و مقیاس طول $L(t)$ برسیم. پارامترهای باقی مانده «پارامترهای گسترش^{۱۴}» نامیده شده اند. معرفی مقیاس گذاری های متفاوت ما را در مطالعه ی حالت های خاصی کمک می کند که در آنها بدون ساده کردن معادلات، یک یا دو تا از پارامترهای گسترش معادل صفر هستند.

۱.۳. مقیاس گذاری^{۱۵} K

مقیاس گذاری مناسب برای رژیم گسترشی که در آن سختی یا چقرمگی غالب باشد از طریق مساوی ۱ قراردادن G_k و G_v به دست می آید. با این کار به رابطه های ۱۵ برای ε و L دست می یابیم:

$$\varepsilon = \left(\frac{K' \tau}{E' \tau Q_0 t} \right)^{1/\tau}, \quad L = \left(\frac{E' Q_0 t}{K'} \right)^{1/\tau} \quad (15)$$

با به دست آوردن دو پارامتر فوق اکنون می توان G_a ، G_m ، G_u و G_s را به عنوان اثر شعاع گمانه ی بی بعد (A_k) ، گران روی بی بعد (M_k) ، ضریب تراکم پذیری بی بعد

می آید. با ذکر این نکته که حد به دست آمده برای زمان های بزرگ معادل حل برای ترک گرفتاری است^[۱۲]، این مقادیر عبارتند از:

$$\gamma_k \sim \frac{2}{\pi^{1/2}} \tau, \quad \Pi_k \sim \frac{\pi^{1/2}}{\lambda} \quad \text{for } \tau \gg 1$$

$$\gamma_k \sim \frac{1}{2^{5/2} f_1(\beta)} \tau^{-1/2}, \quad \Pi_k \sim \tau^{2/3} \quad \text{for } \tau \ll 1 \quad (30)$$

۳.۴. بررسی نتایج

برای انجام حل عددی ارائه شده در بالا، برنامه‌ی رایانه‌ی نوشته شده در بخش قبل را برای به دست آوردن توابع عددی f_1, g_1, f_2, g_2 با استفاده از روش ناپیوستگی در جابه‌جایی گسترش می‌دهیم^[۴]. به کمک برنامه‌ی نوشته شده توسط مؤلف، تحلیل عددی مسئله شروع، و دو ترک هیدرولیکی متقارن قرار گرفته در عرض یک گمانه توسط سیال غیرگران‌روی -- با در نظر گرفتن اثرات تراکم پذیری -- گسترش داده می‌شود. ابتدا حل را برای حالت بدون تنش میدانی انحرافی (یعنی $\theta = 0$) انجام می‌دهیم. همچنین در این تحلیل مقدار η معادل $\eta/4$ انتخاب شده است.

شکل‌های ۲ تا ۴ نشان‌گر Π_k و γ_k در مقابل زمان بی‌بعد τ هستند که همراه با حد زمان‌های بزرگ و کوچک (خط چین) نمایش داده شده‌اند. چنان‌که ملاحظه می‌شود ویژگی اصلی این حل، دوشاخه بودن نمودارها است که اشاره به وجود دو

که در آنها K_{I*} و V_{f*} ضریب شدت تنش و حجم ترک برای ترک گرفتاری با فشار واحد هستند، و $\beta = \frac{t}{a}$ نسبت طول ترک به شعاع گمانه است. سری توابع $f_1(\beta), f_2(\beta), g_1(\beta), g_2(\beta)$ به نحوی تعریف می‌شوند که اگر $\beta = 0$ به ترک لبه‌یی^[۱۷]، و اگر $\beta = \infty$ به ترک گرفتاری محدود می‌شوند. این توابع براساس حل عددی معادله‌ی کشسانی با روش ناپیوستگی در جابه‌جایی^[۱۸] و به کمک برنامه‌ی رایانه‌ی نوشته شده توسط مؤلف، به دست می‌آیند^[۴].

