

مدل سازی عددی شکست هیدرولیکی در مخازن نفتی با اجزاء محدود توسعه یافته

مصطفی مولا علی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

محمود یزدانی* (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۳۹۳ (۱۱-۳-۲) شماره ۱/۳، ص. ۱۱-۳

از جمله روش‌های استخراج نفت و گاز، شکست هیدرولیکی است که طی آن، سیالی با فشاری بیشتر از تنش بر جای منطقه به محلی از چاه که توسط پکرها ایزوله شده است، تزریق می‌شود و در نهایت، زمانی که فشار سیال از تنش بر جای حاکم بر منطقه فراتر رود، شکست هیدرولیکی رخ خواهد داد. یکی از جدیدترین روش‌های عددی جهت مدل سازی شکست هیدرولیکی روش اجزاء محدود توسعه یافته است. در این روش، با توجه به اصل تفکیک پیوستگی در اثر اعمال توابعی ویژه، گره‌های اطراف ترک غنی می‌شوند و در نتیجه درجات آزادی گره‌ها افزایش می‌یابند و به واسطه‌ی همین درجات آزادی، بیشتر امکان تغییر در جابجایی‌های گره‌ی اطراف ترک فراهم می‌آید. در این پژوهش، برای انجام مدل سازی یک برنامه‌ی رایانه‌ی به روش اجزاء محدود توسعه یافته نوشته شده است. برای صحت سنجی برنامه‌ی رایانه‌ی، نتایج آن با یک حل تحلیلی دوبعدی مقایسه شده و درستی آن به تأیید رسیده است.

واژگان کلیدی: شکست هیدرولیکی، مخازن نفتی، اجزاء محدود توسعه یافته.

۱. مقدمه

با گذشت بیش از ۱۰۰ سال از فرآیند استخراج نفت و گاز از منابع انرژی کشور، متأسفانه در حال حاضر شاهد هستیم که بسیاری از این مخازن به‌ویژه آنها که دارای نفوذپذیری بالایی بوده‌اند، به تدریج رو به اتمام هستند. از این رو، گرایش به سمت مخازن با نفوذپذیری پایین بیشتر شده است. (همچنین پس از استخراج طولانی مدت محصولات هیدروکربنی، فشار طبیعی مخزن کاهش می‌یابد و ترک‌های اولیه مسدود می‌شوند و تولید مخزن پایین می‌آید). بنابراین، برای بهره‌برداری بهینه و احیاء این مخازن، لازم است که عملیات اضافی روی آنها صورت گیرد. این عملیات اضافی، افزایش بازده چاه را در پی دارند.

دستیابی به نقاط مختلف مخازن نفت از طریق حفر چاه در مخزن مورد نظر انجام می‌شود. پس از حفر چاه، نفت به‌وسیله‌ی جریان در محیط سنگی به طرف چاه حرکت می‌کند و نفت استحصال شده از طریق چاه به خارج منتقل می‌شود. جریان ورودی از مخزن به چاه، ندرتاً مطابق دبی پیش‌بینی شده است؛ زیرا در اثر پایین بودن نفوذپذیری مخزن و یا صدمات وارد شده به مخزن، محدودیتی در جریان سیال ایجاد و مجاری انتقال سیال از مخزن به چاه مسدود می‌شود. جهت رفع این مشکل و افزایش ارتباط چاه با مخزن معمولاً از روش‌های تحریک استفاده می‌شود.

به‌طور کلی دو روش اسیدکاری و شکست هیدرولیکی جهت تحریک وجود دارند، که روش انتخابی مورد استفاده به هدف نهایی فرآیند تحریک بستگی دارد.

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۱۲/۱۳، اصلاحیه ۱۳۹۲/۱/۳۱، پذیرش ۱۳۹۲/۴/۱۷.

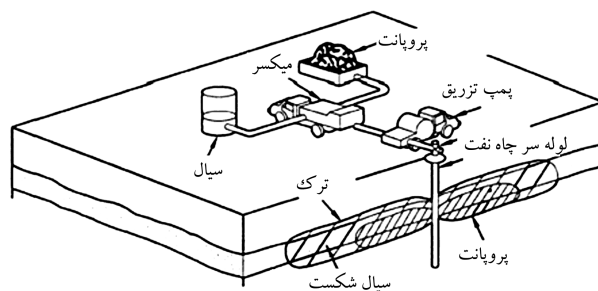
شکست هیدرولیکی اولین بار در سال ۱۹۳۰ در صنعت نفت و گاز آغاز شد، زمانی که شرکت دو کمیکال^۱ پی برد که با استفاده از فشار کافی سیال در گمانه، تغییر شکل و شکستگی سنگ مؤثرتر از روش تحریک اسید است.^[۱] اولین آزمایش شکست هیدرولیکی غیراسیدی جهت تحریک مخزن در سال ۱۹۴۷ در کانزاس^۲ بر روی یک چاه گاز، در حوزه‌ی نفتی هوگوتون^۳ برای مقایسه‌ی این روش با تکنولوژی تحریک اسید انجام گرفت.^[۲] در حال حاضر، شکست هیدرولیکی برای افزایش بهره‌وری چاه‌های نفت و گاز مورد استفاده قرار می‌گیرد. از چاه‌های تولیدی حفر شده در شمال آمریکا از سال ۱۹۵۰ تاکنون، حدود ۷۰ درصد چاه‌های گاز و ۵۰٪ چاه‌های نفت به روش شکست هیدرولیکی افزایش ظرفیت یافته‌اند.^[۳]

شکست هیدرولیکی به عملیاتی اطلاق می‌شود که طی آن سیالی با فشاری بیشتر از تنش بر جای منطقه به محلی از چاه، که توسط پکرها ایزوله شده است، تزریق می‌شود و در نهایت، زمانی که فشار سیال از تنش بر جای حاکم بر منطقه فراتر رود، شکست هیدرولیکی رخ خواهد داد. در فرآیند شکست هیدرولیکی، ترک‌هایی از دیواره‌ی چاه به سوی مخزن نفت و گاز ایجاد می‌شود. پس از اتمام پمپاژ سیال، در اثر نشست سیال به مخزن، فشار وارده به دیواره‌ی ترک کاهش می‌یابد و ترک بسته می‌شود. به منظور جلوگیری از بسته شدن ترک و حفظ قابلیت هدایت هیدرولیکی آن (که اثر مهمی در افزایش تولید چاه دارد)، از موادی به نام پروپانت^۴ استفاده می‌کنند (شکل ۱).

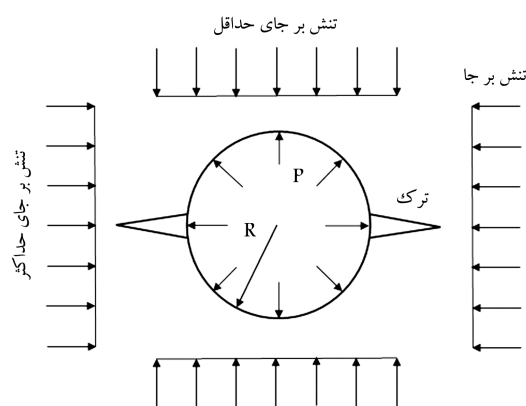
مدل KGD^۵، اولین مدل جهت پیش‌بینی شکل هندسی ترک ایجاد شده طی

در سه دهه‌ی اخیر، روش‌های مختلفی برای مدل‌سازی عددی شکست هیدرولیکی به کار گرفته شده است. گسسته‌سازی معادلات کشسانی در شکست هیدرولیکی با استفاده از روش‌های تحلیل تغییرمکان ناپوسته (DDA)^[۷]، اجزاء محدود، تقاضا محدود و روش المان مرزی انجام شده است.

