

حل دقیق ارتعاش آزاد صفحات ایزوتروپ مستطیلی ضخیم بر روی تکیه‌گاه‌های ساده با استفاده از توابع پتانسیل تغییر مکان

بهرام نوائی نیا (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

مهندسی عمران شریف، بهار ۱۳۹۳ (ص ۳۳-۴۱)
دوری ۲-۳۰، شماره ۱/۲، ص ۳۳-۴۱

در این نوشتار، با استفاده از توابع پتانسیل تغییر مکان، حل دقیق ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی ایزوتروپ همگن با ضخامت دلخواه ولی ثابت بر روی چهار لبه‌ی ساده ارائه شده و تابع پتانسیل تغییر مکان و به کمک آن معادله‌ی مشخصه‌ی ارتعاش آزاد صفحه با حل دو معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ی حاکم از مرتبه‌ی ۴ و ۲ به روش جداسازی متغیرها و اعمال شرایط مرزی به دست آمده است. ویژگی عمده‌ی این پژوهش، عدم وجود محدودیت ضخامت و اعتبار آن برای صفحات نازک، ضخیم نسبی و ضخیم است. به منظور اعتبارسنجی، نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج به دست آمده از سایر کارهای تحلیلی، که عمدتاً مربوط به صفحات ضخیم نسبی متکی بر نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و بالاتر بوده مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت بسامد بدون بعد کاهش که مقدار این کاهش در مدهای بالاتر ارتعاشی با شدت بیشتری همراه است.

واژگان کلیدی: حل دقیق، صفحات مستطیلی ضخیم، تابع پتانسیل تغییر مکان، ارتعاش آزاد، مسئله‌ی سه بعدی کشسانی.

navayi@nit.ac.ir

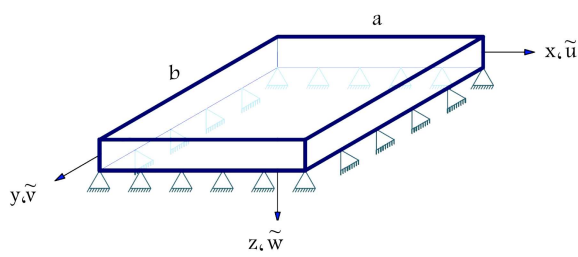
۱. مقدمه

ورق‌های مستطیلی به دلیل کاربرد وسیعشان در زیرشاخه‌های مختلف مهندسی نظیر عمران و مکانیک همواره مورد توجه طراحان و پژوهشگران بوده است. تحلیل این سازه‌ها با ضخامت کم، حتی در حالت استاتیکی، به دلیل رفتار دو بعدی آنها در قیاس با تیرها پیچیده‌تر است. این پیچیدگی با افزایش ضخامت سازه و نیز اضافه شدن پارامتر زمان در تحلیل دینامیکی و با بررسی رفتار ارتعاش آزاد آنها به مراتب بیشتر می‌شود. از طرف دیگر، سازه‌های ضخیم به دلیل اهمیت کرنش برشی و پیچیدگی اثر آن در روابط، همچنان مورد توجه پژوهشگران است. برای صفحات ضخیم تعریف دقیق و جامعی وجود ندارد، به طوری که در برخی پژوهش‌ها نسبت ضخامت (t) به کوچک‌ترین بعد صفحه (L) برای بازه‌ی $\frac{1}{10} < \frac{t}{L} < \frac{1}{5}$ صفحه‌ی نازک معرفی شده است، که در آن‌ها علی‌رغم صرف نظر کردن از کرنش‌های برشی، دقت نتایج به دست آمده قابل قبول است.^[۱-۳] فرمول بندی ارتعاش غشاها ($\frac{t}{L} < \frac{1}{10}$) توسط اوایلر^۱ (۱۷۶۶) را می‌توان جزء اولین کارها در خصوص ارتعاش مسائل دو بعدی دانست، که برنولی^۲ برای صفحات تعمیم داد. در اوایل قرن نوزدهم نیز با تعیین چند مود ارتعاش آزاد یک ورق مربعی، انگیزه‌ی جدی در بررسی ارتعاش صفحات ایجاد شد.^[۴] همچنین در تحقیقی دیگر روش کلی حل برای بسامد طبیعی یک سازه‌ی دلخواه توسط رایلی معرفی شد،^[۵] همچنین روش رایلی با فرض مجموعه‌ی بی‌نهایت

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۸/۱۱/۱۳۹۰، اصلاحیه ۱۱/۱۰/۱۳۹۱، پذیرش ۲۴/۱۰/۱۳۹۱.

در پژوهش‌های دیگری ارتعاش آزاد صفحات میندیلین مستطیلی روی تکیه‌گاه‌های



شکل ۱. صفحه‌ی مستطیلی با تغییرمکان در امتداد محورهای مختصات.

محدودیت در ضخامت برای هر نسبت $\frac{t}{L}$ تعیین کرد.

۲. تئوری

صفحه‌ی مستطیلی همسان‌گرد با رفتار خطی در حال ارتعاش آزاد بر روی تکیه‌گاه ساده در مختصات کارتزین مطابق شکل ۱ که در آن محورهای x, y, z به ترتیب در امتداد طول، عرض، و ضخامت صفحه بوده و دارای ابعاد a, b, t است، را در نظر می‌گیریم. تغییرمکان یک محیط دلخواه همسان‌گرد بر حسب توابع پتانسیل $\tilde{\chi}(x, y, z, T)$ و $\tilde{F}(x, y, z, T)$ در غیاب نیروهای جسمی از روابط ۱ تبعیت می‌کنند: [۲۲]

$$\begin{cases} \tilde{u}(x, y, z, T) = -\alpha_1 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial y} \\ \tilde{v}(x, y, z, T) = -\alpha_1 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial x} \\ \tilde{w}(x, y, z, T) = \alpha_2 \nabla_{xy}^2 \tilde{F} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial z^2} - \alpha_3 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1)$$

که در این رابطه، $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ و $\tilde{\chi}$ تغییرمکان‌ها به ترتیب در جهت محورهای x, y و z متغیر زمان، ∇_{xy}^2 (اپراتور دیفرانسیلی) و α_1 از رابطه‌های ۲ و ۳ به دست می‌آید:

$$\nabla_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad \alpha_3 = \frac{\rho}{\mu} \quad (3)$$

که در آنها μ و λ ضرایب لامه و ρ جرم حجمی هستند.

معادلات دیفرانسیل حاکم در این حالت از رابطه‌ی ۴ به دست می‌آید: [۲۲]

$$\begin{cases} \nabla_1^2 \nabla_1^2 \tilde{F} = 0 \\ \nabla_2^2 \tilde{\chi} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

که اپراتورها در آن از روابط ۵ و ۶ به دست می‌آیند:

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (6)$$

در این روابط، C_1^2, C_2^2 سرعت امواج حجمی و برشی هستند، که از روابط ۷ و ۸ بر حسب ضرایب لامه قابل بیان هستند:

$$C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (7)$$

$$C_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (8)$$

ساده و نیز روی دو لبه‌ی موازی ساده و دو لبه‌ی آزاد، [۲۲] و یک تئوری سه‌بعدی کشسانی به منظور مطالعه‌ی ارتعاش آزاد صفحات ضخیم همگن مرکب مستطیلی بر روی تکیه‌گاه ساده ارائه شده است. [۲۵] در پژوهشی نیز با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌ی بالاتر، پیشنهاد شده [۲۶] در پژوهشی دیگر، [۲۷] پایداری و کماتش صفحات ایزوتروپ، ارتوتروپ و مرکب را بررسی کردند و نتیجه گرفتند که تئوری مورد استفاده‌ی آنها دارای دقت بیشتری نسبت به تئوری برشی مرتبه‌ی اول است. همچنین ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی به روش رایلی - ریتز و تئوری‌های مختلف بررسی و نقاط ضعف و قوت آنها مورد توجه قرار گرفته است. [۲۸، ۲۹] در پژوهش‌هایی نیز مطالعات نسبتاً جامعی به منظور بررسی رفتار ارتعاشی صفحات مندلین مستطیلی با شرایط مختلف تکیه‌گاهی ممکن لبه‌ی و داخلی انجام شد، [۲۲-۲۴] و همچنین رفتار ارتعاشی صفحات مندلین مستطیلی تحت ارتعاش محوری بررسی شد. [۲۵] رابطه‌ی دقیق بین بسامد ارتعاشی تئوری صفحات کیرچهوف^۷ و تئوری صفحه‌ی میندلین^۸ برای صفحات مستطیلی بر روی تکیه‌گاه ساده جهت برآورد بسامد طبیعی صفحات با هندسه‌ی پیچیده‌تر ارائه شد. [۲۶] همچنین در پژوهشی با استفاده از مجموعه‌ی توابع تیر تیموشنکو به روش رایلی - ریتز ارتعاش آزاد صفحات نسبی ضخیم مورد بررسی قرار گرفت. [۲۷] پژوهشگرانی هم روش تحلیل بر اساس تئوری برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل ارتعاش آزاد صفحات همسان‌گرد عرضی و در حالت خاص برای صفحات همسان‌گرد را ارائه کردند. [۲۸] در پژوهشی هم به کمک تئوری مندلین ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی با شرایط لبه‌ی مختلف مورد بررسی قرار گرفت و نتایج کار با کارهای تحلیلی و عددی بعضی پژوهشگران مقایسه شد. [۲۹]

