مهندسی عمران شریف، (پاییز ۱۳۹۳)
دوره‌ی ۲-۳۰، شماره‌ی ۳، ص. ۶۵-۷۴

Original Article

روش معادلات مجزا برای حل مسائل دوبعدی الاستودینامیک در حوزه‌ی بسامد

محسن میرزاجانی (کارشناس ارشد)
ناصر خاجی* (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

m.mirzajani@modares.ac.ir
nkhaji@modares.ac.ir

در این نوشتار، روش معادلات مجزا برای حل مسائل الاستودینامیک دوبعدی در حوزه‌ی بسامد با استفاده از تبدیل فوریه‌ی سریع توسعه داده شده است. برای این منظور، مرز فضای مسئله با استفاده از المان‌های مرتبه‌ی بالای غیرایزوپارامتریک[۱] ویژه گسسته‌سازی شده است. با استفاده از چندجمله‌یی‌های مرتبه‌ی بالای چبیشف[۲] به‌عنوان توابع نگاشت[۳]، توابع شکل ویژه، روش انتگرال‌گیری عددی کلنشا ـ کورتیس[۴]، و همچنین روند تولید فرم انتگرالی با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن‌دار[۵]، ماتریس ضرایب در معادلات حاکم بر مسائل الاستودینامیک قطری شده است. این به آن معناست که معادله‌ی دیفرانسیل بسل[۶] حاکم برای هر درجه‌ی آزادی مستقل از سایر درجات آزادی در فضای مسئله به‌دست آمده است. برای اولین بار در این نوشتار، روش معادلات مجزا، که قبلاً برای حل مسائل پتانسیل و الاستواستاتیک ارائه شده بود، برای حل مسائل الاستودینامیک دوبعدی در حوزه‌ی بسامد توسعه داده شده است. همچنین نتایج به‌دست‌آمده با استفاده از روش معادلات مجزا با نتایج سایر روش‌های عددی مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: مسائل الاستودینامیک دوبعدی، ماتریس ضرایب قطری، چندجمله‌یی‌های چبیشف، المان‌های غیرایزوپارامتریک، حوزه‌ی بسامد، دستگاه معادلات دیفرانسیل بسل قطری.

۱. مقدمه

مسائل الاستودینامیک طیف وسیعی از مسائل مهندسی را به خود اختصاص می‌دهند. برای حل این دسته از مسائل، روش‌های عددی گوناگونی مانند: روش المان‌های محدود (FEM)[۷]، روش المان‌های طیفی (SEM)[۸]، روش المان‌های مرزی (BEM)[۹]، روش المان مرزی ـ محدود مقیاس‌شده (SBFEM)[۱۰] و روش‌های بدون مش[۱۱] تاکنون مورد استفاده قرار گرفته است. روش المان‌های محدود دارای قابلیت‌های خوبی در حل این دسته از مسائل است.[۱] همچنین حل مسائل الاستودینامیک دوبعدی با استفاده از روش المان‌های محدود در برخی مراجع ارائه شده‌اند.[۲-۴]

روش المان‌های مرزی، یکی دیگر از روش‌های عددی است که ابعاد مسئله را یک بُعد کاهش می‌دهد. این روش نیاز به حل اساسی[۱۲] برای معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسائل الاستودینامیک دارد. از روش المان‌های مرزی برای حل مسائل الاستودینامیک در برخی پژوهش‌ها استفاده شده است.[۵-۱۳]

روش المان مرزی ـ محدود مقیاس‌شده مزایای روش المان‌های محدود و المان‌های مرزی را ترکیب می‌کند. این روش یک روش نیمه‌تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی است. در این روش، مشابه روش المان‌های مرزی، فقط مرز مسئله نیاز به گسسته‌سازی دارد؛ با این تفاوت که نیاز به حل اساسی نیست. روش المان مرزی ـ محدود مقیاس‌شده در برخی پژوهش‌ها برای حل مسائل الاستودینامیک استفاده شده است.[۱۴-۲۴]

علاوه بر روش‌های ارائه‌شده‌ی مذکور، پژوهش‌های دیگری نیز با استفاده از روش‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی گوناگون به حل مسائل الاستودینامیک پرداخته‌اند.[۲۵-۲۷]

اخیراً، روش معادلات مجزا برای حل مسائل پتانسیل،[۲۸] مسائل الاستواستاتیک دوبعدی،[۲۹] و مسائل الاستواستاتیک سه بعدی،[۳۰] به کار گرفته شده‌اند. در این نوشتار، روش نیمه‌تحلیلی مزبور برای حل مسائل الاستودینامیک در حوزه‌ی بسامد توسعه داده شده و سپس در پایان با حل مثال‌هایی، توان این روش برای حل این دسته از مسائل ارزیابی شده است.

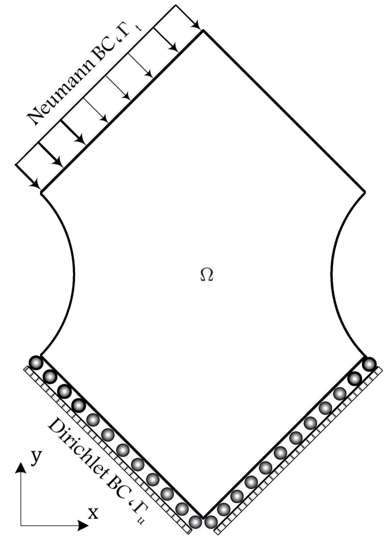
۲. معادله‌ی حاکم بر مسائل الاستودینامیک دو بعدی

در دستگاه مختصات کلی دکارتی، معادله‌ی حرکت حاکم بر مسائل الاستودینامیک دو بعدی در فضای Ω (شکل ۱) به‌صورت رابطه‌ی ۱ بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \qquad (۱)$$

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۵/۳، اصلاحیه ۱۳۹۱/۱۱/۲۳، پذیرش ۱۳۹۱/۱۱/۲۸.



شکل ۱. فضای دو بعدی (Ω) با مرزهای دارای شرایط دیریکله (Γ_u) و شرایط نیومن (Γ_t) در مسائل الاستودینامیک.

که در آن، σ_{ij} بیانگر اجزای تانسور تنش دوبعدی؛ f_i مؤلفه‌های نیروهای حجمی اعمال‌شده بر فضای مسئله؛ $\ddot{u}_i$ مشتق دوم تغییرمکان نسبت به زمان است. لازم به ذکر است که در حالت دو بعدی مسائل الاستودینامیک $i = X, Y$ و $j = X, Y$ است که به منظور تحلیل در حوزه‌ی بسامد، حرکت هارمونیک در نظر گرفته شده است. بنابراین رابطه‌ی بین جابجایی در حوزه‌ی زمان $u_i(t)$ و جابجایی در حوزه‌ی بسامد $\hat{u}_i(\omega)$ به‌صورت روابط ۲ و ۳ بیان می‌شود:

$$u_i\,(t) = \hat{u}_i\,(\omega) \exp\,(j\omega t) \quad (۲)$$

$$\ddot{u}_i\,(t) = -\omega^۲ \hat{u}_i\,(\omega) \exp\,(j\omega t) \quad (۳)$$

به طور مشابه می‌توان روابط ۴ و ۵ را نوشت:

$$\sigma_{ij,j}\,(t) = \hat{\sigma}_{ij,j}\,(\omega) \exp\,(j\omega t)\,, \quad (۴)$$

$$f_i\,(t) = \hat{f}_i\,(\omega) \exp\,(j\omega t)\,. \quad (۵)$$

که در آن‌ها $j = \sqrt{-۱}$ است. بنابراین، معادله‌ی حاکم بر مسائل الاستودینامیک در حوزه‌ی بسامد به‌صورت رابطه‌ی ۶ بازنویسی می‌شود:

$$\hat{\sigma}_{ij,j} + \hat{f}_i + \rho\omega^۲ \hat{u}_i = ۰ \quad (۶)$$

معادله‌ی ۶، فرم قوی[13] معادله‌ی حاکم بر مسائل الاستودینامیک است، که با اعمال شرایط مرزی می‌تواند حل شود. همچنین می‌توان از فرم ضعیف[14] معادله‌ی حاکم برای حل مسائل الاستودینامیک استفاده کرد. این روش بر مبنای استفاده از فرم ضعیف معادله‌ی حاکم است، لذا با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن‌دار با ضرب طرفین این رابطه در بردار تغییرمکان دلخواه w و انتگرال‌گیری از رابطه‌ی حاصل بر روی فضای مسئله، معادله‌ی حاکم به‌صورت رابطه‌ی ۷ یا ۸ خواهد بود:

$$\int_\Omega w \left(\hat{\sigma}_{ij,j} + \hat{f}_i + \rho\omega^۲ \hat{u}_i\right) d\Omega = ۰ \quad (۷)$$