در پژوهشی در سال ۱۹۸۵، از روش المان مرزی برای حل مدل ترک سکه‌یی و از روش تقاضا محدود برای مدل‌سازی جریان سیال در ترک استفاده شده است.^[۶] در سال ۱۹۹۳ نیز روش DDA برای مدل‌سازی شکست هیدرولیکی به کار برده شده است.^[۷] همچنین در مطالعه‌ی دیگری در سال ۱۹۸۲، از روش اجزاء محدود برای گسسته‌سازی فرمولاسیون شکست هیدرولیکی استفاده شده است.^[۸] یکی از جدیدترین روش‌های عددی برای مدل‌سازی شکست هیدرولیکی، روش اجزاء محدود توسعه‌یافته (XFEM)^[۹] است. اولین بار در پژوهشی در سال ۲۰۰۸، از این روش برای مدل‌سازی شکست هیدرولیکی استفاده شد، و با فرض قرارگیری ترک بر روی لبه‌های المان‌ها، شکست هیدرولیکی مدل‌سازی شد، که با این فرض از مزیت اصلی XFEM، که در آن الزامی به تطبیق مش با ترک وجود ندارد، استفاده نشد. ضمناً در پژوهش مذکور هیچ اشاره‌ی به مسئله‌ی انتشار ترک و فرآیند عملکرد توأمان تغییرشکل سنگ و جریان سیال در ترک نشده است.^[۹] و در سال ۲۰۰۹ نیز شکست هیدرولیکی در تونل تحت فشار و سدهای بتنی با فرض فشار ثابت، با روش اجزاء محدود توسعه‌یافته مدل‌سازی شد.^[۱۰]



شکل ۱. طرح‌واره‌ی شکست هیدرولیکی.



شکل ۲. مقطع افقی یک چاه قائم تحت تنش‌های برجا و فشار گمانه.^[۵]

۲. المان محدود توسعه‌یافته

روش المان محدود (FEM) از اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰ میلادی کاربرد گسترده‌ی بی‌حسابی در حل مسائل مهندسی داشته است.^[۱۱] گسترش کاربرد این روش به دلیل محدودیت‌های وسیع مسائل قابل حل توسط این روش است. علی‌رغم موفقیت روش المان محدود استاندارد در حل مسائل مهندسی، این روش برای مدل‌کردن ترک در شاخه‌ی مکانیک شکست با دشواری‌هایی روبرو بوده است.

روش المان محدود به صورت ذاتی بر اساس پیوستگی المان‌هاست و با چند جمله‌یی‌های جبری توزیع خواص در المان به صورت پیوسته توجیه می‌شود و عملاً برای چند جمله‌یی‌های جبری امکان مدل‌کردن ناپوستگی‌ها در محدوده‌ی المانی فراهم نیست. بنابراین در حل مسائلی که شرایط ناپوستگی (مانند ترک) و حالت تکیه وجود دارد، تحلیل به روش المان محدود به سادگی میسر نخواهد بود. در این روش، المان‌ها در اطراف ناحیه‌ی ناپوسته قرار داده می‌شوند (تطبیق مش با ناپوستگی). علاوه بر این، برای دسترسی به شرایط تکیه نیز باید با تغییر در ساختار المان‌های اطراف ناحیه‌ی موردنظر (نوک ترک) امکان دستیابی به آن وضعیت را فراهم آورد.

از این رو در سال ۱۹۹۹ میلادی روشی بر پایه‌ی المان محدود به نام المان محدود توسعه‌یافته (X-FEM) بنیان‌گذاری شد تا امکان مدل‌کردن ساده‌ی ناپوستگی‌هایی مانند ترک فراهم شود.^[۱۲] از ویژگی‌های این روش بی‌نیازی از تطبیق مش با ترک، امکان استفاده از المان‌های درشت‌تر در اطراف ترک و عدم استفاده از المان‌های تکیه در اطراف نوک ترک است، که رشد مرحله به مرحله‌ی ترک‌ها را به صورت سریع ممکن می‌سازد.

روش المان محدود توسعه‌یافته بر مبنای استفاده از توابع غنی‌ساز مناسب در گره‌های اطراف ناحیه‌ی ترک‌خورده استوار است. توابع غنی‌ساز، درجات آزادی گره‌های اطراف ترک را افزایش می‌دهند و از این طریق شرایط ناپوسته‌ی داخل المانی را

عملیات شکست هیدرولیکی است. علاوه بر این، فرض فیزیکی که مدل KGD بر آن تکیه دارد، این است که سطوح ترک در بالا و پایین به طور آزاد حرکت می‌کنند در نتیجه‌ی این امر، سطح مقطع ترک به صورت مستطیلی و عرض ترک در راستای قائم ثابت ولی در راستای طولی از مقدار بیشینه در نزدیکی چاه تا مقدار صفر در نوک ترک متغیر است.^[۴]

در مدل PKN^[۶] نیز فرض بر این است که ارتفاع ترک ثابت است. مقطع عرضی ترک به صورت منحنی‌شکل است، به طوری که عرض ترک در قسمت میانی مقطع، بیشینه است و در راستای طول ترک از مقدار بیشینه در نزدیک چاه تا مقدار صفر در نوک ترک متغیر است.^[۴]

در اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی، قیمت نفت و گاز افزایش چشمگیری پیدا کرد، به طوری که از لحاظ اقتصادی تمایل به استحصال مخازن با نفوذپذیری کم را افزایش داد. با توجه به این افزایش قیمت و همچنین کمبودهای موجود در مدل‌های موجود تا آن زمان، پژوهش بیشتر بر روی مدل‌های شکست را توجیه‌پذیر کرد. مدل‌های موجود آن زمان برای مخازن لایه‌یی کاربردی نبوده است. در این راستا مدل P3D در دهه‌ی ۱۹۸۰، برای در نظر گرفتن حالت چند لایه‌یی توسعه پیدا کرد که در واقع تلاشی برای درک رفتار فیزیکی یک شکست هیدرولیکی سه بعدی صفحه‌یی بود. این مدل به عنوان توسعه‌ی مدل کلاسیک PKN برای شبیه‌سازی انتشار یک ترک عمودی در مخزن لایه‌یی افقی است.^[۴]

شکست هیدرولیکی در راستای عمود بر کوچک‌ترین تنش اصلی رشد می‌کند و تمایل به باز شدن در راستای کمترین مقاومت را دارد (شکل ۲).

از جمله کاربردهای شکست هیدرولیکی می‌توان به تعیین تنش‌های برجا در منطقه، استخراج نفت و گاز، ایجاد مخازن نگهداری زیرزمینی گاز در سنگ نمک، استحصال انرژی زمین گرمایی، ایجاد زلزله‌های مصنوعی و... اشاره کرد.

که در آن، N مجموعه‌ی همه‌ی گره‌های مش، N_{Γ} مجموعه‌ی گره‌های غنی‌سازی شده با تابع پله‌ی N_{Λ} مجموعه‌ی گره‌هایی است که با تابع تکینه غنی‌سازی شده‌اند. u_i درجات آزادی المان محدود معمولی، a_i درجات آزادی غنی‌سازی گره‌هایی که توسط تابع پله‌ی غنی‌سازی شده‌اند و b_i^* درجات آزادی غنی‌سازی مربوط به گره‌هایی است که توسط توابع نوک ترک غنی‌سازی شده‌اند.