استفاده از توابع پتانسیل به خصوص توابع پتانسیل تغییرمکان در حل مسائل کشسانی سه بعدی بسیار کارا و مؤثر است. مجموعه‌ی شناخته‌شده‌ی این توابع پتانسیل تغییرمکان عبارت‌اند از: بوسینسک، گالرکین، لائو، پاکوویچ - نوبر، و دیگر توابع شناخته‌شده‌ی تغییرمکان که با هم رابطه دارند و از یک‌دیگر قابل حصول هستند. [۳۰] در پژوهشی نیز توابع هارمونیک حل کشسانی سه بعدی پاکوویچ - نوبر برای حل صفحات به‌کار گرفته شد. [۳۱] پژوهشگرانی هم با آنالیز تغییرشکل‌های بی‌نهایت کوچک، حل خمش صفحه‌ی کشسان ایزوتروپ ضخیم را به کمک تئوری مرتبه‌ی بالای برشی و نرمال به دست آوردند، [۳۲] و یا با به‌کارگیری مبانی سه بعدی تئوری کشسانی به جای فرضیات متداول صفحه، روش یادشده را برای تحلیل استاتیکی صفحات ضخیم تعمیم دادند. [۳۳] پژوهشگر دیگری نیز یکتایی و کامل بودن چهار مجموعه‌ی توابع پتانسیل را در کاربردهایش برای یک مسئله‌ی کلی بدون شرط تقارن محوری در حالت کلی مختصات استوانه‌ی ارائه کرد. [۳۰] و نشان داد که حل لائو ارتقاء یافته برای هر میدان تغییرمکان برای کلیه‌ی مسائل می‌تواند معرفی شود و لذا کلی‌تر از حل لائو برای مسائل غیرمتقارن محوری است، که فقط می‌تواند میدان‌های تغییرمکان را با چرخش آزاد حول محور ضخامت معرفی کند. توابع پتانسیل اسکندری قادی که با تعمیم توابع پتانسیل حاکم بر محیط‌های همسان‌گرد جانبی از حالت استاتیکی به دینامیکی معرفی شده است، [۳۴] در تحلیل محیط‌های بی‌نهایت و نیمه بی‌نهایت به‌طور وسیعی به‌کار گرفته شده است. [۲۷-۲۵] این توابع پتانسیل در تحلیل خمشی صفحات مستطیلی همسان‌گرد عرضی برای اولین بار در سال ۲۰۱۱ با موفقیت به‌کار برده شد. [۳۸]

در این پژوهش با استفاده از توابع پتانسیل اسکندری قادی، حل دقیق معادلات سه بعدی کشسانی ارتعاش آزاد صفحات ایزوتروپ مستطیلی با ضخامت ثابت بر روی تکیه‌گاه‌های ساده ارائه شده است، که ضمن اقتناع معادلات دیفرانسیل حاکم، شرایط مرزی را دقیقاً رعایت می‌کند. ویژگی عمده‌ی روش ارائه‌شده در آن است که بدون فرض ساده‌شده‌ی خاصی نظیر توزیع فرضی تنش یا تغییرمکان در ضخامت صفحه و یا اعمال ضریب تصحیح برش می‌توان بسامد ارتعاش آزاد صفحه را بدون

مطابق شکل ۱ برای صفحات مستطیلی با تکیه‌گاه ساده شرایط هندسی خاصی باید اقلان شوند (رابطه‌ی ۲۰):

$$\begin{cases} x = 0, & a \\ y = 0, & b \end{cases} : \quad w = 0 \quad (20)$$

با استفاده از معادله‌ی ۱۱ و اقلان شرایط مرزی هندسی، می‌توان نتیجه گرفت که ضرایب c_1 و c_2 صفر و روابط ۲۱ باید برقرار باشند:

$$\begin{cases} \alpha = m\pi/a \\ \beta = n\pi/b \end{cases} \quad (21)$$

که در آن m و n اعداد صحیح بزرگ‌تر از ۰ هستند و لذا حل را می‌توان به فرم سری و به صورت رابطه‌ی ۲۲ بیان کرد:

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot (c_{11} \cdot \cosh(\gamma_1 z) + c_{12} \cdot \sinh(\gamma_1 z) + c_{21} \cdot \cosh(\gamma_2 z) + c_{22} \cdot \sinh(\gamma_2 z)) \quad (22)$$

که در آن، ضرایب جدید c_1 الی c_4 به منظور جلوگیری از طولانی شدن روابط تعریف شده‌اند و با اعمال سایر شرایط مرزی باید تعیین شوند. به همین روش، تابع پتانسیل χ در معادله‌ی دیفرانسیل ارائه شده در رابطه‌ی ۱۳ به روش جداسازی متغیرها حل و رابطه‌ی ۲۳ حاصل می‌شود:

$$\chi = f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot h_1(z) = (c'_1 \cdot \cos(\alpha x) + c'_2 \cdot \sin(\alpha x)) (c'_3 \cdot \cos(\beta y) + c'_4 \cdot \sin(\beta y)) (c'_5 \cdot \cosh(\gamma_1 z) + c'_6 \cdot \sinh(\gamma_1 z)) \quad (23)$$

که ثابت‌های c'_1 الی c'_6 در آن نیز به کمک شرایط مرزی باید تعیین شوند. به منظور تعیین بقیه‌ی ثابت‌ها، از شرایط مرزی باقیمانده شامل شرط لنگر صفر در چهار لبه و نیز تنش صفر در بالا و پایین صفحه استفاده می‌شود. بدین منظور از روابط تغییرمکان - توابع پتانسیل، تغییرمکان - کرنش و نیز روابط کرنش - تنش (قانون هوک) استفاده می‌شود و روابط برحسب توابع f, g, h و نیز f_1, g_1, h_1 به شکل روابط ۲۴ الی ۲۸ هستند:

$$\begin{cases} u = -\alpha_1 f^1 \cdot g \cdot h^1 - f_1 \cdot g^1 \cdot h \\ v = -\alpha_1 f \cdot g \cdot h^1 + f_1^1 \cdot g_1 \cdot h_1 \\ w = f \cdot g \cdot h (-\alpha_2 \alpha_{mn}^1 + \frac{h^1}{h} + \alpha_3 \omega^1) \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -\alpha_1 f^1 \cdot g \cdot h^1 - f_1^1 \cdot g_1 \cdot h_1 \\ \varepsilon_y = -\alpha_1 f \cdot g^1 \cdot h^1 + f_1^1 \cdot g_1^1 \cdot h_1 \\ \varepsilon_z = f \cdot g \cdot h (-\alpha_2 \alpha_{mn}^1 + \frac{h^1}{h} + \alpha_3 \omega^1) \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (-2\alpha_1 \cdot f^1 \cdot g^1 \cdot h^1 - f_1 \cdot g_1^1 \cdot h_1 + f_1^1 \cdot g_1 \cdot h_1) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} f^1 \cdot g \cdot h (-\alpha_2 \alpha_{mn}^1 + \alpha_3 \omega^1 + (1 - \alpha_1) \frac{h^1}{h}) - f_1 \cdot g_1^1 \cdot h^1 / 2 \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} f \cdot g^1 \cdot h (-\alpha_2 \alpha_{mn}^1 + \alpha_3 \omega^1 + (1 - \alpha_1) \frac{h^1}{h}) + f_1^1 \cdot g_1 \cdot h^1 / 2 \end{cases} \quad (26)$$

با فرض هارمونیک بودن حرکت رابطه‌ی بین تغییرمکان‌ها، توابع پتانسیل را می‌توان به صورت روابط ۹ و ۱۰ بیان کرد:

$$[\tilde{\chi}, \tilde{F}(x, y, z, T)] = [\chi, F(x, y, z)] e^{i\omega T} \quad (9)$$

$$[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}(x, y, z, T)] = [u, v, w(x, y, z)] e^{i\omega T} \quad (10)$$