یا:

$$\int_\Omega w\hat{\sigma}_{ij,j} d\Omega + \int_\Omega w\hat{f}_i d\Omega + \int_\Omega w\rho\omega^۲ \hat{u}_i d\Omega = ۰ \quad (۸)$$

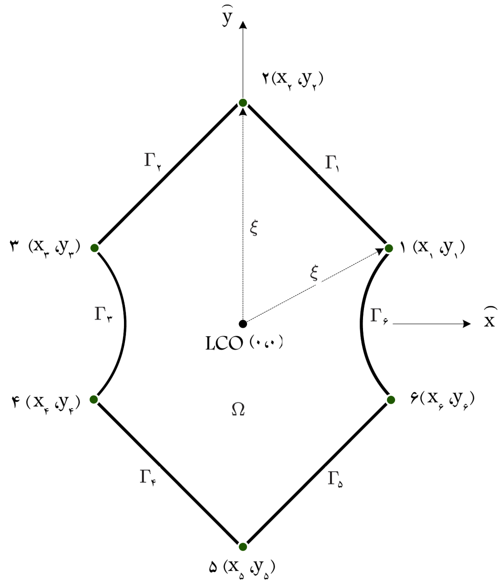
معادله‌ی ۸ در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۳. مدل‌سازی هندسه

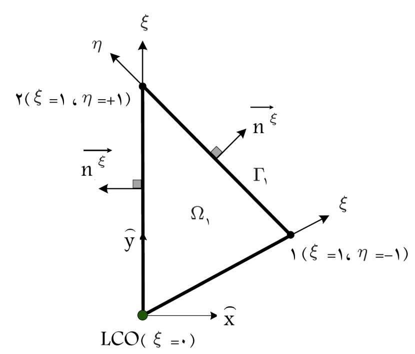
به منظور مدل‌سازی هندسه و همچنین فیزیک مسئله در این روش، ابتدا یک نقطه به‌عنوان مرجع مختصات محلی (LCO)[15] انتخاب و سپس تمام خصوصیات هندسی و فیزیکی مسئله نسبت به این نقطه ارزیابی شده است. در عین حال فقط مرزهای مسئله با استفاده از المان‌های با یک بُعد کمتر از بُعد فضای مسئله مش‌بندی شده‌اند (شکل ۲).

با توجه به انتخاب محورهای محلی، مرزهای مسئله به‌طور کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند: ۱. مرزهایی که امتداد آن‌ها از LCO می‌گذرند و روی محور شعاعی ξ قرار می‌گیرند؛ ۲. مرزهایی که امتداد آن‌ها از LCO نمی‌گذرند؛ پر واضح است که فقط باید مرزهای نوع ۱ را المان‌بندی کرد.

در این روش، مختصات هر نقطه درون حوزه‌ی مسئله در مختصات کلی با $(\hat{x}, \hat{y})$ مشخص می‌شود، همچنین مختصات هر نقطه از مرزهای مسئله نیز با (x, y) تعیین می‌شود. مطابق شکل ۲، در دستگاه مختصات محلی از دو محور با نام‌های ξ و η استفاده می‌شود؛ محور ξ معرف محوری شعاعی است که از محل LCO شروع می‌شود و محور η نیز محوری مماسی است که فقط بر روی مرزها تعریف می‌شود. محدوده‌ی تغییرات محور مماسی η بین ۱- تا ۱+ و همانند روش



الف)هندسه ی مسئله در مختصات کلی ؛



ب) هندسه ی مسئله ی دو بعدی در مختصات محلی.

شکل ۲. نحوه‌ی مدل‌سازی مسائل دو بعدی شماتیک.

المان‌های محدود کلاسیک است، اما تغییرات محور شعاعی ξ با توجه به نوع مسئله در دو محدوده‌ی تغییرات محور شعاعی ξ برای مسائل محدود بین: الف) صفر در LCO، ب) ۱ بر روی مرزها قابل بحث است و برای مسائل نیمه نامحدود، تغییرات این محور بین ۱ تا بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود.

به منظور انتقال هندسه‌ی مسئله از مختصات کلی $(\hat{x},\hat{y})$ به مختصات محلی (ξ,η) از توابع نگاشت، که از نوع چندجمله‌یی‌های مرتبه‌ی بالای چبیشف $[\varphi(\eta)]$ هستند، استفاده می‌شود. مختصات هر نقطه روی مرزهای مسئله با استفاده از توابع نگاشت به‌صورت رابطه‌های ۹ و ۱۰ یا ۱۱ قابل محاسبه خواهد بود:

$$\{x(\eta)\}=[\varphi(\eta)]\{x\} \tag{9}$$

$$\{y(\eta)\}=[\varphi(\eta)]\{y\} \tag{10}$$

یا:

$$x(\eta)=\sum_{i=1}^{n_\eta+1}x_i\varphi_i(\eta),\ y(\eta)=\sum_{i=1}^{n_\eta+1}y_i\varphi_i(\eta) \tag{11}$$

در این روابط، x و y مختصات نقاط روی مرز در دستگاه مختصات کلی هستند و n_η تعداد نقاط کنترل[16] المان‌های روی مرز هستند. در این روش، مختصات هر نقطه درون حوزه‌ی مسئله با استفاده از روابط ۱۲ و ۱۳ محاسبه می‌شود:

$$\hat{x}(\xi,\eta)=\xi x(\eta)=\xi\sum_{i=1}^{n_\eta+1}x_i\varphi_i(\eta) \tag{12}$$

$$\hat{y}(\xi,\eta)=\xi y(\eta)=\xi\sum_{i=1}^{n_\eta+1}y_i\varphi_i(\eta) \tag{13}$$

تابع نگاشت برای یک المان $(n_\eta+1)$ گره‌یی، با استفاده از چندجمله‌یی‌های چبیشف به‌صورت رابطه‌ی ۱۴ تعیین می‌شود:

$$\varphi_i(\eta)=\frac{2}{n_\eta}\sum_{n=0}^{n_\eta}\frac{1}{c_{i-1}c_n}T_n(\eta_{i-1})T_n(\eta) \tag{14}$$

که در آن، $T_n(\eta)$ چندجمله‌یی چبیشف نوع اول از مرتبه‌ی n است.[28,35] همچنین به ازای مقادیر $0<n<n_\eta$ مقدار $c_n=1$ و برای $n=0,n_\eta$ مقدار $c_n=2$ است.

جزء سطح المان در مختصات کلی $(d\hat{x}d\hat{y})$ با جزء سطح المان در مختصات محلی $(d\xi d\eta)$ رابطه‌یی به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ دارد:

$$d\Omega=d\hat{x}d\hat{y}=\left|\hat{J}(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta=\xi\left|J(\eta)\right|d\xi d\eta \tag{15}$$

که در آن، $\hat{J}(\xi,\eta)$ ماتریس ژاکوبی[17] انتقال (رابطه‌ی ۱۶) است:

$$\hat{J}(\xi,\eta)=\begin{bmatrix}\hat{x}_{,\xi}(\xi,\eta) & \hat{y}_{,\xi}(\xi,\eta)\\ \hat{x}_{,\eta}(\xi,\eta) & \hat{y}_{,\eta}(\xi,\eta)\end{bmatrix}, \tag{16}$$

ماتریس ژاکوبی روی مرزها نیز به‌صورت رابطه‌ی ۱۷ محاسبه می‌شود:

$$J(\eta)=\begin{bmatrix}x(\eta) & y(\eta)\\ x_{,\eta}(\eta) & y_{,\eta}(\eta)\end{bmatrix} \tag{17}$$

یک بردار دلخواه در فضای $(\hat{x},\hat{y})$ را به‌صورت $\{s\}=[s_{\hat{x}}\ \ s_{\hat{y}}]^T$ در نظر بگیرید. مشتق‌های این بردار با استفاده از اپراتور $[L]$ به‌صورت رابطه‌ی ۱۸ قابل محاسبه است:

$$\left\{\begin{matrix}s_{,\hat{x}}\\ s_{,\hat{y}}\\ s_{,\hat{x}}+s_{,\hat{y}}\end{matrix}\right\}=[L]\left\{\begin{matrix}s_{\hat{x}}\\ s_{\hat{y}}\end{matrix}\right\} \tag{18}$$

که در آن ماتریس $[L]$ از رابطه‌ی ۱۹ قابل محاسبه است:

$$[L]=\begin{bmatrix}\partial/\partial\hat{x} & 0 & \partial/\partial\hat{y}\\ 0 & \partial/\partial\hat{y} & \partial/\partial\hat{x}\end{bmatrix}^T \tag{19}$$

بنابراین، رابطه‌ی مشتق‌های بردار مذکور در دو دستگاه مختصات کلی و محلی با استفاده از رابطه‌ی ۲۰ قابل بیان است:

$$[L]=\left[b^1(\eta)\right]\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\left[b^2(\eta)\right]\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{20}$$