برای المان‌های شامل توابع غنی‌سازی $H(x)$ و F_{α} ، بازشدگی بین سطوح ترک از رابطه‌ی ۴ به دست می‌آید:

$$w = n \cdot (u^+ - u^-) = 2n \cdot \sum_{j \in N_{\Gamma}} N_j a_j + 2N \cdot \sqrt{r} \sum_{k \in N_{\Lambda}} N_k b_k^* \quad (4)$$

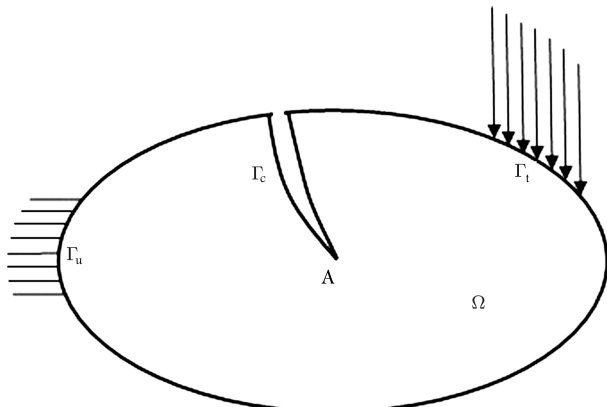
برای المان‌هایی که گره‌های آنها با توابع نوک ترک غنی‌سازی شده‌اند، فقط جمله‌ی دوم معادله‌ی ۴ مؤثر است؛ در حالی‌که برای المان‌هایی که گره‌های آنها با تابع پله‌ی غنی‌سازی می‌شوند، فقط جمله‌ی اول مؤثر است.

۳. فرمولاسیون شکست هیدرولیکی در روش اجزاء

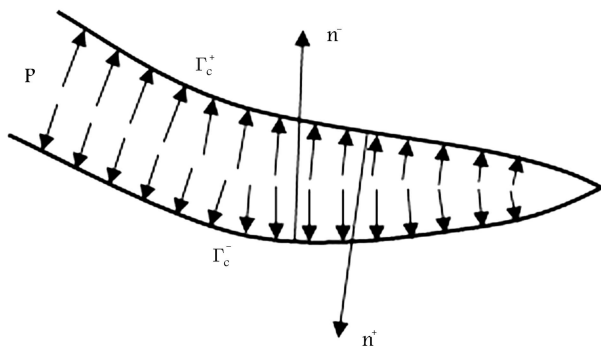
محدود توسعه‌یافته

۱.۳. اصل کار مجازی شکست هیدرولیکی

دامنه‌ی Ω با یک ترک لبه‌ی Γ_c توصیف شده است (شکل ۴). دامنه با تغییرمکان از پیش تعیین شده بر روی بخش Γ_u از مرز و تنش Γ_t اعمال شده بر روی بخش Γ_t از مرز محدود شده است. سطوح ترک با Γ_c^- و Γ_c^+ نشان داده می‌شوند (شکل ۵)، به طوری‌که $\Gamma_c = \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-$ و بردارهای یک‌ی عمود بر Γ_c^+ و Γ_c^- به ترتیب



شکل ۴. طرح‌واره‌ی دامنه‌ی ترک‌خورده. [۹]



شکل ۵. طرح‌واره‌ی جریان سیال در ترک. [۹]

مدل می‌کنند. با تغییر در نوع تابع غنی‌ساز، شرایط تکینه در اطراف نوک ترک نیز فراهم می‌شود.

توابعی که برای غنی‌سازی یک دامنه‌ی ترک‌خورده مورد استفاده قرار می‌گیرند، شامل ۲ گروه هستند. تابعی که بیانگر بازشدگی ترک است و توابعی که بیانگر تکینگی نوک ترک هستند. برای تعیین نوع تابع مناسب برای غنی‌سازی گره‌ی محل برخورد ترک با اضلاع المان‌ها مشخص می‌شود. اگر ترک دو ضلع یک المان را قطع کند، از تابع پله‌ی واحد یا تابع پرشی واحد جهت غنی‌سازی گره‌های اطراف آن المان استفاده خواهد شد. اگر ترک فقط یکی از اضلاع المان را قطع کند و نقطه‌ی برخورد دیگری نداشته باشد، یا به عبارت دیگر نوک ترک داخل المان باشد، برای گره‌های اطراف آن المان، غنی‌سازی به روش تابع تکینه 1° انجام خواهد شد. [۱۳] چنانچه یک گره بین المان‌های کاملاً ترک‌خورده و المان‌های حاوی نوک ترک مشترک باشد، توسط توابع تکینه غنی‌سازی خواهد شد. شکل ۳، نحوه‌ی غنی‌سازی گره‌ها توسط توابع را به خوبی نشان می‌دهد.

برای غنی‌سازی از طریق تابع پله‌ی واحد از یک تابع دو مقداری H استفاده می‌شود. چنانچه گره‌ی غنی‌شونده، بالا یا روی ترک قرار گرفته باشد، مقدار این تابع $+1$ و در غیر این صورت -1 خواهد بود (رابطه‌ی ۱):

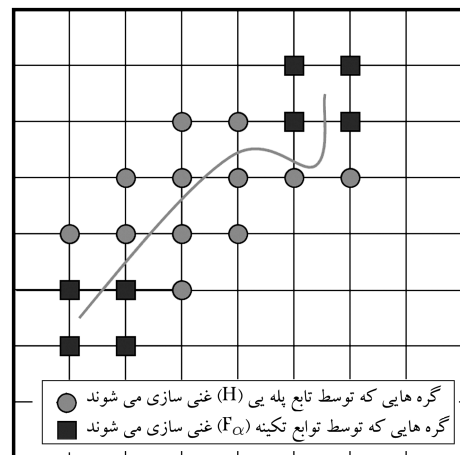
$$H(x) = \text{sign}(\varphi(x)) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

غنی‌سازی در گره‌های المان حاوی نوک ترک از طریق تابع تکینه انجام می‌شود (رابطه‌ی ۲): [۱۴]

$$F_{\alpha}(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{\varphi}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{\varphi}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{\varphi}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{\varphi} \right\} \quad (2)$$

که در آن، r و θ شعاع و زاویه در مختصات چسبیده به نوک ترک هستند. رابطه‌ی جابجایی در حالت کلی در المان‌های غنی‌شده به صورت رابطه‌ی ۳ در می‌آید: [۱۳]

$$u^h = \sum_{i \in N} N_i(x) \left[u_i + H(x) a_i + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ i \in N_{\Lambda}}}^{\varphi} F_{\alpha} b_i^{\alpha} \right] \quad (3)$$



شکل ۳. نمایش گره‌های غنی‌شده در یک المان بندی ترک‌دار.

n^+ و n^- هستند. فشار سیال p بر روی سطوح ترک اعمال می‌شود. فشار p^+ و p^- به ترتیب بر روی Γ_{c+} و Γ_{c-} وارد می‌شود. معادلات تعادل حاکم را می‌توان به صورت رابطه‌های ۵ الی ۸ نوشت:

$$\nabla \cdot \sigma + f^b = 0 \quad \Omega \text{ در} \quad (5)$$

$$\sigma \cdot n = f^t \quad \Gamma_t \text{ روی} \quad (6)$$

$$u = \bar{u} \quad \Gamma_u \text{ روی} \quad (7)$$

$$\sigma \cdot n^- = -\sigma \cdot n^+ = p^+ = -p^- = p \quad \Gamma_c \text{ روی} \quad (8)$$