که در آنها ω بسامد زاویه‌ی حرکت و $i = \sqrt{-1}$ است. با جای‌گذاری روابط ۹ و ۱۰ در روابط ۱ و ۴، روابط ۱۱ الی ۱۳ حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -\alpha_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y} - \alpha_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z} \\ v(x, y, z) = -\alpha_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ w(x, y, z) = \alpha_2 \nabla_{xy}^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha_3 \omega^1 F \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2 \partial z^2} + (\lambda_1^1 + \lambda_2^1) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) + \lambda_1^1 \lambda_2^1 F = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \lambda_2^1 \chi = 0 \quad (13)$$

در این روابط، ضرایب λ_1^1 و λ_2^1 به شکل رابطه‌ی ۱۴ هستند:

$$\lambda_1^1 = \frac{\omega^2}{C_1^1} \quad \lambda_2^1 = \frac{\omega^2}{C_2^1} \quad (14)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، تابع پتانسیل F را می‌توان به صورت ضرب سه تابع به صورت معادله‌ی ۱۵ نوشت:

$$F(x, y, z) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z) \quad (15)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی ۱۵ در معادله‌ی ۱۲ و تقسیم دو طرف معادله بر $f \cdot g \cdot h$ سه معادله‌ی دیفرانسیل کامل به دست می‌آید که از بین جواب‌های قابل قبول که معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تابع پتانسیل معادله‌ی ۱۲ و شرایط مرزی را اقلان کنند، تابع نمایی در جهت z و مثلثاتی در دو جهت x و y مطابق رابطه‌ی ۱۶ است، که به منظور راحتی در اعمال شرایط مرزی تابع نمایی به فرم توابع هیپربولیک نوشته شدند. ضرایب c_1 الی c_8 و نیز $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ به کمک شرایط مرزی باید تعیین شوند.

$$F = f \cdot g \cdot h = (c_1 \cdot \cos(\alpha x) + c_2 \cdot \sin(\alpha x)) (c_3 \cdot \cos(\beta y) + c_4 \cdot \sin(\beta y)) (c_5 \cdot \cosh(\gamma_1 z) + c_6 \cdot \sinh(\gamma_1 z) + c_7 \cdot \cosh(\gamma_2 z) + c_8 \cdot \sinh(\gamma_2 z)) \quad (16)$$

اقلان معادله‌ی دیفرانسیل حاکم ایجاد می‌کند که روابط ۱۷ و ۱۸ برقرار باشند:

$$\gamma_1^1 = (\alpha_{mn}^1 - \lambda_1^1) \quad (17)$$

$$\gamma_2^1 = (\alpha_{mn}^1 - \lambda_2^1) \quad (18)$$

که در آن‌ها α_{mn}^1 از رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید:

$$\alpha_{mn}^1 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (19)$$

به z زوج باشد. در نتیجه ضرایب $c_2 = c_4 = 0$ است. لذا رابطه‌ی ۳۳ را خواهیم داشت:

$$h = c_1 \cdot \cosh(\gamma_1 z) + c_3 \cdot \cosh(\gamma_2 z) \quad (33)$$

با اعمال شرط مرزی $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ و نیز شرط $\sigma_z = 0$ روابط ۳۴ حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} c_1 [2\gamma_1 \cdot \cos h(\frac{\gamma_1 t}{\tau})] + c_3 [(\gamma_2^2 + \alpha_{mn}^2) \cdot \cosh(\frac{\gamma_2 t}{\tau})] = 0 \\ c_1 [\gamma_1 \cdot (\gamma_2^2 + \alpha_{mn}^2) \cdot \sinh(\frac{\gamma_1 t}{\tau})] + c_3 [2\gamma_2 \alpha_{mn}^2 \cdot \sinh(\frac{\gamma_2 t}{\tau})] = 0 \end{cases} \quad (34)$$

به منظور رسیدن به جواب غیر صفر لازم است که دترمینان ضرایب دستگاه فوق برابر صفر باشد، که منجر به معادله‌ی مشخصه‌ی ارتعاش آزاد صفحه به صورت رابطه‌ی ۳۵ می‌شود:

$$4 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \alpha_{mn}^2 \cdot \cosh(\frac{\gamma_1 t}{\tau}) \cdot \sinh(\frac{\gamma_2 t}{\tau}) - (\gamma_2^2 + \alpha_{mn}^2)^2 \cdot \sinh(\frac{\gamma_1 t}{\tau}) \cdot \cosh(\frac{\gamma_2 t}{\tau}) \quad (35)$$

که از حل این معادله می‌توان بسامد زاویه‌ی صفحه‌ی ω_{mn} را تعیین کرد که در آن m و n معرف تعداد نیم موج‌های صفحه‌ی در حال ارتعاش است. در این تحقیق به منظور حل معادله‌ی مشخصه‌ی ۳۵ از نرم‌افزار MATLAB نسخه‌ی ۷/۸ استفاده شده است.

۳. نتایج عددی

به منظور بررسی صحت روابط به دست آمده و نیز کنترل محاسبات، نتایج به دست آمده از روش مورد استفاده در این تحقیق با رابطه‌ی ۳۶، ۳۷، برای صفحات نازک که مستقل از ضخامت صفحه هستند و نیز با دیگر مراجع برای صفحات ضخیم نسبی و ضخیم مقایسه شده است.

$$\omega_{mn,tn} = ((\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2) \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}} \quad (36)$$

که در آن، \bar{m} جرم در واحد سطح صفحه است.

در جدول‌های ۱ الی ۳، نتایج بسامد ارتعاش طبیعی بدون بعدشده‌ی صفحه برای مقادیر مختلف نسبت منظر $\eta = \frac{a}{b}$ و نسبت $\delta = \frac{t}{a}$ به ازای ضریب پواسون $\nu = 0.3$ به دست آمده از روش مورد استفاده در این پژوهش با سایر مراجع مقایسه شده و به منظور بی‌بعدکردن بسامد ارتعاشی صفحه از رابطه‌ی ۳۷ استفاده شده است:

$$\omega_{mn} = \omega_{mn} a^2 \sqrt{\rho t / D} \quad (37)$$

که در آن، a طول صفحه در امتداد محور x ها، D و ρ نیز به ترتیب سختی خمشی و جرم حجمی صفحه هستند. سختی خمشی صفحه از رابطه‌ی ۳۸ به دست می‌آید که در آن E مدول یانگ است:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (38)$$

در جدول‌های مذکور ملاحظه می‌شود که مقادیر حاصل از رابطه‌ی ۳۶ همواره بسامد زاویه‌ی بی‌بعد شده‌ی بزرگ‌تری از نتایج حاصل از کار پژوهشگران^[۲۹] و پژوهش

$$\begin{cases} \sigma_x = f \cdot g \cdot h^2 (\alpha_{mn}^2 \lambda (\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2 \lambda \omega^2 + \lambda \frac{h^2}{h^3}) \\ \quad + 2\mu \lambda \alpha_1 \alpha^2 - 2\mu f_1^2 \cdot g_1^2 \cdot h_1 \\ \sigma_y = f \cdot g \cdot h^2 (\alpha_{mn}^2 \lambda (\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2 \lambda \omega^2 + \lambda \frac{h^2}{h^3}) \\ \quad + 2\mu \lambda \alpha_1 \beta^2 + 2\mu f_1^2 \cdot g_1^2 \cdot h_1 \\ \sigma_z = f \cdot g \cdot h^2 (\alpha_{mn}^2 (\lambda \alpha_1 - \lambda \alpha_2 - 2\mu \alpha_2) + \\ \quad (\lambda + 2\mu) \alpha_2 \omega^2 + ((\lambda + 2\mu) \frac{h^2}{h^3})) \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \tau_{xy} = -2\mu \alpha_1 f_1 \cdot g_1 \cdot h^2 - \mu f_1 \cdot g_1 \cdot h_1 (\alpha^2 - \beta^2) \\ \tau_{xz} = f_1 \cdot g_1 \cdot h^2 (-\mu \alpha_2 \alpha_{mn}^2 + \mu \alpha_2 \omega^2 + (\lambda - \alpha_1) \mu \frac{h^2}{h}) \\ \quad - \mu f_1 \cdot g_1^2 \cdot h_1^2 \\ \tau_{yz} = f_1 \cdot g_1 \cdot h^2 (-\mu \alpha_2 \alpha_{mn}^2 + \mu \alpha_2 \omega^2 + (\lambda - \alpha_1) \mu \frac{h^2}{h}) \\ \quad + \mu f_1^2 \cdot g_1 \cdot h_1^2 \end{cases} \quad (28)$$