با چشم‌پوشی از تنش انحرافی میدانی، و جایگذاری مقادیر ضریب شدت تنش و حجم ترک برای ترک گرفتاری با فشار یکنواخت و واحد در معادلات بالا و اعمال شرط گسترش ترک (رابطه‌ی ۷)، روابط ۲۲ و ۲۳ به دست می‌آیند:

$$p = \frac{K'}{2^{5/2} f_1(\beta) \sqrt{\ell}} \quad (22)$$

$$V_f = \frac{2p \pi g_1(\beta) \ell^2}{E'} \quad (23)$$

این دو معادله همراه با معادله‌ی موازنه‌ی کلی حجم:

$$V_f = Q_v t - C_f V_v p \quad (24)$$

گسترش ترک را برای یک ترک با طول اولیه‌ی مشخص به‌طور کامل تعریف می‌کنند.

۲.۴. حل در مقیاس‌گذاری K

به راحتی می‌توان راه حل ارائه شده را در مقیاس‌گذاری K، که پیش‌تر تعریف شد، به دست آورد. در این مقیاس‌گذاری، حل مسئله در فضای پارامتریک یعنی طول ترک $\gamma_k(\tau; A_k)$ و فشار خالص $\Pi_k(\tau; A_k)$ فقط بستگی به زمان بی‌بعد (τ) و شعاع گمانه‌ی بی‌بعد (A_k) دارد.

$$\tau = \frac{t}{t_1}, \quad A_k = \frac{a}{L} \quad (25)$$

که در حالت حدی وقتی که $A_k \rightarrow 0$ مسئله به ترک گرفتاری تبدیل می‌شود. اساساً مدل بدون گران‌روی ترکیبی است از معیار گسترش ترک:

$$\Pi_k = \frac{1}{2^{5/2} \gamma_k^{1/2} f_1(\gamma_k/A_k)} \quad (26)$$

و معادله‌ی دیگری که ترکیبی است از معادله‌ی کلی موازنه‌ی حجم سیال (رابطه‌ی ۲۴) و عبارت کشسانی برای حجم ترک تحت فشار یکنواخت (رابطه‌ی ۲۳):

$$\Pi_k = \frac{1}{2g_1(\gamma_k/A_k) \pi \gamma_k^2 + \tau^{-2/3}} \quad (27)$$

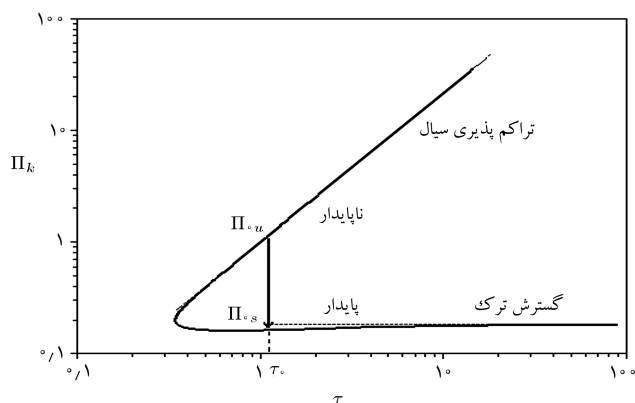
که در آن β طول ترک به‌هنگار در مقیاس‌گذاری K، برابر است با:

$$\beta = \frac{\gamma_k}{A_k} \quad (28)$$

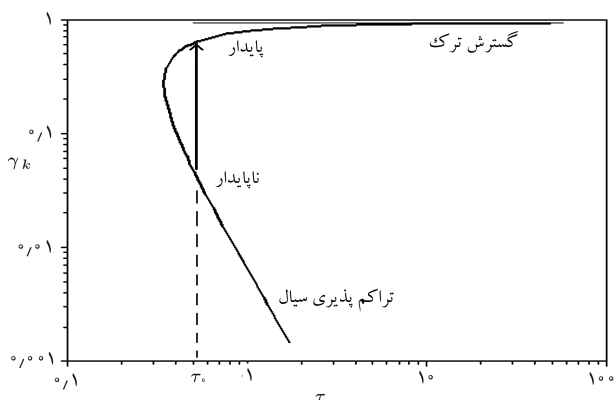
با حذف Π_k از دو رابطه‌ی ۲۶ و ۲۷، به رابطه‌ی ۲۹ (برای زمان τ) می‌رسیم:

$$\tau = \left(2^{5/2} \gamma_k^{1/2} f_1(\gamma_k/A_k) - 2g_1(\gamma_k/A_k) \pi \gamma_k^2 \right)^{-2/3} \quad (29)$$