در این روابط، Γ_c و Γ_u ، Γ_t به ترتیب مرز تنش، جابجایی و ترک هستند. σ تانسور تنش و f^t ، f^b و p به ترتیب نیروی حجمی، نیروی سطحی و فشار سیال هستند. فرم ضعیف یا اصل کار مجازی معادلات تعادل به صورت رابطه‌ی ۹ یا ۱۰ است:

$$W^{int} = W^{ext} \quad (9)$$

یا

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u^*) d\Omega = \int_{\Omega} f^b \cdot u^* d\Omega + \int_{\Gamma_t} f^t \cdot u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+} p^+ \cdot u^{*+} d\Gamma + \int_{\Gamma_c^-} p^- \cdot u^{*-} d\Gamma \quad (10)$$

در معادله‌ی ۱۰، f^b نیروی حجمی و u^* تغییرمکان مجازی است. از آنجایی که بر روی سطوح ترک $p = p^+ = -p^-$ و کرنش‌ها و تغییرمکان‌ها کوچک هستند و با تعریف $u^{*+} = u^* - u^{*-}$ که در آن w^* بازشدگی بین سطوح ترک است، معادله‌ی ۱۰ را می‌توان به صورت معادله‌ی نوشت:

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u^*) d\Omega = \int_{\Omega} f^b \cdot u^* d\Omega + \int_{\Gamma_t} f^t \cdot u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+} p \cdot w^* d\Gamma \quad (11)$$

معادله‌ی ۱۱، اصل کار مجازی شکست هیدرولیکی است.

۲.۳. معادلات حاکم بر اجزاء محدود توسعه یافته

با گسسته‌سازی معادله‌ی ۱۱ با استفاده از روش XFEM، در یک سیستم گسسته از معادلات تعادل خطی، رابطه‌ی ۱۲ را نتیجه می‌دهد:

$$Ku^h = f \quad (12)$$

که در آن، K ماتریس سختی، u^h بردار درجات آزادی گره (برای هر دو حالت کلاسیک و غنی شده) و f بردار نیروی خارجی است. ماتریس و بردارهای کلی با سرهم کردن ماتریس و بردارهای هر المان محاسبه می‌شوند. ماتریس‌های K و f برای هر المان e به صورت رابطه‌های ۱۳ و ۱۴ تعریف می‌شوند:

$$K_{ij}^e = \begin{bmatrix} K_{ij}^{uu} & K_{ij}^{ua} & K_{ij}^{ub} \\ K_{ij}^{au} & K_{ij}^{aa} & K_{ij}^{ab} \\ K_{ij}^{bu} & K_{ij}^{ba} & K_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$f_i^e = \left\{ f_i^u \quad f_i^a \quad f_i^b \right\}^T = \left\{ f_i^{b1} \quad f_i^{b2} \quad f_i^{b3} \quad f_i^{b4} \right\}^T \quad (14)$$

u^h بردار درجات آزادی گره است (رابطه‌ی ۱۵):

$$u^h = \{u \quad a \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4\}^T \quad (15)$$

که در آنها خواهیم داشت (رابطه‌های ۱۶ الی ۱۹):

$$K_{ij}^{rs} = \int_{\Omega_c} (B_i^r)^T D B_j^s d\Omega \quad (r, s = u, a, b) \quad (16)$$

$$f_i^u = \int_{\Gamma_t} N_i f^t d\Gamma + \int_{\Omega^c} N_i f^b d\Omega \quad (17)$$

$$f_i^a = \int_{\Gamma_t} N_i H f^t d\Gamma + \int_{\Omega^c} N_i H f^b d\Omega + \int_{\Gamma_c} n \cdot N_i p d\Gamma \quad (18)$$

$$f_i^{b\alpha} = \int_{\Gamma_t} N_i F_{\alpha} f^t d\Gamma + \int_{\Omega^c} N_i F_{\alpha} f^b d\Omega + \int_{\Gamma_c} n \sqrt{r} \cdot N_i p d\Gamma \quad (19)$$

$$(\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

در معادله‌ی ۱۶، B ماتریس مشتق تابع شکل است (رابطه‌های ۲۰ الی ۲۳):

$$B_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$B_i^a = \begin{bmatrix} (N_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i H)_{,y} \\ (N_i H)_{,y} & (N_i H)_{,x} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$B_i^b = \begin{bmatrix} B_i^{b1} & B_i^{b2} & B_i^{b3} & B_i^{b4} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$B_i^{\alpha} = \begin{bmatrix} (N_i F_{\alpha})_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i F_{\alpha})_{,y} \\ (N_i F_{\alpha})_{,y} & (N_i F_{\alpha})_{,x} \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad (23)$$

۴. مدل توأمان^{۱۲} شکست هیدرولیکی

شبیه‌سازی مدل شکست هیدرولیکی، روشی است که در آن طول، عرض ترک و توزیع فشار سیال با گذشت زمان تغییر می‌یابد. حتی در ساده‌ترین شکل، شکست هیدرولیکی برای مدل‌سازی فرآیندی پیچیده است که در آن دست‌کم اثر توأمان ۳ فرآیند باید در نظر گرفته شود: (I) تغییر شکل مکانیکی ناشی از فشار سیال بر روی سطوح ترک، (II) جریان سیال در ترک، و (III) انتشار ترک در اثر حرکت سیال در ترک.

۱.۴. معادلات حاکم بر جریان سیال عبوری از ترک

به‌خاطر سادگی فرض بر این است که ترک در یک محیط همسان، غیرقابل تراکم و ارتجاعی خطی تحت شرایط کرنش صفحه‌یی منتشر می‌شود. همچنین فرض می‌شود که ترک توسط یک سیال تراکم‌ناپذیر نیوتنی از محلی واقع در طول ترک (برای مثال گمانه) به‌صورت شبه استاتیکی گسترش می‌یابد. با توجه به اینکه سیال با نرخ ثابت Q_0 در ترک تزریق می‌شود، هدف تعیین طول ترک به‌عنوان تابعی از زمان و همچنین تعیین میزان بازشدگی ترک و فشار سیال به‌عنوان تابعی از زمان t و مکان s است.

و با در نظر گرفتن بازشدگی صفر در نوک ترک رابطه‌ی ۳۱ را خواهیم داشت:

$$\frac{1}{12\mu} w^r \frac{\partial P}{\partial s} \varphi_i(s) \Big|_{s=-L_1, L_2} = 0 \quad (31)$$

که در آن، L_1 و L_2 موقعیت نوک ترک نسبت به گمانه ($s=0$) هستند. براساس فرم ضعیف معادله‌ی روغن‌کاری رابطه‌ی ۳۲ را خواهیم داشت:

$$C_{ij} P_j = f_i \quad (32)$$

که در آن C_{ij} و f_i به ترتیب از رابطه‌های ۳۳ و ۳۴ به دست خواهند آمد:

$$C_{ij} = \frac{1}{12\mu} \sum_{j=1}^N \int_{-L_1}^{L_2} w^r \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} ds \quad (33)$$

$$f_i = \int_L \frac{\Delta w}{\Delta t} \varphi_i(s) ds \quad (34)$$

این معادلات، بیانگر وابستگی دوطرفه‌ی فشار سیال و بازشدگی ترک هستند.