در این روابط، بالانویس معرف مرتبه‌ی مشتق است. با تعیین تنش‌ها برحسب توابع پتانسیل، شرط مرزی لنگر صفر در تکیه‌گاه‌ها و نیز تنش‌های برشی و نرمال برابر صفر در سطوح بالایی و پایینی صفحه را می‌توان اعمال کرد. برای شرط لنگر برابر صفر رابطه‌ی ۲۹ را داریم:

$$\begin{aligned} M_x = \int_{-t/\tau}^{+t/\tau} \sigma_x z dz = 0 &\rightarrow -2\mu f_1^2 g_1^2 \int_{-t/\tau}^{+t/\tau} h_1 z dz = 0 \\ at \ x = 0 &\rightarrow f_1^2 = 0 \rightarrow c_1' = 0 \\ M_x = \int_{-t/\tau}^{+t/\tau} \sigma_x z dz = 0 &\rightarrow -2\mu f_1^2 g_1^2 \int_{-t/\tau}^{+t/\tau} h_1 z dz = 0 \\ at \ x = a &\rightarrow f_1^2 = 0 \rightarrow \alpha = m\pi/a \end{aligned} \quad (29)$$

و در نتیجه رابطه‌ی ۳۰ را خواهیم داشت:

$$f_1 = \cos(\frac{m\pi}{a} x) \quad (30)$$

به همین ترتیب برای $M_y = 0$ در $y = 0, b$ می‌توان رابطه‌ی ۳۱ را نتیجه گرفت:

$$g_1 = \cos(\frac{n\pi}{b} y) \quad (31)$$

لازم به ذکر است که براساس اعمال شرایط مرزی ذکرشده در رابطه‌ی ۲۱، مستقیماً از آرگومان α و β در تابع پتانسیل χ (همانند تابع F) استفاده شده است. در نتیجه رابطه‌ی ۳۲ را خواهیم داشت:

$$\chi = \cos(\frac{m\pi}{a} x) \cdot \cos(\frac{n\pi}{b} y) (c_9 \cdot \cosh(\gamma_1 z) + c_{10} \cdot \sinh(\gamma_1 z)) \quad (32)$$

که در آن ضرایب جدید c_9, c_{10} نیز برای جلوگیری از طولانی‌شدن روابط تعریف شده‌اند.

به منظور تعیین ضرایب ثابت c_1, c_2, c_3, c_4 و نیز c_9, c_{10} از شرایط مرزی تنش صفر در سطوح بالایی و پایینی صفحه به صورت $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$ می‌توان استفاده کرد.

اعمال این شرایط مرزی منجر به صفرشدن تابع h_1 و به تبع آن تابع پتانسیل $\chi = 0$ می‌شود. از طرف دیگر، در این شرایط مرزی لازم است که تابع h نسبت

جدول ۱. نتایج بسامد زاویه‌ی بدون بعد صفحه به ازای $\eta = 0,4$.

ω_{24}	ω_{23}	ω_{15}	ω_{22}	ω_{21}	ω_{14}	ω_{13}	ω_{12}	ω_{11}	مرجع	δ
۶۴,۷۴۴۶	۵۳,۶۹۰۵	۴۹,۳۴۸۰	۴۵,۷۹۵۰	۴۱,۰۵۷۸	۳۵,۱۳۵۸	۲۴,۰۸۱۸	۱۶,۱۸۶۲	۱۱,۴۴۸۷	$\omega_{mn,tn}$	
۶۴,۶۶۹۷	۵۳,۶۳۰۱	۴۹,۳۰۴۵	۴۵,۷۵۷۵	۴۱,۰۲۷۴	۳۵,۱۱۳۷	۲۴,۰۷۱۵	۱۶,۱۸۱۵	۱۱,۴۴۶۴	مرجع [۳۹]	۰,۱
۶۴,۶۷۰۴	۵۳,۶۳۹۶	۴۹,۳۰۴۹	۴۵,۷۵۷۸	۴۱,۰۲۷۷	۳۵,۱۱۳۹	۲۴,۰۷۱۶	۱۶,۱۸۱۵	۱۱,۴۴۶۴	این پژوهش	
۶۴,۷۴۴۶	۵۳,۶۹۰۶	۴۹,۳۴۸۰	۴۵,۷۹۵۰	۴۱,۰۵۷۶	۳۵,۱۳۵۸	۲۴,۰۸۱۸	۱۶,۱۸۶۲	۱۱,۴۴۸۷	$\omega_{mn,tn}$	
۶۲,۹۶۳۱	۵۲,۴۵۵۰	۴۸,۳۰۰۶	۴۴,۸۹۰۵	۴۰,۳۲۷۸	۳۴,۵۹۸۸	۲۳,۸۲۷۳	۱۶,۰۷۰۴	۱۱,۳۹۰۶	مرجع [۳۹]	۰,۵
۶۲,۹۷۹۶	۵۲,۴۶۶۴	۴۸,۳۱۰۳	۴۴,۸۹۸۸	۴۰,۳۳۴۵	۳۴,۶۰۳۸	۲۳,۸۲۹۷	۱۶,۰۷۱۵	۱۱,۳۹۱۲	این پژوهش	
۶۴,۷۴۴۶	۵۳,۶۹۰۶	۴۹,۳۴۸۰	۴۵,۷۹۵۰	۴۱,۰۵۷۶	۳۵,۱۳۵۸	۲۴,۰۸۱۸	۱۶,۱۸۶۲	۱۱,۴۴۸۷	$\omega_{mn,tn}$	
۵۸,۵۲۱۶	۴۹,۲۸۶۹	۴۵,۵۸۴۵	۴۲,۵۲۲۶	۳۸,۳۹۲۸	۳۳,۱۵۱۵	۲۳,۱۱۹۳	۱۵,۷۴۰۸	۱۱,۲۲۶۰۷	مرجع [۳۹]	۰,۱۰
۵۸,۵۷۶۹	۴۹,۳۲۷۵	۴۵,۶۱۹۳	۴۲,۵۵۲۸	۳۸,۴۱۷۴	۳۳,۱۶۹۹	۲۳,۱۲۸۲	۱۵,۷۴۴۹	۱۱,۲۲۴۷	این پژوهش	
۶۴,۷۴۴۶	۵۳,۶۹۰۶	۴۹,۳۴۸۰	۴۵,۷۹۵۰	۴۱,۰۵۷۶	۳۵,۱۳۵۸	۲۴,۰۸۱۸	۱۶,۱۸۶۲	۱۱,۴۴۸۷	$\omega_{mn,tn}$	
۵۳,۰۵۹۱	۴۵,۲۳۴۴	۴۲,۰۶۲۴	۳۹,۴۰۰۲	۳۵,۷۹۱۳	۳۱,۱۵۵۷	۲۲,۰۹۱۱	۱۵,۲۴۲۱	۱۰,۹۶۱۷	مرجع [۳۹]	۰,۱۵
۵۳,۱۶۵۰	۴۵,۳۱۱۵	۴۲,۱۱۹۲	۳۹,۴۵۸۸	۳۵,۸۳۹۶	۳۱,۱۹۲۳	۲۲,۱۰۹۴	۱۵,۲۵۰۸	۱۰,۹۶۶۴	این پژوهش	
۶۴,۷۴۴۶	۵۳,۶۹۰۶	۴۹,۳۴۸۰	۴۵,۷۹۵۰	۴۱,۰۵۷۶	۳۵,۱۳۵۸	۲۴,۰۸۱۸	۱۶,۱۸۶۲	۱۱,۴۴۸۷	$\omega_{mn,tn}$	
۴۷,۶۷۸۲	۴۱,۰۹۲۹	۳۸,۳۴۸۷	۳۶,۱۱۲۶	۳۲,۹۹۷۹	۲۸,۹۵۴۸	۲۰,۸۹۰۱	۱۴,۶۳۰۴	۱۰,۶۳۰۷	مرجع [۳۹]	۰,۲۰
۴۷,۸۲۷۸	۴۱,۲۰۴۸	۳۸,۴۸۲۷	۳۶,۱۹۹۴	۳۳,۰۷۰۶	۲۹,۰۱۰۸	۲۰,۹۱۹۳	۱۴,۶۴۴۷	۱۰,۶۳۸۲	این پژوهش	

جدول ۲. نتایج بسامد زاویه‌ی صفحه به ازای $\eta = ۱$.