و با جایگذاری τ در هر یک از روابط ۲۶ یا ۲۷ به عبارتی ضمنی برای مقدار Π_k می‌رسیم. حد γ_k و Π_k برای زمان‌های بزرگ^[۱۹] و زمان‌های کوچک به دست



شکل ۲. منحنی فشار بی‌بعد نسبت به زمان τ .



شکل ۳. منحنی طول ترک بی‌بعد نسبت به زمان τ .

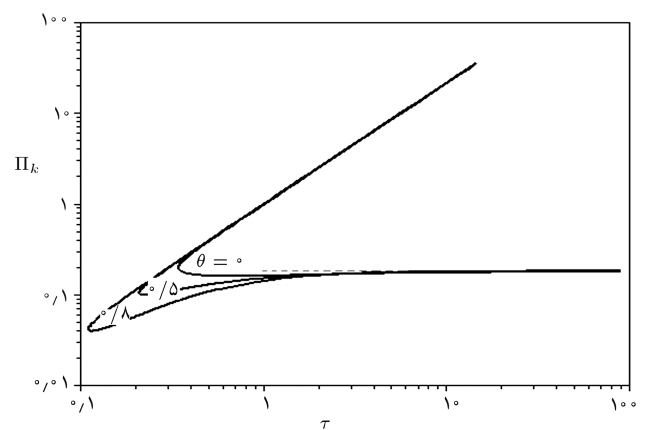
دارد. اگر طول ترک اولیه کوچک باشد، سطح فشار بالایی برای ارضاء شرط گسترش ترک نیاز است. ترک‌های اولیه بزرگ‌تر آسان‌تر گسترش پیدا می‌کنند، اما زمان بیشتری برای پرشدن ترک و رسیدن به فشار شکست لازم است.

با دقت در نمودار فشار بی‌بعد نسبت به زمان (شکل ۲) درمی‌یابیم که اگر حل اولیه، $\Pi_0(\tau_0)$ ، روی شاخه‌ی بالایی قرار گرفته باشد، به محض ارضاء شرط گسترش ترک، حل به‌طور ناگهانی از $\Pi_{0,u}(\tau_0)$ به $\Pi_{0,s}(\tau_0)$ پرش می‌کند و فاز گسترش اولیه ناپایدار است. اما اگر حل اولیه روی شاخه‌ی پایینی قرار گرفته باشد، گسترش ترک همواره پایدار است. شاخه‌ی بالایی فقط شروع ترک را نشان می‌دهد و گسترش ترک بر روی شاخه‌ی پایینی قرار می‌گیرد.

در شکل ۴ فشار بی‌بعد شده (Π_k) در مقابل زمان (τ) به‌ازاء مقادیر مختلف θ (تنش انحرافی بی‌بعد) نمایش داده شده است. چنان‌که دیده می‌شود با افزایش تنش انحرافی، مقدار فشار شکست کاهش می‌یابد و ترک در زمان کم‌تری به شکست می‌رسد.

۵. نتیجه‌گیری

در ابتدا مدل ریاضی برای گسترش ترک شعاعی از گمانه با شعاع محدود ارائه شد. در این مدل اثرات تراکم‌پذیری سیال و گمانه منظور شده است. پس از مقیاس‌گذاری ملاحظه شد که جواب فقط بستگی دارد به گرانروی بی‌بعد شده و پارامتر بی‌بعد دیگری که اثر تراکم‌پذیری و گمانه را در بر می‌گیرد. در واقع تمام پارامترهای مؤثر در مسئله در این دو پارامتر جمع می‌شوند. سپس با حل مسئله برای حالت خاص سیال غیرگرانروی، مدل موفق به پیش‌بینی رشد ناپایدار اولیه‌ی ترک درست بعد از شکست می‌شود. رژیم گسترش پایدار ترک که در امتداد رشد ناپایدار اولیه صورت می‌گیرد، به‌نحو مناسبی توسط مدل توصیف می‌شود. در نهایت مسئله برای مقادیر مختلف تنش انحرافی بی‌بعد شده حل شد و دیده شد که با افزایش تنش انحرافی از مقدار فشار شکست کاسته می‌شود و شکست زودتر و سریع‌تر اتفاق می‌افتد.