که در آن، $\left[b^1(\eta)\right]$ و $\left[b^2(\eta)\right]$ از روابط ۲۱ و ۲۲ قابل محاسبه هستند:

$$\left[b^1(\eta)\right]=\frac{1}{|J(\eta)|}\begin{bmatrix}y_{,\eta}(\eta) & 0\\ 0 & -x_{,\eta}(\eta)\\ -x_{,\eta}(\eta) & y_{,\eta}(\eta)\end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\left[b^2(\eta)\right]=\frac{1}{|J(\eta)|}\begin{bmatrix}-y(\eta) & 0\\ 0 & x(\eta)\\ x(\eta) & -y(\eta)\end{bmatrix} \tag{22}$$

به منظور محاسبه‌ی ترکشن در هر امتداد، نیاز به دانستن بردار نرمال در آن امتداد است؛ بردار نرمال عمود بر سطح $\{n\}$ بر روی مرزهای مسئله به‌صورت رابطه‌ی ۲۳ تعریف می‌شود:

$$\{n\}=\frac{1}{|\nabla\vec{r}|}\nabla\vec{r} \tag{23}$$

با استفاده از رابطه‌ی ۹ و ۱۰، رابطه‌ی ۲۳ برای دو امتداد ξ و η را می‌توان به‌صورت روابط ۲۴ و ۲۵ نوشت:

$$\left[n^\xi(\eta)\right]=\frac{1}{\left|\left\{\begin{matrix}y_{,\eta}(\eta)\\ -x_{,\eta}(\eta)\end{matrix}\right\}\right|}\begin{bmatrix}y_{,\eta}(\eta) & 0\\ 0 & -x_{,\eta}(\eta)\\ -x_{,\eta}(\eta) & y_{,\eta}(\eta)\end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\left[n^\eta(\eta)\right]=\frac{1}{\left|\left\{\begin{matrix}-y(\eta)\\ x(\eta)\end{matrix}\right\}\right|}\begin{bmatrix}-y(\eta) & 0\\ 0 & x(\eta)\\ x(\eta) & -y(\eta)\end{bmatrix} \tag{25}$$

با اعمال معادلات ۲۴ و ۲۵، معادلات ۲۱ و ۲۲ به‌صورت روابط ۲۶ و ۲۷ یا روابط ۲۸ و ۲۹ بازنویسی می‌شود:

$$\left[b^1(\eta)\right]=\frac{1}{|J(\eta)|}\left|\left\{\begin{matrix}y_{,\eta}(\eta)\\ -x_{,\eta}(\eta)\end{matrix}\right\}\right|\left[n^\xi(\eta)\right] \tag{26}$$

$$\left[b^2(\eta)\right]=\frac{1}{|J(\eta)|}\left|\left\{\begin{matrix}-y(\eta)\\ x(\eta)\end{matrix}\right\}\right|\left[n^\eta(\eta)\right] \tag{27}$$

یا:

$$\left[b^{1}(\eta)\right]=\frac{\left[n^{\xi}(\eta)\right]}{|J(\eta)|}\sqrt{y_{,\eta}^{2}(\eta)+x_{,\eta}^{2}(\eta)} \tag{۲۸}$$

$$\left[b^{2}(\eta)\right]=\frac{\left[n^{\eta}(\eta)\right]}{|J(\eta)|}\sqrt{y^{2}(\eta)+x^{2}(\eta)} \tag{۲۹}$$

۴. مدل‌سازی فیزیک مسئله

در این روش، از توابع شکل با ویژگی‌های خاصی استفاده می‌شود، که در حالت کلی با $[N]$ نشان داده می‌شوند. درون‌یابی توابع، بیانگر خواص فیزیکی مسئله بر روی مرزها با استفاده از این توابع شکل انجام می‌گیرد که دارای دو ویژگی مهم هستند: ۱. در نقاط کنترل المان‌ها، دارای خاصیت دلتای کرونیکر هستند؛ ۲. مشتق اول آن‌ها نسبت به محورهای محلی مماسی در تمام گره‌ها برابر ۰ است. توابع شکل پیشنهادی برای یک المان $(n_\eta+1)$ گرهی، یک چندجمله‌یی از مرتبه‌ی $(2n_\eta+1)$ مانند رابطه‌ی ۳۰ است، که دارای $2n_\eta$ پارامتر مجهول است:

$$N_i(\eta)=\sum_{m=0}^{2n_\eta+1}a_m\eta^m \tag{۳۰}$$

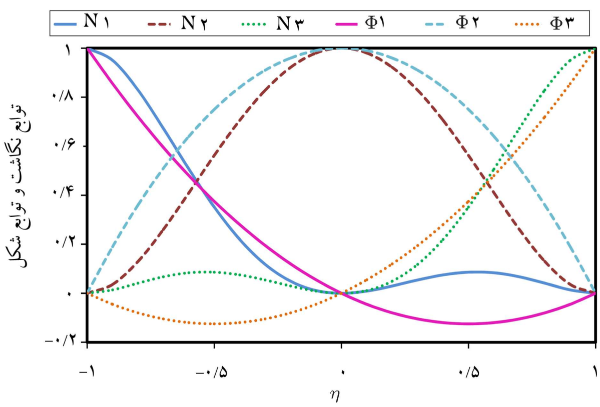
توابع شکل و توابع نگاشت برای یک المان سه‌گرهیی در شکل ۳ مقایسه شده است.

در صورتی که $u(\xi,t)$ جابجایی در حوزه‌ی زمان و تبدیل فوریه‌ی آن $\hat{u}(\xi,\omega)$ جابجایی در حوزه‌ی بسامد باشد؛ با اعمال توابع شکل، جابجایی $\{\hat{u}(\xi,\eta,\omega)\}=[\hat{u}_x(\xi,\eta,\omega)\ \ \hat{u}_y(\xi,\eta,\omega)]^T$ در هر نقطه (ξ,η) و به ازای یک بسامد مشخص ω به‌دست می‌آید (رابطه‌ی ۳۱):

$$\begin{aligned}\{\hat{u}(\xi,\eta,\omega)\}&=[N(\eta)]\{\hat{u}(\xi,\omega)\}\\&=[N(\eta)]\begin{bmatrix}\hat{u}_x(\xi,\omega) & \hat{u}_y(\xi,\omega)\end{bmatrix}^T\end{aligned} \tag{۳۱}$$

با استفاده از روابط ۲۰ و ۳۱، مؤلفه‌های کرنش در نقطه‌ی (ξ,η) در فضای مسئله به‌صورت رابطه‌ی ۳۲ بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}\{\hat{\varepsilon}(\xi,\eta,\omega)\}&=\begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}_x(\xi,\eta,\omega) & \hat{\varepsilon}_y(\xi,\eta,\omega) & \hat{\gamma}_{xy}(\xi,\eta,\omega)\end{bmatrix}^T\\&=\left[B^{1}(\eta)\right]\{\hat{u}(\xi,\omega)\}_{,\xi}+\frac{1}{\xi}\left[B^{2}(\eta)\right]\{\hat{u}(\xi,\omega)\}\end{aligned} \tag{۳۲}$$



شکل ۳. مقایسه‌ی توابع نگاشت و توابع شکل یک المان سه گرهیی.

که در آن $[B^{1}(\eta)]$ و $[B^{2}(\eta)]$ از روابط ۳۳ و ۳۴ به‌دست می‌آیند:

$$\left[B^{1}(\eta)\right]=\left[b^{1}(\eta)\right][N(\eta)] \tag{۳۳}$$

$$\left[B^{2}(\eta)\right]=\left[b^{2}(\eta)\right][N(\eta)] \tag{۳۴}$$

و مشتق اول $[B^{1}(\eta)]$ از رابطه‌ی ۳۵ به‌دست می‌آید:

$$\left[B^{1}(\eta)\right]_{,\eta}=\left[b^{1}(\eta)\right]_{,\eta}[N(\eta)] \tag{۳۵}$$

مؤلفه‌های تنش در هر نقطه به مختصات (ξ,η) با استفاده از قانون هوک[18]، از رابطه‌ی ۳۶ به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\{\hat{\sigma}(\xi,\eta,\omega)\}=[D]\Big(&\left[b^{1}(\eta)\right][N(\eta)]\{\hat{u}(\xi,\omega)\}_{,\xi}\\&+\frac{1}{\xi}\left[b^{2}(\eta)\right][N(\eta)]_{,\eta}\{\hat{u}(\xi,\omega)\}\Big)\end{aligned} \tag{۳۶}$$

که در این رابطه‌ها، $[D]$ بیانگر ماتریس مدول کشسانی است. در رابطه با محاسبه‌ی مؤلفه‌های تنش در نقاط گرهیی، ترم دوم رابطه‌ی ۳۶ برابر صفر می‌شود.