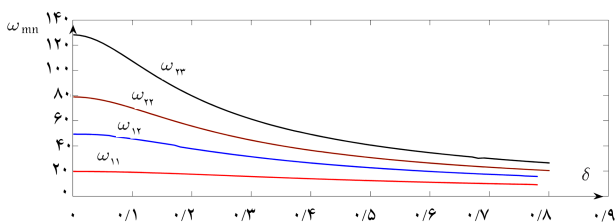
ω_{14}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{31}	ω_{13}	ω_{22}	ω_{21}	ω_{12}	ω_{11}	مرجع	δ
۱۶۷,۷۸۳۳	۱۲۸,۳۰۴۹	۱۲۸,۳۰۴۹	۹۸,۶۹۶۰	۹۸,۶۹۶۰	۷۸,۹۵۶۸	۴۹,۳۴۸۰	۴۹,۳۴۸۰	۱۹,۷۳۹۲	$\omega_{mn,tn}$	
۱۶۷,۲۸۲۱	۱۲۸,۰۱۱۴	۱۲۸,۰۱۱۴	۹۸,۵۲۲۲	۹۸,۵۲۲۲	۷۸,۸۴۵۵	۴۹,۳۰۴۵	۴۹,۳۰۴۵	۱۹,۷۳۲۲	مرجع [۳۹]	۰,۱
۱۶۷,۲۸۶۷	۱۲۸,۰۱۴۱	۱۲۸,۰۱۴۱	۹۸,۵۲۳۸	۹۸,۵۲۳۸	۷۸,۸۴۶۵	۴۹,۳۰۴۹	۴۹,۳۰۴۹	۱۹,۷۳۲۳	این پژوهش	
۱۶۷,۷۸۳۳	۱۲۸,۳۰۴۹	۱۲۸,۳۰۴۹	۹۸,۶۹۶۰	۹۸,۶۹۶۰	۷۸,۹۵۶۸	۴۹,۳۴۸۰	۴۹,۳۴۸۰	۱۹,۷۳۹۲	$\omega_{mn,tn}$	
۱۵۶,۶۸۵۲	۹۴,۶۶۱۲	۹۴,۶۶۱۲	۷۶,۳۳۶۰	۷۶,۳۳۶۰	۷۶,۳۳۶۰	۴۸,۳۰۰۶	۴۸,۳۰۰۶	۱۹,۵۷۷۶	مرجع [۳۹]	۰,۵
۱۵۶,۷۸۷۷	۱۲۱,۶۹۳۵	۱۲۱,۶۹۳۵	۹۴,۶۹۸۴	۹۴,۶۹۸۴	۷۶,۳۶۰۲	۴۸,۳۱۰۳	۴۸,۳۱۰۳	۱۹,۵۷۷۶	این پژوهش	
۱۶۷,۷۸۳۳	۱۲۸,۳۰۴۹	۱۲۸,۳۰۴۹	۹۸,۶۹۶۰	۹۸,۶۹۶۰	۷۸,۹۵۶۸	۴۹,۳۴۸۰	۴۹,۳۴۸۰	۱۹,۷۳۹۲	$\omega_{mn,tn}$	
۱۳۴,۳۵۸۶	۱۰۷,۱۷۷۵	۱۰۷,۱۷۷۵	۸۵,۳۶۵۴	۸۵,۳۶۵۴	۷۰,۰۲۱۹	۴۵,۵۸۴۵	۴۵,۵۸۴۵	۱۹,۰۸۴۰	مرجع [۳۹]	۰,۱۰
۱۳۴,۶۵۹۷	۱۰۷,۳۶۹۸	۱۰۷,۳۶۹۸	۸۵,۴۸۷۶	۸۵,۴۸۷۶	۷۰,۱۰۴۱	۴۵,۶۱۹۳	۴۵,۶۱۹۳	۱۹,۰۹۰۱	این پژوهش	
۱۶۷,۷۸۳۳	۱۲۸,۳۰۴۹	۱۲۸,۳۰۴۹	۹۸,۶۹۶۰	۹۸,۶۹۶۰	۷۸,۹۵۶۸	۴۹,۳۴۸۰	۴۹,۳۴۸۰	۱۹,۷۳۹۲	$\omega_{mn,tn}$	
۱۱۳,۰۲۵۷	۹۲,۲۳۵۰	۹۲,۲۳۵۰	۷۵,۰۴۰۲	۷۵,۰۴۰۲	۶۲,۶۰۳۵	۴۲,۰۵۲۵	۴۲,۰۵۲۵	۱۸,۳۶۶۱	مرجع [۳۹]	۰,۱۵
۱۱۳,۴۸۷۷	۹۲,۵۴۸۱	۹۲,۵۴۸۱	۷۵,۲۴۹۹	۷۵,۲۴۹۹	۶۲,۷۵۰۴	۴۲,۱۱۹۲	۴۲,۱۱۹۲	۱۸,۳۷۸۸	این پژوهش	
۱۶۷,۷۸۳۳	۱۲۸,۳۰۴۹	۱۲۸,۳۰۴۹	۹۸,۶۹۶۰	۹۸,۶۹۶۰	۷۸,۹۵۶۸	۴۹,۳۴۸۰	۴۹,۳۴۸۰	۱۹,۷۳۹۲	$\omega_{mn,tn}$	
۹۶,۸۰۸۸	۷۹,۴۷۵۸	۷۹,۴۷۵۸	۶۵,۷۱۹۳	۶۵,۷۱۹۳	۵۵,۵۸۶۰	۳۸,۳۸۴۷	۳۸,۳۸۴۷	۱۷,۵۰۵۵	مرجع [۳۹]	۰,۲۰
۹۶,۳۶۳۲	۷۹,۸۷۰۴	۷۹,۸۷۰۴	۶۵,۹۹۶۰	۶۵,۹۹۶۰	۵۵,۷۸۷۱	۳۸,۴۸۲۷	۳۸,۴۸۲۷	۱۷,۵۲۶۰	این پژوهش	

جدول ۳. نتایج بسامد زاویه‌یی صفحه به ازای $\eta = 2/5$.