۳.۴. اثر توأمان جریان سیال و تغییر شکل سنگ

در مدل‌سازی شکست هیدرولیکی باید اثر توأمان ۳ معادله‌ی ارتجاعی، جریان سیال و رشد ترک در نظر گرفته شود. معادلات ارتجاعی و جریان سیال عبارت‌اند از (رابطه‌های ۳۵ و ۳۶):

$$Kd = f(P - \sigma_{in-situ}) \quad (35)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = CP \quad (36)$$

متغیر d در معادله‌ی ۳۵ بردار تغییر مکان است، که برای محاسبه‌ی بازشدگی ترک و Δw استفاده می‌شود.

معادلات توأمان ۳۵ و ۳۶ با توجه به حضور جمله‌ی w^r در معادله‌ی جریان کاملاً غیرخطی است. پیچیدگی اصلی مسائل شکست هیدرولیکی ناشی از اثر توأمان جریان سیال و معادله‌ی حاکم بر بازشدگی ترک است. برای حل این مسئله، یک فرآیند تکرار طراحی شده است. در ابتدای هر مرحله فرض می‌شود که توزیع فشار خالص معلوم است (که معمولاً همان توزیع فشار خالص در گام زمانی قبلی است). برای گام زمانی اول، یک توزیع فشار یکنواخت فرض شده است. سپس توزیع بازشدگی در امتداد ترک با استفاده از اجزاء محدود توسعه یافته محاسبه می‌شود و با حل معادله‌ی ۲۴ با استفاده از عرض به دست آمده در مرحله‌ی قبل و شرایط مرزی ۲۵ و ۲۶، یک توزیع سیال جدید به دست می‌آید. این فرآیند تا زمان رسیدن به هم‌گرایی ادامه می‌یابد. در این پژوهش از روش تکرار پیکارد^[۱۷] استفاده شده است،^[۵] که روابط آن به صورت رابطه‌های ۳۷ الی ۴۰ است:

$$P_{k+1} \setminus / \setminus = C (w_k)^{-1} \left(\frac{\Delta w_k}{\Delta t} \right) \quad (37)$$

$$P_{k+1} = (1 - \alpha) P_k + \alpha P_{k+1} \setminus / \setminus \quad (38)$$

$$d_{k+1} = K^{-1} (P_{k+1} - \sigma_c) \quad (39)$$

$$d_{k+1} \rightarrow w_{k+1} \quad (40)$$

در این نوشتار، برای مدل‌سازی سیال از معادله‌ی روغن‌کاری^[۱۳] با شرط $\frac{\rho q}{\mu} \ll 1$ (رابطه‌ی ۲۴):^[۱۵]

$$\frac{\partial w(s, t)}{\partial t} = \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial s} \left(w^r(s, t) \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} \right) \quad (24)$$

که در آن، h طول ترک، $w(s, t)$ عرض ترک در نقطه‌ی s و زمان t ، چگالی سیال، q شار در واحد ارتفاع ترک و μ لزجت سیال است. پژوهشگرانی در مورد اعتبار و حدود تقریبی معادله‌ی روغن‌کاری برای توصیف جریان سیال در داخل ترک بحث کرده‌اند.^[۱۷, ۱۶] بر مبنای تجزیه و تحلیل آن‌ها، باید جریان سیال لایه‌ی^[۱۴] باشد و عرض بازشدگی ترک در مقایسه با سایر ابعاد کوچک در نظر گرفته شود. شرایط مرزی جریان سیال عبوری از ترک عبارت است از:

• در محل گمانه، شار سیال برابر با نرخ تزریق است (رابطه‌ی ۲۵):

$$q(0) = Q_0 \quad (25)$$

• در نوک ترک، بازشدگی ترک برابر صفر است: $w(l) = 0$

• در نوک ترک جریانی وجود ندارد: $q(l) = 0$

• در نوک ترک داریم (رابطه‌ی ۲۶):

$$w(t) \frac{\partial P(t)}{\partial x} = 0, \quad at \quad x = 0 \quad (26)$$

۲.۴. گسسته‌سازی معادله‌ی جریان

برای حل معادله‌ی ۲۴، از روش گالرکین^[۱۵] استاندارد استفاده می‌شود، که در آن فشار خالص سیال به صورت رابطه‌ی ۲۷ تقریب زده می‌شود:

$$p_i = \sum_{i=1}^N \varphi_i(s) p_i \quad (27)$$

که در آن، $\varphi_i(s)$ تابع شکل برای نقطه‌ی i و p_i مقدار گره‌ی فشار خالص در گره‌ی i است. در مورد المان‌های خطی، گرادین فشار در هر المان ثابت خواهد بود. فرم ضعیف^[۱۶] معادله‌ی ۲۴ به صورت معادله‌ی ۲۸ است:

$$\int_L \frac{\Delta w}{\Delta t} \varphi_i(s) ds = \frac{1}{12\mu} \int_L \frac{\partial}{\partial s} \left(w^r(s, t) \frac{\partial P}{\partial s} \right) \varphi_i(s) ds \quad (28)$$

انتگرال سمت راست معادله‌ی ۲۸ به صورت معادله‌ی ۲۹ است:

$$\frac{1}{12\mu} \int_L \frac{\partial}{\partial s} \left(w^r(s, t) \frac{\partial P}{\partial s} \right) \varphi_i(s) ds = \frac{1}{12\mu} w^r \frac{\partial P}{\partial s} \varphi_i(s) \Big|_{s=-L_1}^{s=L_2} - \frac{1}{12\mu} \sum_{j=1}^N \int_{-L_1}^{L_2} P_j w^r \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} ds \quad (29)$$

با توجه به شرایط مرزی ذکر شده، در محل گمانه، رابطه‌ی ۳۰ برقرار است:

$$\frac{1}{12\mu} w^r \frac{\partial P}{\partial s} \varphi_i(s) \Big|_{s=0} = Q_0 \varphi_i(0) \quad (30)$$

در این مدل فشار سیال تابعی از طول ترک و طول ترک نیز تابعی از زمان است، بنابراین می‌توان فشار سیال را به‌عنوان تابعی از زمان بیان کرد. فشار محرک 1^9 ، p_d که حاصل تفاضل فشار سیال از تنش برجای کمیته است، به‌صورت رابطه‌ی ۴۳ به‌دست می‌آید:

$$p_d = C_1 t^{-\frac{1}{3}} \quad (43)$$

که در آن، C_1 از رابطه‌ی ۴۴ به‌دست می‌آید:

$$C_1 = 1.38 \left(\frac{G^\dagger \mu^\dagger}{(1-\nu)^\dagger} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (44)$$

که در آن، G مدول برشی، μ لزجت سیال و ν نسبت پواسون است. طول ترک، L ، میزان فاصله از دهانه‌ی ترک است، که تابعی از زمان تزریق سیال است (رابطه‌ی ۴۵):

$$L = C_2 t^{\frac{1}{3}} \quad (45)$$

که در آن، مقدار C_2 از رابطه‌ی ۴۶ به‌دست می‌آید:

$$C_2 = 0.68 \left(\frac{GQ^\dagger}{(1-\nu)\mu h^\dagger} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (46)$$

بازشدگی، فاصله‌ی بین دو صفحه‌ی ترک است. به بازشدگی در نقطه‌ی آغازین انتشار (برای ترکی که از چاه آغاز شده است) بازشدگی دهانه می‌گویند. بازشدگی نیز تابعی از زمان تزریق سیال است (رابطه‌ی ۴۷):

$$w = C_3 t^{\frac{1}{3}} \quad (47)$$

که در آن، C_3 از رابطه‌ی ۴۸ به‌دست می‌آید:

$$C_3 = 1.87 \left(\frac{(1-\nu)\mu Q^\dagger}{Gh^\dagger} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (48)$$

که در آن، h ارتفاع سیال و Q دبی تزریق سیال در محل گمانه است.