۵. دستگاه معادلات دیفرانسیل بسل

جای‌گذاری معادله‌ی ۲۰ در ترم اول معادله‌ی ۸ در مختصات محلی (یعنی $i=\xi,\eta$)، رابطه‌ی ۳۷ را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}\int_\Omega w\hat{\sigma}_{ij,j}d\Omega=\int_\Omega w(\xi,\eta,\omega)\Big(&\left[b^{1}(\eta)\right]^T\{\hat{\sigma}(\xi,\eta,\omega)\}_{,\xi}\\&+\frac{1}{\xi}\left[b^{2}(\eta)\right]^T\{\hat{\sigma}(\xi,\eta,\omega)\}_{,\eta}\Big)d\Omega\end{aligned} \tag{۳۷}$$

از آنجایی که مشتق نخست تابع شکل نسبت به محور مماسی η در نقاط گرهیی المان‌های واقع در مرزهای مسئله برابر با ۰ است و همچنین با توجه به رابطه‌ی ۳۶، عبارت دوم زیر نماد انتگرال در سمت راست رابطه‌ی ۳۷ به‌صورت رابطه‌ی ۳۸ ساده می‌شود:

$$\{\hat{\sigma}(\xi,\eta,\omega)\}_{,\eta}=\left([D]\left[b^{1}(\eta)\right][N(\eta)]\{\hat{u}(\xi,\omega)\}_{,\xi}\right)_{,\eta} \tag{۳۸}$$

از طرفی، با توجه به اینکه $[D]$ و $\{\hat{u}(\xi,\omega)\}_{,\xi}$ تابع η نیستند، بنابراین رابطه‌ی ۳۸ به شکل رابطه‌ی ۳۹ قابل ارائه است:

$$\begin{aligned}\{\hat{\sigma}(\xi,\eta,\omega)\}_{,\eta}=[D]\Big(&\left[b^{1}(\eta)\right][N(\eta)]_{,\eta}\\&+\left[b^{1}(\eta)\right]_{,\eta}[N(\eta)]\Big)\{\hat{u}(\xi,\omega)\}_{,\xi}\end{aligned} \tag{۳۹}$$

جای‌گذاری رابطه‌های ۳۶ و ۳۹ در رابطه‌ی ۳۷، منجر به رابطه‌ی ۴۰ خواهد شد:

$$\begin{aligned}\int_\Omega w\hat{\sigma}_{ij,j}d\Omega=&\int_\Omega w(\xi,\eta,\omega)\\&\Big(\left[b^{1}(\eta)\right]^T\left([D]\left[b^{1}(\eta)\right][N(\eta)]\{\hat{u}(\xi,\omega)\}_{,\xi}\right)_{,\xi}\\&+\frac{1}{\xi}\left[b^{2}(\eta)\right]^T[D]\Big(\left[b^{1}(\eta)\right][N(\eta)]_{,\eta}\\&+\left[b^{1}(\eta)\right]_{,\eta}[N(\eta)]\Big)\{\hat{u}(\xi,\omega)\}_{,\xi}\Big)d\Omega\end{aligned} \tag{۴۰}$$

با توجه به ویژگی توابع شکل در نقاط گره‌یی ($N_{,\eta}(\eta)=0$)، رابطه‌ی ۴۰ به شکل رابطه‌ی ۴۱ ساده می‌شود:

$$\int_\Omega w\hat{\sigma}_{ij,j}d\Omega=\int_\Omega w(\xi,\eta,\omega)\left[b^1(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right][N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi\xi}d\Omega+\int_\Omega \frac{w(\xi,\eta,\omega)}{\xi}\left[b^2(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right]_{,\eta}[N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi}d\Omega \qquad (۴۱)$$

عبارت دوم و سوم رابطه‌ی ۸ را نیز به ترتیب به‌صورت روابط ۴۲ و ۴۳ می‌توان محاسبه کرد:

$$\int_\Omega w\,\hat f_i\,d\Omega=\int_\Omega w(\xi,\eta,\omega)\left\{\hat f^b(\xi,\eta,\omega)\right\}d\Omega \qquad (۴۲)$$

$$\int_\Omega w\rho\omega^2\hat u_i d\Omega=\int_\Omega w(\xi,\eta,\omega)\,\rho\omega^2\{\hat u(\xi,\eta,\omega)\}d\Omega \qquad (۴۳)$$

که در این روابط، $\left\{\hat f^b(\xi,\eta,\omega)\right\}$ بیانگر مؤلفه‌های نیروهای حجمی در فضای مسئله در بسامد ω است. جای‌گزینی رابطه‌های ۴۱ الی ۴۳ در رابطه‌ی ۸، به رابطه‌ی ۴۴ منتهی می‌شود:

$$\int_\Omega w(\xi,\eta,\omega)\left[b^1(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right][N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi\xi}d\Omega+\int_\Omega\frac{w(\xi,\eta,\omega)}{\xi}\left[b^2(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right]_{,\eta}[N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi}d\Omega+\int_\Omega w(\xi,\eta,\omega)\left\{\hat f^b(\xi,\eta,\omega)\right\}d\Omega+\omega^2\int_\Omega w(\xi,\eta,\omega)\,\rho\{\hat u(\xi,\eta,\omega)\}d\Omega=0 \qquad (۴۴)$$

با استفاده از رابطه‌های ۱۵ الی ۱۷ در رابطه‌ی ۴۴، این رابطه به شکل رابطه‌ی ۴۵ بازنویسی می‌شود:

$$\int_0^{+1}\left(\int_{-1}^{+1}\left(\xi w(\xi,\eta,\omega)\left[b^1(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right][N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi\xi}|J(\eta)|+w(\xi,\eta,\omega)\left[b^2(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right]_{,\eta}[N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi}|J(\eta)|+\xi w(\xi,\eta,\omega)\left\{\hat f^b(\xi,\eta,\omega)\right\}|J(\eta)|+\omega^2\xi w(\xi,\eta,\omega)\rho\{\hat u(\xi,\eta,\omega)\}|J(\eta)|\right)d\eta\right)d\xi=0 \qquad (۴۵)$$

برای اینکه معادله‌ی ۴۵ ارضاء شود، عبارت داخل انتگرال در طول ξ باید برابر ۰ شود (رابطه‌ی ۴۶):

$$\int_{-1}^{+1}\left(\xi w(\xi,\eta,\omega)\left[b^1(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right][N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi\xi}|J(\eta)|+w(\xi,\eta,\omega)\left[b^2(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right]_{,\eta}[N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi}|J(\eta)|+\xi w(\xi,\eta,\omega)\left\{\hat f^b(\xi,\eta,\omega)\right\}|J(\eta)|+\omega^2\xi w(\xi,\eta,\omega)\rho\{\hat u(\xi,\eta,\omega)\}|J(\eta)|\right)d\eta=0 \qquad (۴۶)$$

در مختصات محلی (ξ,η)، تابع وزن $w(\xi,\eta,\omega)$ با استفاده از توابع شکل به‌صورت رابطه‌ی ۴۷ قابل تعریف است:

$$w(\xi,\eta,\omega)=[N(\eta)]\{w(\xi,\omega)\} \qquad (۴۷)$$

حال، با جای‌گزینی رابطه‌ی ۴۷ در رابطه‌ی ۴۶، فرم ضعیف معادله‌ی حاکم بر مسائل الاستودینامیک در حوزه‌ی بسامد در این روش، به شکل رابطه‌ی ۴۸ یا ۴۹ به‌دست می‌آید:

$$\{w(\xi,\omega)\}^T\int_{-1}^{+1}\left(\xi[N(\eta)]^T\left[b^1(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right][N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi\xi}|J(\eta)|+[N(\eta)]^T\left[b^2(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right]_{,\eta}[N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi}|J(\eta)|+\xi[N(\eta)]^T\left\{\hat f^b(\xi,\eta,\omega)\right\}|J(\eta)|+\omega^2\xi[N(\eta)]^T\rho[N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}|J(\eta)|\right)d\eta=0 \qquad (۴۸)$$

یا:

$$\int_{-1}^{+1}\left(\xi[N(\eta)]^T\left[b^1(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right][N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi\xi}|J(\eta)|+[N(\eta)]^T\left[b^2(\eta)\right]^T[D]\left[b^1(\eta)\right]_{,\eta}[N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi}|J(\eta)|+\xi[N(\eta)]^T\left\{\hat f^b(\xi,\eta,\omega)\right\}|J(\eta)|+\omega^2\xi[N(\eta)]^T\rho[N(\eta)]\{\hat u(\xi,\omega)\}|J(\eta)|\right)d\eta=0 \qquad (۴۹)$$