شکل ۴. منحنی فشار بی‌بعد نسبت به زمان τ برای مقادیر مختلف تنش انحرافی.

جواب ممکن برای زمان یکسان τ دارد؛ و این خود نشان‌گر ناپایداری است. شاخه‌ی بالایی در نمودار فشار - زمان متناظر با شاخه‌ی پایینی در نمودار طول ترک بی‌بعد - زمان است و مناسب ترک‌های اولیه‌ی کوچک با فشار بالا است. برعکس شاخه‌ی پایینی نمودار فشار - زمان معادل با شاخه‌ی بالایی نمودار طول ترک - زمان، متناظر با ترک‌های بزرگ‌تر با فشار کم‌تر است.

فرض بر آن است که در مبدأ زمان فشار خالص در ترک اولیه معادل صفر باشد. سیستم معادلات حاکمه فقط برای بعد از شکست کاربرد دارند، یعنی زمانی که ترک اولیه شروع به گسترش می‌کند، (چون سیال غیرگرانروی است، شکست ترک منطبق با شروع ترک است). یعنی راه حل فوق، فقط برای بعد از شروع شکست معنی‌دار است. زمان تزریق مورد نیاز برای رسیدن به شروع ترک بستگی به نرخ تزریق سیال، سیستم تراکم‌پذیری سیال، سختی مصالح و طول ترک اولیه دارد.

اگر اثرات تراکم‌پذیری سیال زیاد باشد، فشار به‌آرامی افزایش می‌یابد و زمان تزریق طولانی برای متراکم کردن سیال و رسیدن به فشار شکست (Π_0) ضرورت

پانویس

18. displacement discontinuity method (DD method)
19. large time asymptotic

منابع

1. Desroches, J., and Thiercelin, M. "Modeling propagation and closure of micro-hydraulic fractures", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **30**, pp. 1231-1234 (1993).
2. Garagash, D. "Plane strain propagation of a hydraulic fracture: large toughness solution", *Engineering Fracture Mechanics* (2004).
3. Perkins, T., and Kern, L. "Widths of hydraulic fractures", *J. Pet. Tech., Trans. AIME*, **222**, pp. 937-949 (1961).
4. Lakirouhani, A. "Modeling initiation and propagation of hydraulic fractures from a wellbore", Amirkabir university of technology, PhD thesis (2007).

5. Bilby, B., and Eshelby J. "Dislocation and the theory of fracture", *In H. Liebowitz (Ed), Fracture, an Advanced Treatise*, **I**, Chapter 2, pp. 99-182. New York NY: Academic Press (1968).
6. Hills, D.; Kelly, P.; Dai, D., and Korsunsky, A. "Solution of cracks problems". The Distributed dislocation technique, **44** of *Solid mechanics and applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publ (1996).
7. Batchelor, G. "An introduction to fluid dynamics", Cambridge UK: Cambridge University Press (1967).
8. Rice, J. "Mathematical analysis in the mechanics of fracture", New York, NY: Academic Press, *In H. Liebowitz (Ed.) Fracture, an Advance Treatise*, **II**, Chapter 3, pp. 191-311 (1968).
9. Kanninen, M., and Popelar, C. "Advanced fracture mechanics", **15** of *the Oxford Engineering Science Series*, Oxford University Press, Oxford, UK (1985).
10. Detournay, E. "Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks", *Int J. Geomech*, pp. 1-11 (2004).
11. Crouch, S., and Starfield, A. "Boundary element methods in solid mechanics", London: Unwin Hyman (1983).
12. Perkins, T., and Kern, L. "Widths of hydraulic fractures", *J. Pet. Tech.*, *Trans. AIME* 222, pp. 937-949 (1961).