۶. تحلیل مسئله‌ی شکست هیدرولیکی کلاسیک به

روش عددی و KGD

در این پژوهش جهت انجام مدل‌سازی از یک برنامه‌ی رایانه‌ی پایه‌ی مکانیک شکست به نام MXFEM استفاده شده است.^[۲۰] سپس برنامه‌ی موجود برای مدل‌سازی شکست هیدرولیکی توسعه داده شده و HF-XFEM نام‌گذاری شده است.

در این بخش تحلیل عددی مسئله‌ی شکست هیدرولیکی با استفاده از نرم‌افزار HF-XFEM ارائه و نتایج آن با حل تحلیلی^{۲۰} KGD مقایسه شده است.

اکنون به حل مسئله‌ی شکست هیدرولیکی نشان داده‌شده در شکل ۷ پرداخته شده است. خصوصیات مصالح و پارامترهای مسئله به شرح جدول ۱ است. برای مدل‌سازی شکست هیدرولیکی فرض شده است که ترک لایه‌ی اولیه‌ی به طول ۲٫۹ متر وجود دارد. در مدل‌سازی XFEM محیط سنگی از المان‌های مربعی یک‌نواخت به ابعاد ۱٫۴ متر استفاده شده است.

یکی از محدودیت‌های روش تکرار پیکارد این است که مقدار اولیه‌ی استفاده‌شده در حلقه‌ی تکرار باید نزدیک به جواب درست باشد. هم‌گرایی حلقه‌های تکرار در هر مرحله، با بررسی میانگین خطا در فشار توزیع‌شده در تمام المان‌ها مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. این معیار هم‌گرایی به‌صورت رابطه‌ی ۴۱ نوشته می‌شود:

$$\frac{\sum_{i=1}^N |P_i^{(n)} - P_i^{(n-1)}|}{\sum_{i=1}^N |P_i^{(n)}|} \leq \varepsilon \quad (41)$$

که در آن، ε رواداری از پیش تعیین‌شده و $P_i^{(n)}$ فشار در گره‌ی i ام در حلقه‌ی تکرار n ام است.

گام‌های زمانی در شبیه‌سازی شکست هیدرولیکی از رابطه‌ی ۴۲ تعیین می‌شود:

$$Q_0 = \int_0^L \frac{\Delta w}{\Delta t} ds \quad (42)$$

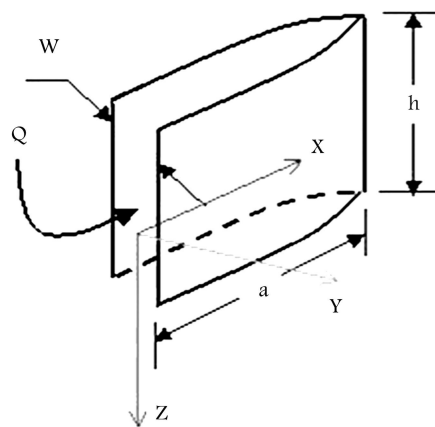
در بخش انتشار مسئله، ضریب شدت تنش در معیارگسترش ترک اردوغان - سی^{۱۸} برای تعیین راستای شکست هیدرولیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد.^[۱۸]

۵. مدل تحلیلی دوبعدی گرتسما و دی کلرک

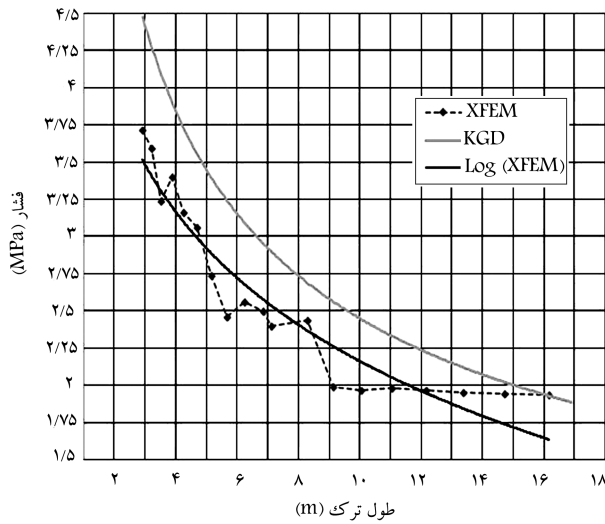
به دلیل پیچیدگی مسائل شکست هیدرولیکی، هیچ راه‌حل دقیقی جهت بررسی دقت نتایج مدل وجود ندارد. در پژوهشی در سال ۱۹۶۹، یک راه‌حل تقریبی برای یک ترک دوبعدی با سیال نیوتنی ارائه شده است، که به مدل KGD معروف است.^[۱۹] در این مدل، بازشدگی ترک در ارتفاع ترک، ثابت در نظر گرفته می‌شود (شکل ۶).

در مدل KGD، چنین فرض شده است سنگ مخزنی که شکست هیدرولیکی در آن رخ می‌دهد، همگن و همسان‌گرد و تغییرشکل‌ها به‌صورت ارتجاعی خطی و جریان سیال در ترک لایه‌ی است. همچنین نرخ جریان در هر مکانی از ترک برابر نرخ تزریق سیال در نظر گرفته شده است.

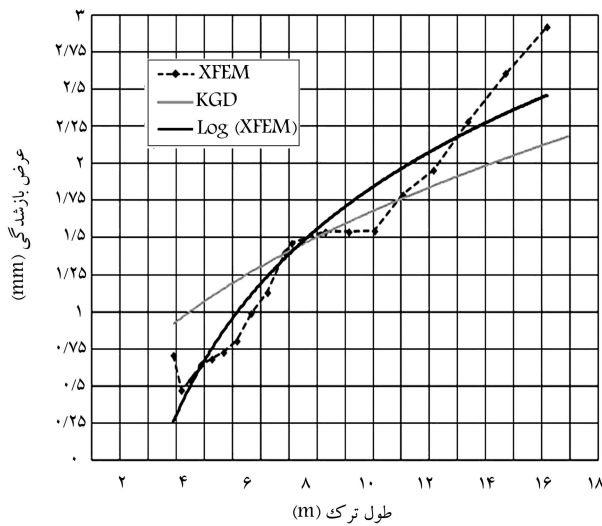
در مدل KGD، در شرایط جریان لایه‌ی، جریان سیال در ترک در مقابل مقاومت ناشی از لزجت سیال قرار دارد، که میزان این مقاومت با کاهش فشار (در فواصل دورتر از نقطه‌ی تزریق سیال) تنزل می‌یابد.



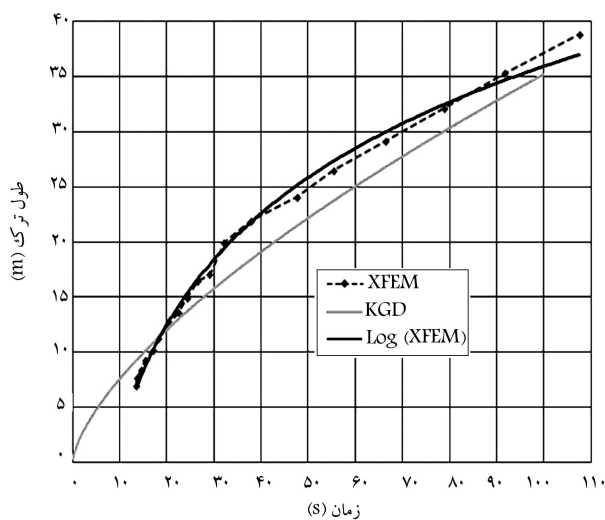
شکل ۶. طرح‌واره‌ی مدل KGD (گرتسما و دی کلرک ۱۹۸۹).