با استفاده از رابطه‌های ۳۳ الی ۳۵، ماتریس‌های ضرایب و بردار موجود در رابطه‌ی ۴۹، به‌صورت روابط ۵۰ الی ۵۳ محاسبه خواهند شد:

$$\left[D^0\right]=\int_{-1}^{+1}\left[B^1(\eta)\right]^T[D]\left[B^1(\eta)\right]|J(\eta)|\,d\eta \qquad (۵۰)$$

$$\left[D^1\right]=\int_{-1}^{+1}\left[B^1(\eta)\right]^T_{,\eta}[D]\left[B^2(\eta)\right]|J(\eta)|\,d\eta \qquad (۵۱)$$

$$[M]=\int_{-1}^{+1}[N(\eta)]^T\rho[N(\eta)]|J(\eta)|\,d\eta \qquad (۵۲)$$

$$\left\{\hat F^b(\xi,\omega)\right\}=\int_{-1}^{+1}[N(\eta)]^T\left\{\hat f^b(\xi,\eta,\omega)\right\}|J(\eta)|\,d\eta \qquad (۵۳)$$

بنابراین رابطه‌ی ۴۹ را به شکل رابطه‌ی ساده‌شده‌ی ۵۴ می‌توان نوشت:

$$\xi\left[D^0\right]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi\xi}+\left[D^1\right]\{\hat u(\xi,\omega)\}_{,\xi}\quad \omega^2\xi[M]\{\hat u(\xi,\omega)\}+\xi\left\{\hat F^b(\xi,\omega)\right\}=0 \qquad (۵۴)$$

که در آن، $\left\{\hat F^b(\xi,\omega)\right\}=\left[\hat F^b_x(\xi,\omega)\ \ \hat F^b_y(\xi,\omega)\right]^T$ بردار نیروهای گره‌یی در نقاط کنترل روی مرزها در بسامد ω است. با توجه به اینکه ماتریس‌های ضرایب $[D^0]$، $[D^1]$، $[M]$، مستقل از ξ هستند؛ بنابراین معادله‌ی حاکم بر مسائل الاستودینامیک در این روش در درون حوزه‌ی مسئله و به ازای هر یک از درجات آزادی به‌صورت یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم خواهد بود، که از حل آن در امتداد ξ و بر حسب بسامد، پاسخ مرتبط با آن درجه‌ی آزادی در حوزه‌ی بسامد حاصل می‌شود. این تذکر لازم است که این معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم از نوع معادله‌ی دیفرانسیل بسل است.

۶. دستگاه معادلات دیفرانسیل بسل قطری

با توجه به اینکه در این روش، نقاط گره‌یی المان‌ها از نوع نقاط چبیشفی هستند، به منظور محاسبه‌ی انتگرال‌های موجود در محاسبه‌ی ماتریس‌های ضرایب، روش انتگرال‌گیری کلنشا ـ کورتیس[۳۲] مورد استفاده قرار می‌گیرد. به این ترتیب، با استفاده‌ی هم‌زمان از توابع نگاشت و توابع شکل ویژه و نیز روش انتگرال‌گیری کلنشا ـ کورتیس، کلیه‌ی ماتریس‌های ضرایب در این روش، قطری خواهند شد. انتگرال‌گیری یک‌بعدی روی یک المان دلخواه Γ_e با استفاده از روش کلنشا ـ کورتیس برای یک تابع دلخواه $g(\eta)$ به صوت رابطه‌ی ۵۵ تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_e} f\left(x\left(\eta\right), y\left(\eta\right)\right)\, d\Gamma = \\ \int_{-1}^{+1} f\left(x\left(\eta\right), y\left(\eta\right)\right)\, J\left(\eta\right)\, d\eta = \\ \int_{-1}^{+1} g\left(\eta\right)\, d\eta\end{aligned} \tag{۵۵}$$

که در آن $g(\eta)$ انتقال‌یافته‌ی $f(x,y)$ از مختصات کلی به مختصات محلی است و مقدار رابطه‌ی ۵۵ با استفاده از رابطه‌ی ۵۶ قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}\int_a^b g\left(\eta\right) d\eta = (b-a) \\ \left(\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{3}c_3 - \frac{1}{15}c_5 - \ldots - \frac{c_{2k+1}}{(2k+1)(2k-1)} - \ldots\right)\end{aligned} \tag{۵۶}$$

که در آن، ضرایب وزن به‌صورت رابطه‌ی ۵۷ تعیین می‌شوند:

$$c_j = \frac{2}{n_\eta} \sum_{k=0}^{n_\eta}{}'' g\left(\eta_k\right) \cos\left(\frac{\pi\left(j-1\right)k}{n_\eta}\right) \tag{۵۷}$$

در این رابطه، علامت بالای نماد سیگما بیانگر این است که عبارت‌های نخستین و پایانی سیگما با ضریب ۰٫۵ در محاسبات وارد می‌شوند. ماتریس‌های ضرایب موجود در معادله‌ی حاکم بر مسائل الاستودینامیک دو بعدی به صورت قطری‌شده (روابط ۵۸ الی ۶۰) قابل محاسبه هستند:

$$D^0_{ij} = 2\delta_{ij} w_i \left[B^1\left(\eta_i\right)\right]^T \left[D\right] \left[B^1\left(\eta_i\right)\right] \left|J\left(\eta_i\right)\right| \tag{۵۸}$$

$$D^1_{ij} = 2\delta_{ij} w_i \left[B^1\left(\eta_i\right)\right]^T_{,\eta} \left[D\right] \left[B^2\left(\eta_i\right)\right] \left|J\left(\eta_i\right)\right| \tag{۵۹}$$

$$M_{ij} = 2\delta_{ij} w_i \left[N\left(\eta_i\right)\right]^T \rho \left[N\left(\eta_i\right)\right] \left|J\left(\eta_i\right)\right| \tag{۶۰}$$

در این روابط، δ_{ij} دلتای کرونیکر است، بنابراین دستگاه معادلات درگیر رابطه‌ی ۵۴ را می توان به صورت روابط ۶۱ یا ۶۲ به ازای هر درجه‌ی آزادی i نوشت:

$$\begin{aligned}&\xi \begin{bmatrix} D^0_{11x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D^0_{11y} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & D^0_{nnx} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D^0_{nny} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{1x} \\ \hat{u}_{1y} \\ \vdots \\ \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{Bmatrix}_{,\xi\xi} \\ &+ \begin{bmatrix} D^1_{11x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D^1_{11y} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & D^1_{nnx} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D^1_{nny} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{1x} \\ \hat{u}_{1y} \\ \vdots \\ \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{Bmatrix}_{,\xi} \\ &+\omega^2\xi \begin{bmatrix} M_{11x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M_{11y} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & M_{nnx} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M_{nny} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{1x} \\ \hat{u}_{1y} \\ \vdots \\ \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{Bmatrix} \\ &+\xi \begin{Bmatrix} \hat{F}^b_{1x} \\ \hat{F}^b_{1y} \\ \vdots \\ \hat{F}^b_{nx} \\ \hat{F}^b_{ny} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{۶۱}$$

یا:

$$\begin{aligned}&\xi D^0_{ii}\, \hat{u}\left(\xi,\omega\right)_{i,\xi\xi} + D^1_{ii}\, \hat{u}\left(\xi,\omega\right)_{i,\xi} + \omega^2 \xi M_{ii} \hat{u}\left(\xi,\omega\right)_i \\ &\quad + \xi \hat{F}^b\left(\xi,\omega\right)_i = 0\end{aligned} \tag{۶۲}$$

این تذکر لازم است که معادله‌ی ۶۲ یک معادله‌ی دیفرانسیل بسل است که به ازای هر i، مستقل از بقیه‌ی معادلات است و برای محاسبه‌ی تغییرمکان و تنش در هر نقطه کافی است که معادله‌ی دیفرانسیل متناظر با نقطه‌ی کنترل مرتبط با آن نقطه حل شود.

۷. حل در حوزه‌ی بسامد

برای حل معادله‌ی ۶۲ در هر درجه‌ی آزادی از آنالیز در حوزه‌ی بسامد استفاده می‌شود. برای انتقال تابع باروابسته به زمان $f(t)$ به تابع بار $\hat{f}(\omega)$ در حوزه‌ی بسامد از تبدیل فوریه‌ی سریع (FFT) استفاده می‌شود.[۳۲،۳۳] سپس این معادله برای تعیین پاسخ دینامیکی $\hat{u}(\xi,\omega)$ در حوزه‌ی بسامد به کار گرفته می‌شود. در نهایت با اعمال معکوس تبدیل فوریه سریع (IFFT) تاریخچه‌ی زمانی پاسخ به‌دست می‌آید.