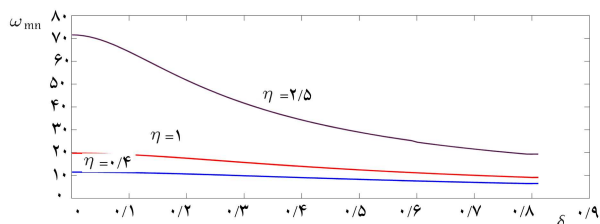
δ	مرجع	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{41}	ω_{12}	ω_{22}	ω_{51}	ω_{32}	ω_{42}
۰٫۱	$\omega_{mn, tn}$	۷۱٫۵۵۴۶	۱۰۱٫۱۶۳۴	۱۵۰٫۵۱۱۵	۲۱۹٫۵۹۸۷	۲۵۶٫۶۰۹۷	۲۸۶٫۲۱۸۵	۳۰۸٫۴۲۵۱	۳۲۵٫۵۶۶۵	۴۰۴٫۶۵۳۸
	مرجع [۳۹]	۷۱٫۴۶۳۲	۱۰۰٫۹۸۰۸	۱۵۰٫۱۰۷۹	۲۱۸٫۷۴۱۶	۲۵۵٫۴۴۰۸	۲۸۴٫۷۶۵۷	۳۰۶٫۷۳۹۴	۳۲۳٫۵۷۲۸	۴۰۱٫۷۶۱۱
	این پژوهش	۷۱٫۴۶۴۰	۱۰۰٫۹۸۲۵	۱۵۰٫۱۱۱۶	۲۱۸٫۷۴۹۵	۲۵۵٫۴۵۱۶	۲۸۴٫۷۷۹۱	۳۰۶٫۷۵۴۹	۳۳۳٫۵۹۱۲	۴۰۱٫۷۸۷۷
۰٫۵	$\omega_{mn, tn}$	۶۹٫۳۹۰۰	۹۶٫۹۳۲۱	۱۴۱٫۴۷۲۵	۲۰۱٫۲۴۰۰	۲۳۲٫۳۴۱۰	۲۵۶٫۳۲۹۴	۲۷۴٫۱۸۷۹	۲۹۵٫۶۹۴۱	۳۴۸٫۹۴۳۱
	مرجع [۳۹]	۶۹٫۴۱۰۰	۹۶٫۹۷۱۱	۱۴۱٫۵۵۶۰	۲۰۱٫۴۰۹۴	۲۳۲٫۳۵۹۶	۲۵۶٫۶۰۶۴	۲۷۴٫۵۰۲۸	۲۹۶٫۰۶۰۶	۳۴۹٫۴۵۳۳
	این پژوهش	۶۹٫۴۱۰۰	۹۶٫۹۷۱۱	۱۴۱٫۵۵۶۰	۲۰۱٫۴۰۹۴	۲۳۲٫۳۵۹۶	۲۵۶٫۶۰۶۴	۲۷۴٫۵۰۲۸	۲۹۶٫۰۶۰۶	۳۴۹٫۴۵۳۳
۱٫۰	$\omega_{mn, tn}$	۶۴٫۰۸۲۴	۸۷٫۲۳۵۸	۱۲۲٫۷۱۰۴	۱۶۷٫۳۳۶۲	۱۸۹٫۳۴۳۳	۲۰۶٫۱۵۶۷	۲۱۸٫۳۵۲۴	۲۳۲٫۸۱۷۵	۲۶۷٫۷۰۵۵
	مرجع [۳۹]	۶۴٫۱۵۱۱	۸۷٫۳۶۳۳	۱۲۲٫۹۶۲۱	۱۶۷٫۷۹۹۹	۱۸۹٫۹۳۳۳	۲۰۶٫۸۵۲۴	۲۱۹٫۱۲۹۵	۲۳۳٫۶۹۶۳	۲۶۸٫۸۵۱۱
	این پژوهش	۶۴٫۱۵۱۱	۸۷٫۳۶۳۳	۱۲۲٫۹۶۲۱	۱۶۷٫۷۹۹۹	۱۸۹٫۹۳۳۳	۲۰۶٫۸۵۲۴	۲۱۹٫۱۲۹۵	۲۳۳٫۶۹۶۳	۲۶۸٫۸۵۱۱
۱٫۵	$\omega_{mn, tn}$	۵۷٫۷۰۰۱	۷۶٫۵۳۶۶	۱۰۴٫۱۹۲۱	۱۳۷٫۵۱۸۹	۱۵۳٫۵۱۲۹	۱۶۶٫۵۷۶۶	۱۷۴٫۲۵۳۰	۱۸۴٫۴۷۱۳	۲۰۸٫۸۳۵۸
	مرجع [۳۹]	۵۷٫۸۲۵۲	۷۶٫۷۵۳۵	۱۰۴٫۵۸۷۹	۱۳۸٫۱۸۶۲	۱۵۴٫۳۲۹۷	۱۶۶٫۵۱۳۳	۱۷۵٫۲۷۹۴	۱۸۵٫۶۰۶۹	۲۱۰٫۲۴۴۸
	این پژوهش	۵۷٫۸۲۵۲	۷۶٫۷۵۳۵	۱۰۴٫۵۸۷۹	۱۳۸٫۱۸۶۲	۱۵۴٫۳۲۹۷	۱۶۶٫۵۱۳۳	۱۷۵٫۲۷۹۴	۱۸۵٫۶۰۶۹	۲۱۰٫۲۴۴۸
۲٫۰	$\omega_{mn, tn}$	۵۱٫۵۳۹۲	۶۶٫۹۲۶۴	۸۸٫۹۰۳۷	۱۱۴٫۷۴۰۴	۱۲۶٫۹۶۶۹	۱۳۶٫۱۳۲۹	۱۴۲٫۶۹۹۹	۱۵۰٫۴۱۰۳	۱۶۸٫۷۰۸۴
	مرجع [۳۹]	۵۱٫۷۱۳۱	۶۷٫۲۱۲۸	۸۹٫۳۸۸۲	۱۱۵٫۵۰۱۶	۱۲۷٫۸۷۱۴	۱۳۷٫۱۴۸۸	۱۴۳٫۷۹۷۳	۱۵۱٫۶۰۴۹	۱۷۰٫۱۳۸۶
	این پژوهش	۵۱٫۷۱۳۱	۶۷٫۲۱۲۸	۸۹٫۳۸۸۲	۱۱۵٫۵۰۱۶	۱۲۷٫۸۷۱۴	۱۳۷٫۱۴۸۸	۱۴۳٫۷۹۷۳	۱۵۱٫۶۰۴۹	۱۷۰٫۱۳۸۶

همان‌طوری که از شکل ۲ مشخص است، با افزایش ضخامت نسبی بسامد بی‌بعد صفحه کاهش می‌یابد؛ که مقدار این کاهش با بالاتر رفتن مودها با شدت بیشتری همراه است. علاوه بر این، در صفحات بسیار ضخیم، بسامدهای بی‌بعد برای کلیه مودها به سمت بسامد بی‌بعد اول نزدیک می‌شوند؛ که نشان‌دهنده‌ی اهمیت این مود در تحلیل دینامیکی و لرزه‌یی صفحات ضخیم است.

به منظور بررسی تأثیر نسبت بر بسامدهای طبیعی صفحات ضخیم در شکل ۳ تغییرات آن بر حسب ضخامت نسبی برای ۳ نسبت مختلف η برای بسامد اول ω_{11} ارائه شده است.



شکل ۲. تغییرات بسامد بی‌بعد ω بر حسب δ به‌ازای مودهای مختلف برای صفحه‌ی مربعی.



شکل ۳. تغییرات بسامد بی‌بعد ω_{11} بر حسب δ به‌ازای سه نسبت مختلف η .

حاضر را می‌دهد، که دلیل آن ناشی از در نظر نگرفتن اثر کرنش‌های برشی و نیز اینرسی دورانی در صفحات نازک است. علاوه بر این، از این جداول ملاحظه می‌شود که اختلاف نتایج حاصل از رابطه‌ی ۳۶ با این نتایج [۳۹] و این پژوهش با افزایش نسبت δ و نیز با بالاتر رفتن مودهای ارتعاشی به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد، به‌طوری‌که برای $\delta > 0.1$ و برای مود اول ارتعاش اختلاف به بیش از ۱٪ می‌رسد. این خطا حتی به‌ازای $\delta < 0.1$ و ولی برای مودهای ارتعاشی بالاتر بسیار قابل توجه بوده است، بعضاً بیش از ۵٪، که استفاده از آن را حتی برای صفحات نازک با تردید همراه می‌کند.

مقایسه‌ی نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج مرجع [۳۹] در جدول‌های ۱ الی ۳ نشان می‌دهد که بیشترین اختلاف نتایج کمتر از ۱٪ است، که آن را می‌توان به تقریب به‌کار گرفته در مرجع [۳۹] مرتبط با فرضیات صفحه‌ی میندلین، که در آن از توزیع تنش برشی فرضی، با ضریب تصحیح برش $K^2 = 0.86667$ در ارتفاع صفحه استفاده کرده است، و همچنین صرف نظر کردن از کرنش ε_{zz} نسبت داد. به منظور بررسی تأثیر ضریب تصحیح برش، نتایج کار چند پژوهش مختلف با نتایج این پژوهش، که مستقل از ضریب K است، در جدول ۴ به‌ازای $\eta = 1$ و $v = 0.3$ ارائه شده است.

از مقایسه‌ی نتایج جدول ۴ ملاحظه می‌شود، نتایج در حالتی که ضریب تصحیح برش $K^2 = 0.8666$ است، به نتایج این پژوهش که از فرض ساده‌شونده‌ی در توزیع تنش برشی یا صفر بودن کرنش ε_{zz} استفاده نکرده است، در قیاس با سایر ضرایب توزیع تصحیح برش در نظر گرفته شده نزدیک‌تر است.

به منظور بررسی تأثیر ضخامت صفحه بر بسامد طبیعی، در شکل ۲ تغییرات بسامد بی‌بعد شده بر حسب δ برای چهار مود مختلف یک صفحه‌ی مربعی به‌ازای $v = 0.3$ ارائه شده است. از آنجایی که در این پژوهش، برخلاف سایر کارها، هیچ‌گونه محدودیتی در انتخاب δ وجود ندارد، منحنی‌های ارائه شده در شکل ۲ برای δ تا ۰٫۸، که مقادیر به مراتب بیشتر از صفحات ضخیم نسبی است، ارائه شده است.

جدول ۴. بررسی تأثیر ضریب تصحیح برش در نتایج برای صفحه با نسبت $\eta = 1$.