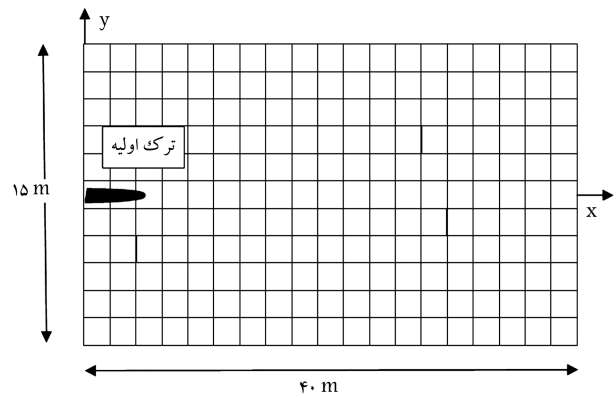
شکل ۸. فشار ترک در گمانه برای مدل KGD و مدل عددی.



شکل ۹. بازشدگی ترک در گمانه برای مدل KGD و مدل عددی.



شکل ۱۰. طول ترک در مقابل زمان تزریق برای مدل KGD و مدل عددی.



شکل ۷. مدل عددی شکست هیدرولیکی.

جدول ۱. داده‌های ورودی برای مقایسه‌ی مدل KGD و مدل عددی.

پارامتر	مقدار
مدول کشسانی (E)	4×10^6 psi (۲۷٫۵۷۹ GPa)
مدول برشی (G)	$۱٫۶ \times 10^6$ psi (۱۱٫۰۳۲ GPa)
نسبت پواسون (ν)	۰٫۲۵
نرخ تزریق (Q_0)	۵ bbl/min (۰٫۱۳۲ m ^۳ /s)
لزجت سیال شکست (μ)	۴۰۰ cP
ارتفاع ترک (h)	۱۰۰ ft (۳۰٫۴۵ m)

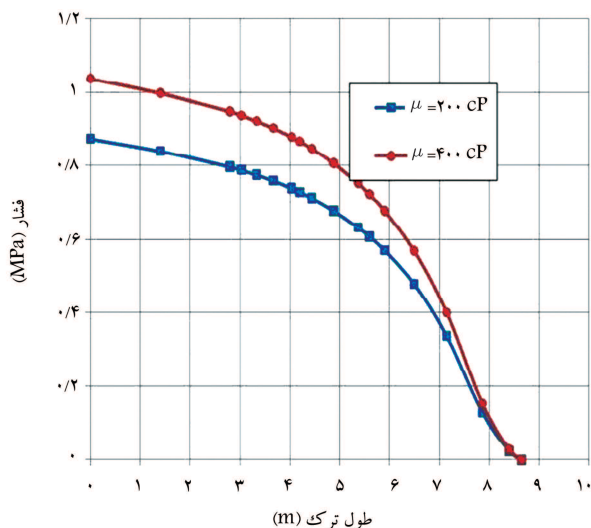
در این نوشتار فرض بر این است که سیال شکست نیوتنی باشد و با نرخ ثابت تزریق شود. در مدل عددی از المان‌های خطی برای مدل‌سازی جریان سیال در ترک استفاده شده است.

از آنجایی که فشار در مدل KGD فشار خالص است، برای مقایسه‌ی ساده‌تر در این مدل‌سازی عددی از تنش‌های برجا صرف‌نظر و شکست هیدرولیکی به صورت یک ترک لبه‌ی ۲۱ مدل‌سازی شده است. ارتفاع ترک در مدل KGD برابر ۱۰۰ ft (۳۰٫۴۵ m) در نظر گرفته شده است.

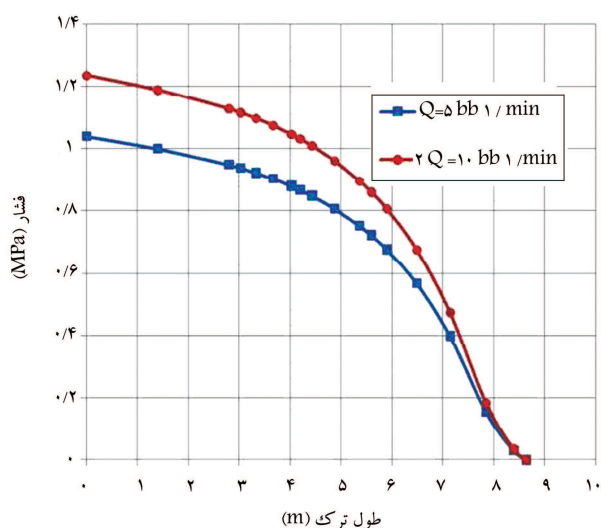
اکنون اثر توأمان معادله‌های ۳۵ و ۳۶ که به صورت غیرخطی هستند، بر یکدیگر در نظر گرفته شده است. پس از انجام آنالیز مسئله‌ی ذکر شده به مقایسه‌ی نتایج حاصل از تحلیل عددی XFEM شکست هیدرولیکی و حل KGD پرداخته شده است.

فشار و بازشدگی گمانه‌ی حاصل از تحلیل عددی و تحلیل KGD به ترتیب در شکل‌های ۸ و ۹ رسم شده است. همان‌طور که در نمودارها ملاحظه می‌شود، مقدار فشار در محل دهانه‌ی ترک (محل گمانه) با زمان کاهش یافته است، در حالی که بازشدگی دهانه‌ی ترک افزایش پیدا کرده است. نتایج حاصل از فرض یک ارتفاع نامحدود برای ترک (هندسه‌ی KGD) است، که نشان می‌دهد برای بازشدگی یکسان، ترک‌های طولانی‌تر نیازمند فشار کمتر هستند. اما واقعیت نشان می‌دهد که با افزایش طول ترک به ندرت فشار کاهش می‌یابد. شکل ۱۰، نیز میزان رشد طول ترک هیدرولیکی را در مقابل زمان نشان می‌دهد.

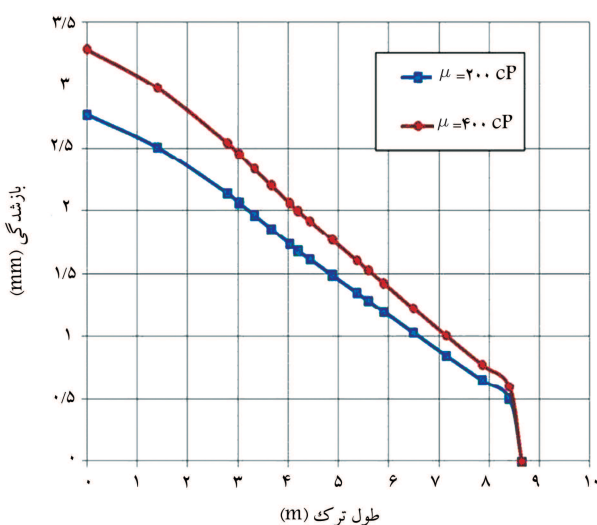
در این قسمت، برای بررسی اثرات تغییر نرخ تزریق سیال شکست، آزمایش‌های عددی یکسانی با مقادیر مختلف نرخ تزریق انجام شده است (شکل‌های ۱۱ و ۱۲). نتایج آزمایش‌ها نشان می‌دهد که نرخ تزریق بالاتر باعث ایجاد فشار بیشتر در طول