تابع باروابسته به زمان $f(t)$ توسط N مقدارگسسته تعریف می‌شود ($N = 2^n$ و n عدد صحیح است). در این صورت گام زمانی برابر خواهد بود با $\Delta t = T/N$ و $T = 2\pi/\Delta\omega$ مدت زمان اعمال بار در حوزه‌ی زمان است. با اعمال تبدیل فوریه‌ی سریع به تابع بار در حوزه‌ی زمان، خروجی به‌صورت N عدد مختلط گسسته خواهد بود، که $N/2$ اول این اعداد با $N/2$ دوم فقط در علامت قسمت موهومی با

هم متفاوت خواهند بود. این تذکر لازم است که بسامد نایکویست[۱۹] به این صورت تعریف می‌شود: $\omega_n = N\pi/T$.

الگوریتم حل در حوزه‌ی بسامد با استفاده از تبدیل فوریه‌ی سریع و معکوس آن در این گام‌ها خلاصه می‌شود:[۳۴]

۱. تعیین تعداد مقادیر گسسته N و گام‌های بسامدی $\Delta\omega$. این تذکر لازم است که گام‌های بسامدی باید به اندازه‌ی کافی کوچک اختیار شوند تا اتلاف اطلاعات بسامدی به مقدار کمینه برسد.

۲. اعمال تبدیل فوریه‌ی سریع به منظور تعیین شرایط مرزی در حوزه‌ی بسامد $\hat{f}(\omega)$ از روی شرایط مرزی در حوزه‌ی زمان $f(t)$.

۳. درنظرگرفتن $(\frac{N}{2}+1)$ بسامد اول که در آن:

$$\{\omega_k = k\Delta\omega, \quad (k = 0, 1, ..., N/2)\}$$

به منظور تعیین پاسخ بسامدی $\hat{u}(\xi,\omega)$ برای $(\frac{N}{2}+1)$ بسامد. با توجه به خاصیت تبدیل فوریه[۲۰]، پاسخ بسامدی $\hat{u}(\xi,\omega)$ به ازای $(\frac{N}{2}-1)$ بسامد باقی‌مانده برابر با پاسخ به‌دست‌آمده برای $(\frac{N}{2}+1)$ بسامد اول خواهد بود، با این تفاوت که قسمت موهومی در یک منفی ضرب خواهد شد.

۴. اعمال تبدیل معکوس فوریه‌ی سریع بر روی $\hat{u}(\xi,\omega)$ به منظور تعیین تاریخچه‌ی زمانی پاسخ $u(\xi,t)$.

۸. حل معادله‌ی حاکم بر مسائل الاستودینامیک در حوزه‌ی بسامد

به منظور حل معادله‌ی دیفرانسیل (رابطه‌ی ۶۲)، معادله به دو بخش تقسیم می‌شود، که از حل معادله‌ی اول جواب عمومی مسئله (رابطه‌ی ۶۳) و از حل معادله‌ی دوم جواب خصوصی مسئله (رابطه‌ی ۶۴) به‌دست می‌آید:

$$\xi D^{0}_{ii}\,\hat{u}(\xi,\omega)_{i,\xi\xi} + D^{1}_{ii}\,\hat{u}(\xi,\omega)_{i,\xi} + \omega^2\xi M_{ii}\hat{u}(\xi,\omega)_i = 0 \qquad (۶۳)$$

$$\begin{aligned}\xi D^{0}_{ii}\,\hat{u}(\xi,\omega)_{i,\xi\xi} + D^{1}_{ii}\,\hat{u}(\xi,\omega)_{i,\xi} + \omega^2\xi M_{ii}\hat{u}(\xi,\omega)_i \\ = -\xi\hat{F}^b(\xi,\omega)_i\end{aligned} \qquad (۶۴)$$

رابطه‌ی ۶۳، معادله‌ی دیفرانسیل بسل است که می‌تواند هم به‌صورت تحلیلی و هم به‌صورت عددی حل شود. برای iاُمین درجه‌ی آزادی، متغیرهای λ_i^2 و b_i (روابط ۶۵ و ۶۶) تعریف می‌شوند:

$$\lambda_i^2 = \frac{\omega^2 M_{ii}}{D^{0}_{ii}} \qquad (۶۵)$$

$$b_i = \frac{D^{1}_{ii}}{D^{0}_{ii}} \qquad (۶۶)$$

با درنظرگرفتن معادلات ۶۵ و ۶۶، جواب عمومی معادله (رابطه‌ی ۶۳) به‌صورت رابطه‌ی ۶۷ تعیین می‌شود:

$$\hat{u}(\xi,\omega)_{ci} = A_i\xi^{\left(\frac{1-a_i}{2}\right)}J_{\left(\frac{a_i-1}{2}\right)}(\lambda_i\xi) + B_i\xi^{\left(\frac{1-a_i}{2}\right)}Y_{\left(\frac{a_i-1}{2}\right)}(\lambda_i\xi) \qquad (۶۷)$$

که در آن J_v، Y_v و به ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم از مرتبه‌ی v هستند.

درگام دوم، معادله‌ی ۶۴ حل می‌شود. جواب این معادله به‌صورت رابطه‌ی ۶۸ به‌دست می‌آید:

$$\hat{u}(\xi,\omega)_{pi} = \frac{-1}{\omega^2 M_{ii}}\hat{F}^b(\xi,\omega)_i \qquad (۶۸)$$

با استفاده از معادلات ۶۷ و ۶۸، حل تحلیلی معادله‌ی تعادل حاکم بر مسائل الاستودینامیک در حوزه‌ی بسامد به‌صورت رابطه‌ی ۶۹ تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,\omega)_i = {} & A_i\xi^{\left(\frac{1-a_i}{2}\right)}J_{\left(\frac{a_i-1}{2}\right)}(\lambda_i\xi) + B_i\xi^{\left(\frac{1-a_i}{2}\right)}Y_{\left(\frac{a_i-1}{2}\right)}(\lambda_i\xi) \\ & -\frac{1}{\omega^2 M_{ii}}\hat{F}^b(\xi,\omega)\end{aligned} \qquad (۶۹)$$

به منظور حل مسائل، ابتدا معادله‌ی ۶۹ بدون درنظرگرفتن بار حجمی حل می‌شود. سپس، با استفاده از روابط تعادل، مقدار مؤلفه‌های نیروهای داخلی متمرکز مرتبط با هر گره در امتداد محور ξ و همچنین مؤلفه‌های تنش داخلی در نقطه‌ی LCO (σ_{LCOi}) را برای گره‌ی iاُم می‌توان محاسبه کرد.

درگام پایانی و با مشخص‌شدن تابع مؤلفه‌های تغییرمکان برای هر گره در امتداد محور ξ، پاسخ برای سایر نقاط، با استفاده توابع شکل درون‌یابی می‌شود، همچنین میزان تنش در هر نقطه از حوزه‌ی مسئله نیز با استفاده از رابطه‌ی ۳۶ تعیین می‌شود.

۹. مثال‌های عددی

۱.۹. صفحه‌ی طره‌یی تحت بار دینامیکی برشی گسترده

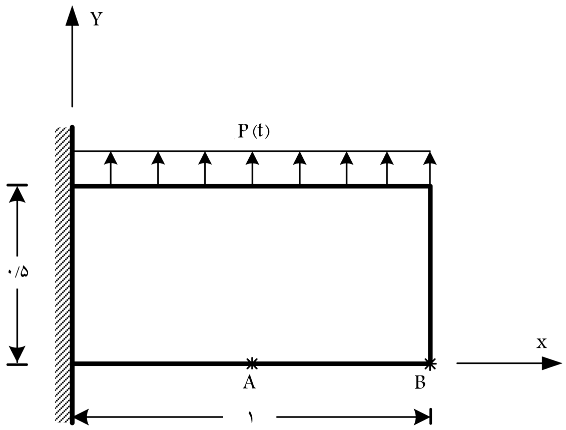
مثال اول، یک صفحه‌ی طره‌یی تحت بار دینامیکی برشی است. در این مثال بارگذاری دینامیکی به‌صورت ضربه‌ی مثلثی است و با توزیع یکنواخت بر لبه‌ی فوقانی صفحه اعمال می‌شود (شکل ۴). ضریب پواسون در این مثال برابر ۰٫۳ و مدول کشسانی و چگالی مصالح برابر ۱ لحاظ می‌شود. به منظور مدل‌سازی هندسه‌ی مسئله (شکل ۴ب) مرکز مختصات محلی در گوشه‌ی پایین سمت چپ صفحه انتخاب شده است. مرزهای مسئله با استفاده از سه المان ۳ گره‌یی و با ۷ گره مش‌بندی شده است.

به منظور حل این مثال، از حل معادله‌ی حاکم بر مسائل الاستودینامیک در حوزه‌ی بسامد استفاده شده است. تعداد گسسته‌سازی برای تبدیل فوریه‌ی سریع و معکوس آن، با افزایش تعداد بسامدها $N = 2^{11} = 2048$ در نظرگرفته شده است.