ω_{14}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{31}	ω_{13}	ω_{22}	ω_{21}	ω_{12}	ω_{11}	مرجع	K^2	δ
۱۶۷,۷۸۳۳	۱۲۸,۳۰۴۹	۱۲۸,۳۰۴۹	۹۸,۶۹۶۰	۹۸,۶۹۶۰	۷۸,۹۵۶۸	۴۹,۳۴۸۰	۴۹,۳۴۸۰	۱۹,۷۳۹۲	[۸]	-	
۱۶۷,۷۷۸۰	۱۲۸,۳۰۳۰	۱۲۸,۳۰۳۰	۹۸,۶۹۵۱	۹۸,۶۹۵۱	۷۸,۹۵۶۸	۴۹,۳۴۸۰	۴۹,۳۴۸۰	۱۹,۷۳۹۲	[۳۲]	$\frac{\delta}{\rho}$	
-	۱۲۸,۳۰۵۰	۱۲۸,۳۰۵۰	۹۸,۶۹۶۰	۹۸,۶۹۶۰	۷۸,۹۵۶۸	۴۹,۳۴۸۰	۴۹,۳۴۸۰	۱۹,۷۳۹۲	[۳۰]	$\frac{\pi^2}{12}$	۰,۰۰۱
۱۶۷,۷۷۸۲	۱۲۸,۳۰۱۹	۱۲۸,۳۰۱۹	۹۸,۶۹۴۴	۹۸,۶۹۴۴	۷۸,۹۵۵۷	۴۹,۳۴۷۵	۴۹,۳۴۷۵	۱۹,۷۳۹۲	[۳۹]	۰,۸۶۷	
۱۶۷,۷۷۸۳	۱۲۸,۳۰۱۹	۱۲۸,۳۰۱۹	۹۸,۶۹۴۳	۹۸,۶۹۴۳	۷۸,۹۵۵۸	۴۹,۳۴۷۸	۴۹,۳۴۷۸	۱۹,۷۳۹۲	این پژوهش	-	
۱۳۳,۶۲۲۰	۱۰۶,۶۸۴۰	۱۰۶,۶۸۴۰	۸۵,۰۳۸۵	۸۵,۰۳۸۵	۶۹,۷۹۳۹	۴۵,۴۸۳۱	۴۵,۴۸۳۱	۱۹,۰۶۵۱	[۳۵-۳۲]	$\frac{\delta}{\rho}$	
۱۳۳,۶۲۱۲	۱۰۶,۶۸۳۶	۱۰۶,۶۸۳۶	۸۵,۰۳۸۰	۸۵,۰۳۸۰	۶۹,۷۹۴۳	۴۵,۴۸۲۶	۴۵,۴۸۲۶	۱۹,۰۶۴۹	[۳۹]	$\frac{\delta}{\rho}$	
-	۱۰۶,۵۱۳۰	۱۰۶,۵۱۳۰	۸۴,۹۲۷۹	۸۴,۹۲۷۹	۶۹,۷۱۸۹	۴۵,۴۴۹۵	۴۵,۴۴۹۵	۱۹,۰۵۸۲	[۳۰]	$\frac{\pi^2}{12}$	۰,۱۰
۱۳۳,۳۷۰۵	۱۰۶,۵۱۵۴	۱۰۶,۵۱۵۴	۸۴,۹۲۶۳	۸۴,۹۲۶۳	۶۹,۷۱۶۶	۴۵,۴۴۷۸	۴۵,۴۴۷۸	۱۹,۰۵۸۲	[۳۹]	۰,۸۶۷	
-	۱۰۷,۳۷۱۰	۱۰۷,۳۷۱۰	۸۵,۴۸۷۹	۸۵,۴۸۷۹	۷۰,۱۰۳۸	۴۵,۶۱۹۳	۴۵,۶۱۹۳	۱۹,۰۸۹۸	[۳۰]	۰,۸۶۷	
۱۳۴,۳۵۸۶	۱۰۷,۱۷۷۵	۱۰۷,۱۷۷۵	۸۵,۳۶۵۴	۸۵,۳۶۵۴	۷۰,۰۲۱۹	۴۵,۵۸۴۵	۴۵,۵۸۴۵	۱۹,۰۸۴۰	[۳۹]	-	
۱۳۴,۶۵۹۷	۱۰۷,۳۶۹۸	۱۰۷,۳۶۹۸	۸۵,۴۸۷۶	۸۵,۴۸۷۶	۷۰,۱۰۴۱	۴۵,۶۱۹۳	۴۵,۶۱۹۳	۱۹,۰۹۰۱	این پژوهش	-	
۹۴,۷۶۶۰	۷۸,۶۹۷۳	۷۸,۶۹۷۳	۶۵,۱۴۵۳	۶۵,۱۴۵۳	۵۵,۱۵۰۴	۳۸,۱۵۱۹	۳۸,۱۵۱۹	۱۷,۴۴۸۵	[۳۲]	$\frac{\delta}{\rho}$	
۹۴,۷۶۵۸	۷۸,۶۹۶۹	۷۸,۶۹۶۹	۶۵,۱۴۵۲	۶۵,۱۴۵۲	۵۵,۱۵۰۰	۳۸,۱۵۱۲	۳۸,۱۵۱۲	۱۷,۴۴۸۵	[۳۹]	$\frac{\delta}{\rho}$	
-	-	-	۶۵,۹۹۶۱	۶۵,۹۹۶۱	۵۵,۷۸۷۰	۳۸,۴۸۲۶	۳۸,۴۸۲۶	۱۷,۵۲۶۴	[۳۳]	۰,۲۰	
۹۵,۸۰۸۸	۷۹,۴۷۵۸	۷۹,۴۷۵۸	۶۵,۷۱۹۳	۶۵,۷۱۹۳	۵۵,۵۸۶۰	۳۸,۳۸۴۷	۳۸,۳۸۴۷	۱۷,۵۲۶۴	[۳۹]	۰,۸۶۷	
۹۶,۳۶۳۲	۷۹,۸۷۰۴	۷۹,۸۷۰۴	۶۵,۹۹۶۰	۶۵,۹۹۶۰	۵۵,۷۸۷۱	۳۸,۴۸۲۶	۳۸,۴۸۲۶	۱۷,۵۲۶۰	این پژوهش	-	

مطابق شکل‌ها بسامد بی‌بعد شده‌ی صفحه به‌ازای تغییر ضریب پواسون با دو مقدار مختلف η و نیز دو مود مختلف ارتعاشی به مقدار کمی تحت تأثیر ضریب پواسون قرار دارد. این تأثیر با کوچک شدن δ کاهش می‌یابد و برای صفحات خیلی نازک اثر ضریب پواسون تقریباً حذف می‌شود. این نکته مطابق رابطه‌ی ۳۶، چنانچه به بسامد بی‌بعد تبدیل شود، تأیید می‌شود.

۴. نتیجه‌گیری

در این پژوهش بسامدهای ارتعاش آزاد صفحات ایزوترپ مستطیلی متکی بر تکیه‌گاه ساده با استفاده از توابع پتانسیل اسکندری قادی به‌صورت تحلیلی ارائه شده است. مزیت عمده‌ی روش ارائه‌شده، حذف فرضیات ساده‌شونده نظیر صرف نظر کردن از تنش نرمال جانبی، توزیع فرضی تنش برشی در ضخامت، و استفاده از ضریب تصحیح برش است. بر این اساس این نتایج حاصل شدند:

--- روش مورد استفاده را می‌توان در تعیین مقدار دقیق بسامدهای ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی بدون هرگونه فرض ساده‌شونده‌ی بی‌برای هر نسبت ضخامت به بعد صفحه به‌کار گرفت.

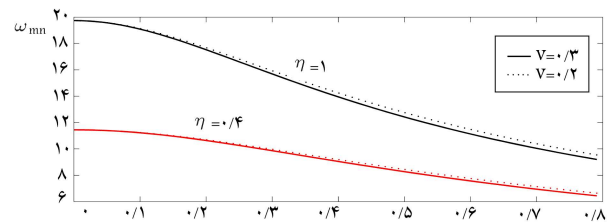
--- با افزایش ضخامت صفحه، بسامد بدون بعد صفحه کاهش می‌یابد. شدت این کاهش در مودهای بالاتر ارتعاش بیشتر است.

--- با افزایش نسبت η ، بسامد بی‌بعد صفحه افزایش می‌یابد. به‌ازای هر مقدار دلخواه این ضریب با افزایش ضخامت صفحه، بسامد بی‌بعد کاهش می‌یابد؛ که شدت این کاهش با افزایش ضریب η افزایش می‌یابد.

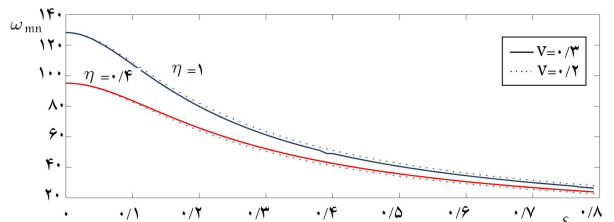
--- افزایش ضریب پواسون منجر به کاهش بسامد ارتعاشی بی‌بعد صفحات می‌شود، که با نازک تر شدن صفحه، مقدار این کاهش به سمت صفر میل پیدا می‌کند.

شکل ۳ نشان می‌دهد که با افزایش مقدار η ، بسامد اول بی‌بعد صفحه افزایش می‌یابد و شدت این افزایش با ضخیم‌تر شدن صفحه کمتر می‌شود. علاوه بر این، تغییرات بسامد اول با افزایش δ برای صفحات با η بالاتر با شدت بیشتری صورت می‌پذیرد.