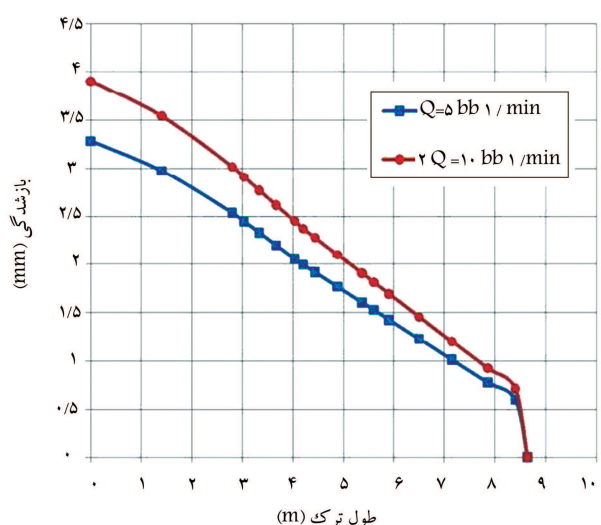
شکل ۱۳. اثر مقادیر مختلف لزجت سیال در پروفیل فشار.



شکل ۱۱. اثر نرخ تزریق سیال گوناگون بر روی فشار.



شکل ۱۴. اثر مقادیر مختلف لزجت سیال بر بازشدگی.



شکل ۱۲. اثر نرخ تزریق سیال گوناگون بر روی بازشدگی گمانه.

۷. نتیجه‌گیری

در این نوشتار، پدیده‌ی شکست هیدرولیکی در مخازن نفتی به روش XFEM مدل‌سازی شده است. در مدل‌سازی شکست هیدرولیکی به روش XFEM، بسیاری از معایب روش اجزاء محدود کلاسیک برطرف شده است. در این پژوهش، شکست هیدرولیکی بدون نیاز به مش‌بندی مجدد در هر مرحله از رشد ترک و بدون استفاده از مش ریز در نزدیکی نوک و طول ترک مدل‌سازی شده است.

خروجی‌های به دست آمده از برنامه‌ی رایانه‌ی نوشته شده با مدل KGD صحت‌سنجی شده است. نتایج نشان می‌دهد که مقدار فشار گمانه، با افزایش طول ترک کاهش می‌یابد، در حالی‌که بازشدگی ترک در محل گمانه افزایش پیدا می‌کند. همچنین ملاحظه شد که برای افزایش استحصال مواد هیدروکربنی باید عرض بازشدگی افزایش یابد، که برای این کار می‌توان میزان لزجت سیال شکست هیدرولیکی و یا دبی تزریق آن را افزایش داد.

ترک می‌شود. همچنین در نرخ تزریق بالاتر، بازشدگی بیشتر که به علت فشار بیشتر است، رخ خواهد داد. همان‌طور که در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ مشاهده می‌کنیم، بین عرض ترک، نرخ تزریق و فشار سیال اثر متقابل وجود دارد، اما دو برابر شدن نرخ تزریق باعث دو برابر شدن فشار و بازشدگی نمی‌شود.

در بخشی دیگر از این نوشتار، اثر تغییرات لزجت سیال بر روی میزان بازشدگی و فشار مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۱۳ نشان می‌دهد که با افزایش لزجت به دلیل مقاومت اضافه شده جهت وارد کردن سیال در ترک، فشار افزایش می‌یابد. از طرفی دیگر، در نرخ تزریق یکسان، افزایش لزجت باعث افزایش عرض ترک می‌شود (شکل ۱۴).

بنابراین نتیجه می‌گیریم که لزجت سیال باید به اندازه‌ی کافی بالا باشد تا به تبع آن عرض ترک بالا رود و پروپانت بتواند به راحتی در طول ترک عبور کند. لذا در صنعت برای افزایش لزجت سیال از زنجیره‌های پلیمری خاصی استفاده می‌شود.

پانوشتها

1. Dow Chemical
2. Kansas
3. Hugoton
4. Proppant
5. Geertsma and de Klerk
6. Perkins, Kern and Nordgren
7. discontinuum displacement analysis (DDA)
8. extended finite element method (XFEM)
9. heaviside function
10. singular function
11. traction
12. coupled model
13. lubrication
14. laminar
15. Galerkin
16. weak form
17. picard
18. Erdogan-Sih
19. driving pressure
20. analytical solution
21. edge crack

(References) منابع

1. Grebe, J.J., Stoesser, M. "Increasing crude production 20,000,000 bbl. from established fields", *World Petroleum J.*, pp. 82-482 (August 1935).
2. Veatch, R.W., Moschovidis, Z.A. and Fast, C.R. "An overview of hydraulic fracturing", In: Gidley, Holditch, Nierode, Veatch, editors, *Recent Advances in Hydraulic Fracturing, Monograph*, **12**, Richardson: Society of Petroleum Engineers, pp. 138 (1989).
3. Valk, P. and Economides, M.J., *Hydraulic Fracture Mechanics*, Wiley (1995).
4. Adachi, J. and et al. "Computer simulation of hydraulic fractures", *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, **44**(5), pp. 739-757 (2007).
5. Yew, C.H., *Mechanics of Hydraulic Fracturing*, Gulf Publishing Company, Houston, Texas (1997).
6. Cleary, M. and Wong, S. "Numerical simulation of unsteady fluid flow and propagation of a circular hydraulic fracture", *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **9**(1), pp. 1-14 (1985).
7. Yew, C.H. and Liu, G.F. "Fracture tip and critical stress intensity factor of a hydraulically induced fracture", *SPE Production and Facilities*, **8**(3), pp. 171-177 (1993).
8. Advani, S.H. and Lee, J.K. "Finite element simulations associated with hydraulic fracturing", *SPE 8941*, pp. 209-18 (1993).
9. Lecampion, B. "An extended finite element method for hydraulic fracture problems", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **25**(2), pp. 121-133 (2008).
10. QingWen, R., YuWen, D. and Tian Tang, Y. "Numerical modeling of concrete hydraulic fracturing with extended finite element method", *Science in China Series E: Technological Sciences*, **52**(3), pp. 559-565 (2009).
11. Chandrupatla T.R. and Belegundu A.D., *Introduction to Finite Elements in Engineering*, Second Edition, Prentice Hall Press, New Jersey, pp. 1-174 (1997).
12. Belytschko, T. and Black, T. "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45**(5), pp. 601-620 (1999).
13. Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T. "A finite element method for crack growth without remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**(1), pp. 131-150 (1999).
14. Fleming, M., Chu, Y.A., Moran, B. and Belytschko, T. "Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**(88), pp. 1483-1504 (1997).
15. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1967).
16. Nilson, R.H. "Similarity solutions for wedge-shaped hydraulic fracture driven into a permeable medium by a constant inlet pressure", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **12**(5), pp. 477-495 (1988).
17. Spence, D.A. and Sharp, P.W. "Self-similar solution for elastohydrodynamic cavity flow", *Proceedings of the Royal society of London, Series A* (400), pp. 289-313 (1985).
18. Erdogan, F. and Sih, G.C. "On the crack extension in plates under loading and transverse shear", *Journal of Basic Engineering*, **85**(4), pp. 519-527 (1963).
19. Geertsma, J., de klerk F.A rapid method of predicting with and extent of hydraulically induced fractures. *J Pet Tech*, **21**, pp.81-1571 (1969).
20. Pais, M. MATLAB Extended Finite Element (MXFEM) Code (2011).