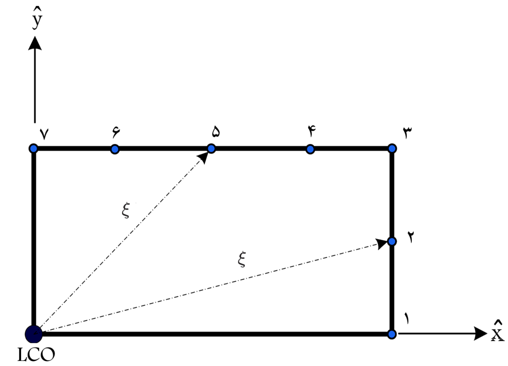
نتایج حاصل از حل این مسئله با استفاده از این روش در حوزه‌ی بسامد با عنوان تاریخچه‌ی تغییرمکان قائم نقطه‌ی B و تاریخچه‌ی تنش افقی نقطه‌ی A به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ ارائه شده است. به منظور مقایسه، نتایج حاصل از حل این مسئله با استفاده از روش‌های دیگر عددی نیز در این شکل‌ها ارائه شده است، که ملاحظه می‌شود نتایج حاصل از این روش انطباق خوبی با نتایج حاصل از سایر روش‌ها دارد.

۲.۹. یک قلمروی L شکل تحت بارگذاری مثلثی

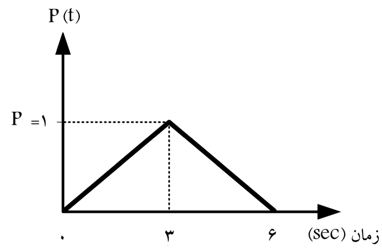
برای مثال دوم، یک قلمروی L شکل تحت بارگذاری مثلثی در نظرگرفته می‌شود (شکل ۷). ابعاد این مثال به‌صورت واحد در نظرگرفته شده است. مشخصات مصالح این مثال به این شرح است: ضریب پواسون برابر۱/۳ و مدول کشسانی و چگالی مصالح برابر ۱ لحاظ می‌شود. سرعت موج برشی برابر $c_s = \sqrt{3/8}$ و



الف) هندسه و بارگذاری؛

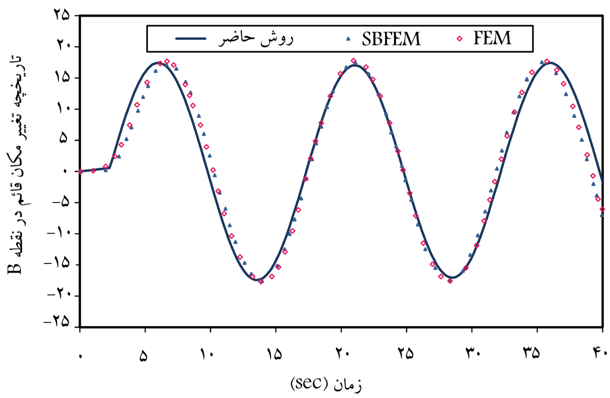


ب) مش بندی و محل LCO؛

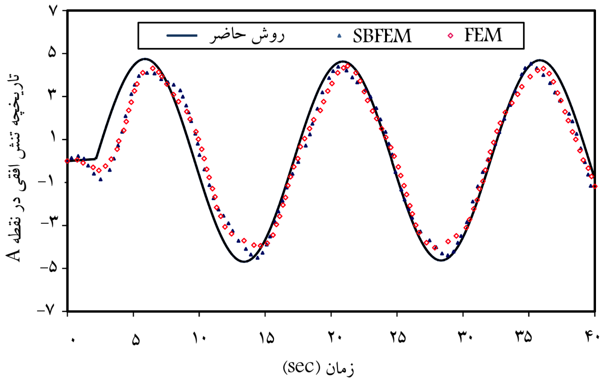


ج) تاریخچه ی بارگذاری.

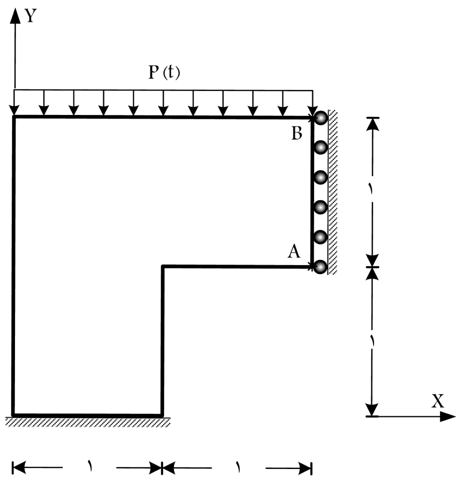
شکل ۴. مثال ۱.



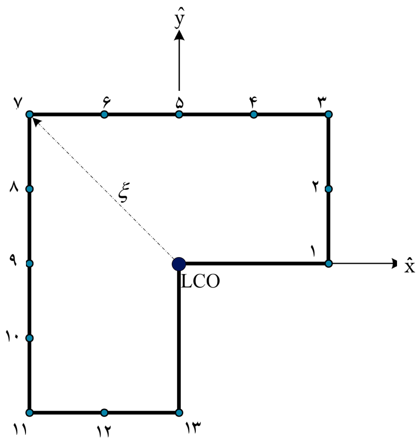
شکل ۵. تاریخچه‌ی تغییرمکان قائم در نقطه‌ی B (مثال ۱).



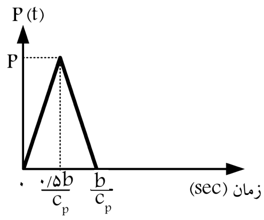
شکل ۶. تاریخچه‌ی تنش افقی بی‌بعد ($\frac{\sigma_{xx}}{P_0}$) در نقطه‌ی A (مثال ۱).



الف) هندسه و بارگذاری؛

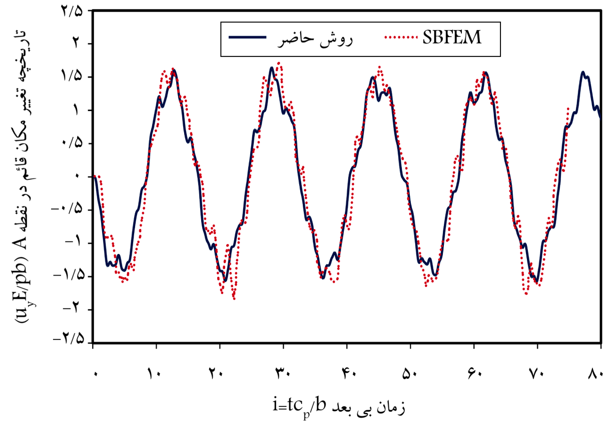


ب) مش بندی و محل LCO؛

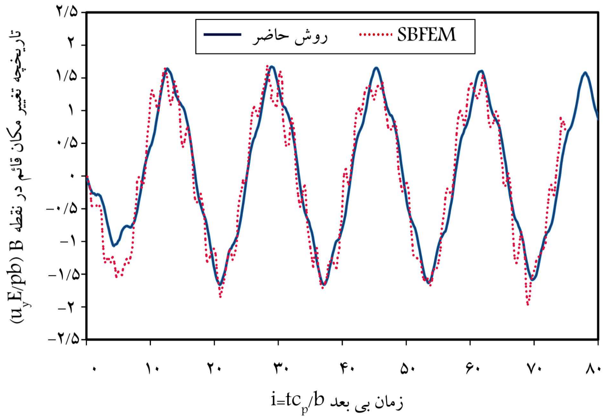


ج) تاریخچه ی بارگذاری.

شکل ۷. مثال ۲.



شکل ۸. تاریخچه‌ی تغییرمکان قائم در نقطه‌ی **A** (مثال ۲).



شکل ۹. تاریخچه‌ی تغییرمکان قائم در نقطه‌ی **B** (مثال ۲).

سرعت موج p برابر $c_p = \sqrt{\text{۹/۸}}$ است. بارگذاری و محل قرارگیری نقطه‌ی LCO در شکل ۷ب نشان داده شده است. مرزهای مسئله با استفاده از شش المان ۳ گره‌یی و با ۱۳ گره مش‌بندی شده است.

نتایج حاصل از حل این مسئله با استفاده از این روش در حوزه‌ی بسامد با عنوان تاریخچه‌ی تغییرمکان قائم نقطه‌ی A و B به ترتیب در شکل‌های ۸ و ۹ ارائه شده است. به منظور مقایسه، نتایج حاصل از حل این مسئله با استفاده از روش دیگر عددی نیز در این شکل‌ها ارائه شده است.