به منظور بررسی اثر ضریب پواسون بر بسامد بی‌بعد شده‌ی صفحات، نتایج به‌ازای دو مقدار مختلف $v = 0.2$ (منحنی‌های خط‌چین) و $v = 0.3$ (منحنی‌های توپر) برای حالت‌های مختلف در شکل‌های ۴ و ۵ ارائه شده است که در آنها محور افقی نسبت بدون بعد δ است.



شکل ۴. تأثیر ضریب پواسون بر بسامد طبیعی بدون بعد ω_{11} .



شکل ۵. تأثیر ضریب پواسون بر بسامد طبیعی بدون بعد ω_{22} .

پانوشتها

1. Euler
2. Bernoulli
3. Rayleigh-Ritz
4. Mindlin
5. Reissner
6. Nanni
7. Kirchhoff
8. Mindlin
9. aspect ratio

منابع (References)

1. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill (1959).
2. Szilard, R., *Theories and Applications of Plates Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods*, John Wiley&sons. Inc. (2004).
3. Ugural, A.C., *Stress in Plates and Shells*, McGraw-Hill (1988).
4. Chladni, E.F.F, *Die Akustik*, Leipzig (1802).
5. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, Volume 1, London, Macmillan, reprinted 1945 by Dover, New York.
6. Ritz, W. "Über eine neue methode zur losung gewisser variations probleme der mathematischen physic", *Journal fur Reine und Angewandte Mathematik*, **135**, pp.1-61 (1909).
7. Leissa, A.W., *Vibration of Plates*, NASA SP-160 (1969).
8. Leissa, A.W. "The free vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, **31**(3), pp. 257-293 (1973).
9. Leissa, A.W. "Recent research in plate vibrations: Classical theory", *The Shock and Vibration Digest*, **9**(10), pp. 13-24 (1977).
10. Leissa, A.W. "Recent research in plate vibrations, 1973-1976: Complicating effects", *The Shock and Vibration Digest*, **10**(12), pp. 21-35 (1978).
11. Leissa, A.W. "Plate vibration research, 1976-1980: Classical theory", *The Shock and Vibration Digest*, **13**(9), pp. 11-22 (1981a).
12. Leissa, A.W. "Plate vibration research, 1976-1980: Complicating effects", *The Shock and Vibration Digest*, **13**(10), (1981b).
13. Leissa, A.W. "Recent studies in plate vibrations, 1981-1985. Part I: classical theory", *The Shock and Vibration Digest*, **19**(2), pp. 11-18 (1987a).
14. Leissa, A.W. "Recent studies in plate vibrations, 1981-1985. Part II: Complicating effects", *The Shock and Vibration Digest*, **19**(3), pp. 10-24 (1987b).
15. Bert, C.W. "Dynamics of composite and sandwich panels, Parts I and II", *The Shock and Vibration Digest*, **8**(11), pp. 15-24 (1976).
16. Bert, C.W. "Recent research in composite and sandwich plate dynamics", *The Shock and Vibration Digest*, **11**(10), pp. 13-23 (1979).
17. Bert, C.W. "Research on dynamics of composite and sandwich plates", *The Shock and Vibration Digest*, **14**(10), pp. 17-34 (1982).
18. Bert, C.W. "Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, part IV", *The Shock and Vibration Digest*, **17**(11), pp. 3-25 (1985).
19. Bert, C.W. "Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, V, part I", *The Shock and Vibration Digest*, **23**(6), pp. 3-14 (1991).
20. Bert, C.W. "Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, V, part II", *The Shock and Vibration Digest*, **23**(7), pp. 9-21 (1991).
21. Reissner, E. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate", *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, **12**, pp. 69-77 (1945).
22. Mindlin, R.D. "Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates", *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, **18**, pp. 31-38 (1951).
23. Nanni, J. "Das eulersche knickproblem unter berucksichtigung der querkrafte", *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, **22**, pp. 156-185 (1971).
24. Mindlin, R.D., Schacknow, A. and Deresiewicz, H. "Flexural vibrations of rectangular plates", *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, **23**, pp. 430-436 (1956).
25. Srinivas, S. and Rao, A.K. "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates", *International Journal of Solids and Structures*, **6**(11), pp. 1463-1481 (1970).
26. Reddy, J.N. and Phan N.D. "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher order shear deformation theory", *Journal of Sound and Vibration*, **98**(2), pp. 157-170 (1985).
27. Reddy, J.N. "A simple higher order theory for laminated composite plates", *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, **51**(4), pp. 745-752 (1984).
28. Roufaeil, D.L. and Dawe, D.J. "Vibration analyses of rectangular plates by the finite strip method", *Computers and Structures*, **12**, pp. 833-842 (1980).
29. Noor, A.K. and Burton, W.S. "Assessment of computational models for multilayered anisotropic plates", *Composite Structures*, **14**(3), pp. 233-265 (1990).
30. Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S. "Research on thick plate vibration: A literature survey", *J. Sound and Vibration*, **180**(1), pp. 163-176 (1995).
31. Ghugal, Y.M. and Shimpi, R.P. "A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates", *J. Reinforced Plastics and Composites*, **21**(9), pp. 775-813 (2002).
32. Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S. "Transverse vibration of thick rectangular plates, I: Comprehensive sets of boundary conditions", *Computers and Structures*, **49**(1), pp. 1-29 (1993).
33. Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S. "Transverse vibration of thick rectangular plates, II: Inclusion of oblique internal line supports", *Computers and Structures*, **49**(1), pp. 31-58 (1993).

34. Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S. "Transverse vibration of thick rectangular plates, III: Effects of multiple internal eccentric ring supports", *Computers and Structures*, **49**(1), pp. 59-67 (1993).
35. Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S. "Transverse vibration of thick rectangular plates, IV: influence of isotropic inplane pressure", *Computers and Structures*, **49**, pp. 69-78 (1993).
36. Wang, C.M. "Natural frequencies formula for simply supported Mindlin plates", *American Society of Mechanical Engineers Journal of Vibration and Acoustics*, (1994) (in press).
37. Cheung, Y.K. and Zhou, D. "Vibrations of moderately thick rectangular plates in terms of a set of static Timoshenko beam functions", *Computers and Structures*, **78**, pp. 757-768 (2000).
38. Saidi, A.R. and Atashipour, S.R. "Analytical solution of free vibration of thick transversely isotropic rectangular plates based on first order shear deformation theory", *Aerospace Mechanics Journal*, **4**(3), pp. 59-69 (2008).
39. Hashemi, S.H. and Arsanjani, M. "Exact characteristic equations for some of classical boundary conditions of vibrating moderately thick rectangular plates", *International Journal of Solids and Structures*, **42**, pp. 819-853 (2005).
40. Tran-Cong, T. "On the completeness and uniqueness of the papkovitch-neuber and the non-axisymmetric boussinesq, love, and burgatti solutions in general cylindrical coordinates", *Journal of Elasticity*, **36**, pp. 227-255 (1955).
41. Wang, W. and Shi, M.X. "Thick plate theory based on general solutions of elasticity", *Acta Mechanica*, **123**, pp. 27-36 (1997).
42. Qian, L.F., Batra, R.C. and Chen, L.M. "Elastostatic deformations of a thick plate by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and two meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) Methods", *CMES*, **4**, pp. 161-175 (2003).
43. Li, Q., Soric, J. and et al., "A locking-free meshless local Petrov-Galerkin formulation for thick and thin plates", *Journal of Computational Physics*, **208**(1), pp. 66-79 (2005).
44. Eskandari-Ghadi, M. "A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media", *J. of Elasticity*, **81**, pp. 1-19 (2005).
45. Khojasteh, A., Rahimian, M. and Eskandari-Ghadi, M. "3D static analysis of a transversely isotropic half-space", *Journal of Faculty of Technology, University of Technology*, **40**(5), pp. 611-624 (2006).
46. Ardeshir Behrestaghi, A. and Eskandari-Ghadi, M. "Two layers half-space transversely isotropic medium under horizontal load on surface in frequency domain", *Journal of Civil and Surveying Engineering*, **43**(1), pp. 1-13 (2009).
47. Rahimian, M., Eskandari-Ghadi, M., Pak, R.Y.S. and Khojasteh, A. "Three dimensional dynamic analysis of a transversely isotropic half-space", *ASCE J. Engrg. Mech*, **133**, pp. 134-1145 (2007).
48. Nematzadeh, M., Eskandari-Ghadi, M. and Navayi Neya, B. "An analytical solution for transversely isotropic simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions", *J. Strain Analysis for Engineering Design*, **46**(2), pp. 121-142 (2011).