۱۰. نتیجه‌گیری

در این نوشتار، یک روش نیمه‌تحلیلی جدید برای حل مسائل الاستودینامیک دوبعدی در حوزه‌ی بسامد ارائه شده است. این روش، توسعه‌ی قبلی ایده‌های نویسندگان برای مسائل پتانسیل و الاستواستاتیک است. از تبدیل فوریه‌ی سریع و معکوس آن جهت تعیین تاریخچه‌ی زمانی پاسخ استفاده شده است. با استفاده از المان‌های غیرایزوپارامتریک، مرز مسئله گسسته‌سازی شده است. با استفاده از توابع چبیشف مرتبه‌ی بالا به‌عنوان توابع نگاشت، توابع شکل ویژه (که دارای خاصیت دلتای کرونیکر برای تابع جابجایی و مشتق آن بودند)، انتگرال‌گیری عددی کلنشا ـ کورتیس و استفاده از فرم ضعیف معادله‌ی حاکم بر مسائل الاستودینامیک، ماتریس‌های ضرایب دستگاه معادلات حاکم به ماتریس‌های قطری تبدیل شدند. در نتیجه، معادله‌ی بسل حاکم برای هر درجه‌ی آزادی مستقل از سایر درجات آزادی خواهد بود. به منظور ارزیابی توان روش برای حل مسائل الاستودینامیک، دو مثال نمونه با استفاده از روش حاضر با موفقیت تحلیل و نشان داده شد که در مقایسه با سایر روش‌های عددی، تعداد درجات آزادی کم‌تری مورد نیاز است تا دقت مناسب به‌دست آید.

منابع (References)

1. Zienkiewicz, O.C. and Taylor R.L., *The Finite Element Method*, Oxford, Butterworth and Heinmann (2000).

2. Freitas, J.A.T. and Wang, Z.M. "Elastodynamic analysis with hybrid stress finite elements", *Computers & Structures*, 79(19), pp. 1753-1767 (2001).

3. Boroomand, B. and Mossaiby, F. "Dynamic solution of unbounded domains using finite element method: Discrete green's functions in frequency domain", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **67**(11), pp. 1491-1530 (2006).

4. Loureiro, F.S. and Mansur, W.J. "An efficient hybrid time-Laplace domain method for elastodynamic analysis based on the explicit Green's approach", *International Journal of Solids and Structures*, **46**(16), pp. 3093-3102 (2009).

5. Frangi, A. and Novati, G. "on the numerical stability of time-domain elastodynamic analyses by BEM", *Com-*

پانوشت‌ها

1. non-isoparametric higher-order element
2. higher-order Chebyshev polynomials
3. mapping functions
4. Clenshaw-Curtis quadrature rule
5. weighted residual method
6. Bessel
7. finite elements method (FEM)
8. spectral elements method (SEM)
9. boundary elements method (BEM)
10. scaled boundary-finite element method (SBFEM)
11. mesh free method
12. fundamental solution
13. strong form
14. weak form
15. local coordinate origin (LCO)
16. control point
17. Jacobian matrix
18. Hook's low
19. Nyquist circular frequency
20. conjugate symmetric property

puter Methods in Applied Mechanics and Engineering, **173**(3-4), pp. 403-417 (1999).

6. Pérez-Gavilán, J.J. and Aliabadi, M.H. "A Galerkin boundary element formulation with dual reciprocity for elastodynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **48**(9), pp. 1331-1344 (2000).
7. Chien, C. and Wu, T. "A particular integral BEM/time-discontinuous FEM methodology for solving 2-D elastodynamic problems", *International Journal of Solids and Structures,* **38**(2), pp. 289-306 (2001).
8. Chien, C., Chen, Y. and Chuang, C. "Dual reciprocity BEM analysis of 2D transient elastodynamic problems by time-discontinuous Galerkin FEM", *Engineering Analysis with Boundary Elements,* **27**(6), pp. 611-624 (2003).
9. Soares Jr., D. and Mansur, W.J. "An efficient stabilized boundary element formulation for 2D time-domain acoustics and elastodynamics", *Computational Mechanics,* **40**(2), pp. 355-365 (2007).
10. Sellountos, E.J., Sequeira, A. and Polyzos, D. "A new LBIE method for solving elastodynamic problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements,* **35**(2), pp. 185-190 (2011).
11. Hamzeh Javaran, S., Khaji, N. and Moharrami, H. "A dual reciprocity BEM approach using new Fourier radial basis functions applied to 2D elastodynamic transient analysis", *Engineering Analysis with Boundary Elements,* **35**(1), pp. 85-95 (2011).
12. Hamzeh Javaran, S., Khaji, N. and Noorzad, A. "First kind Bessel function (J-Bessel) as radial basis function for plane dynamic analysis using dual reciprocity boundary element method", *Acta Mechanica,* **218**(3-4), pp. 247-258 (2011).
13. Xiao, J., Ye, W., Cai, Y. and Zhang, J. "Precorrected FFT accelerated BEM for large-scale transient elastodynamic analysis using frequency-domain approach", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* DOI: 10.1002/nme.3316 (2011).
14. Wolf, J.P., *The Scaled Boundary Finite Element Method*, John Wiley & Sons (2004).
15. Song, C. and Wolf, J.P. "The scaled boundary finite-element method: analytical solution in frequency domain", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* **164**(1-2), pp. 249-264 (1998).
16. Wolf, J.P. and Song, C. "The scaled boundary finite-element method - a primer: Derivations", *Computers & Structures,* **78**(1-3), pp. 191-210 (2000).
17. Song, C. and Wolf, J.P. "The scaled boundary finite-element method - a primer: solution procedures", *Computers & Structures*, **78**(1-3), pp. 211-225 (2000).
18. Bazyar, M.H. and Song, C. "Transient analysis of wave propagation in non homogeneous elastic unbounded domains by using the scaled boundary finite-element method", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics,* **35**(14), pp. 1787-1806 (2006).
19. Bazyar, M.H. and Song, C. "Time-harmonic response of non-homogeneous elastic unbounded domains using the scaled boundary finite-element method", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics,* **35**(3), pp. 357-383 (2006).
20. Yang, Z.J. and Deeks, A.J. "A frequency-domain approach for modelling transient elastodynamics using scaled boundary finite element method", *Computational Mechanics*, **40**(4), pp. 725-738 (2007).
21. Yang, Z.J., Deeks, A.J. and Hao, H. "A Frobenius solution to the scaled boundary finite element equations in frequency domain for bounded media", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **70**(12), pp. 1387-1408 (2007).
22. Song, C. "The scaled boundary finite element method in structural dynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **77**(8), pp. 1139-1171 (2009).
23. Zhang, Z.H., Yang Z.J., Liu G.H. and et al. "An adaptive scaled boundary finite element method by subdividing subdomains for elastodynamic problems", *Sci China Tech Sci,* **54**(1), pp. 101-110, doi: 10.1007/s11431-011-4598-3 (2011).
24. Yang, Z.J., Zhang, Z.H., Liu, G.H. and Ooi, E.T. "An h-hierarchical adaptive scaled boundary finite element method for elastodynamics", *Computers & Structures,* **89**(13-14), pp. 1417-1429 (2011).
25. Golubchick, A. and Altus, E. "A semi-analytic method for solving some 2-D elastodynamic problems in semi-infinite media", *Computational Mechanics,* **24**(4), pp. 268-272 (1999).
26. Yang, J., Abubakar, A., Berg, P.M., Habashy, T.M. and Reitich, F. "A CG-FFT approach to the solution of a stress-velocity formulation of three-dimensional elastic scattering problems", *Journal of Computational Physics,* **227**(24), pp. 10018-10039 (2008).
27. Touhei, T. "Generalized Fourier transform and its application to the volume integral equation for elastic wave propagation in a half space", *International Journal of Solids and Structures,* **46**(1), pp. 52-73 (1 January 2009).
28. Khaji, N. and Khodakarami, M.I. "A new semi-analytical method with diagonal coefficient matrices for potential problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements,* **35**(6), pp. 845-854 (2011).
29. Khodakarami, M.I. and Khaji, N. "Analysis of elastostatic problems using a semianalytical method with diagonal coefficient matrices", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **35**(12), pp. 1288-1296 (2011).
30. Khaji, N. and Khodakarami, M.I. "A semi-analytical method with a system of decoupled ordinary differential equations for three-dimensional elastostatic problems", *International Journal of Solids and Structures,* **49**(18), pp. 2528-2546 (2012).
31. Clenshaw, C.W. and Curtis, A. "A method for numerical integration on an automatic computer", *Numerische Mathematik,* **2**(1), pp. 197-205 (1960).
32. Brigham, E.O., *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1974).
33. Duffy, D.G., *Advanced Engineering Mathematics,* CRC Press LLC (1998).
34. Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P., *Numerical Recipes in C*, the Art of Scientific Computing, 2nd ed. (1992).
35. Lebedev, N.N., *Special Functions and their Applications,* Prentice-Hall (1965).