مهندسی عمران شریف، (زمستان ۱۳۹۳)
دوره‌ی ۲-۳۰، شماره‌ی ۱/۴، ص. ۱۲۷-۱۴۷، (یادداشت فنی)

Research Note

تحلیل حدی مرز بالا با استفاده از روش بدون شبکه در خاک‌های چسبنده

سعید راعی **(دانشجوی کارشناسی ارشد)**
سید محمد بینش * **(استادیار)**
دانشکده‌ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی شیراز

در این نوشتار، با بهره‌گیری از اصول کلی روش‌های تحلیل حدی همراه با یک روش بدون‌شبکه، راهکاری جدید برای تعیین مرز بالای بار حدی در مسائل مکانیک خاک برای خاک‌های چسبنده در شرایط کرنش صفحه‌یی ارائه شده است. بر این اساس، با درنظرگرفتن خاک به‌عنوان یک ماده‌ی صلب ـ کاملاً خمیری و تعریف نرخ اتلاف انرژی داخلی بر پایه‌ی نرخ کرنش‌های خمیری که شرایط تعامد را ارضاء می‌کنند و نیز با لحاظ‌کردن قیود خاص برای بارهای خارجی، مسئله‌ی تعیین حد بالا به یک مسئله‌ی بهینه‌یابی ریاضی تبدیل شده است، که با استفاده از روش لاگرانژین حل شده است. در راستای محاسباتی‌ساختن روش مذکور، لازم است که میدان سرعت در دامنه‌ی مسئله مجزاسازی شود، که برای این منظور یک روش بدون شبکه مورد استفاده قرار گرفته است. استفاده از روش بدون شبکه این مزیت را دارد که بدون نیاز به تعریف المان‌ها به‌صورت مرسوم، می‌توان محیط را مجزاسازی کرد و از پیچیدگی‌های المان‌بندی برای ایجاد یک میدان سرعت سازگار کاست. در نهایت، با استفاده از روابط به‌دست‌آمده، یک برنامه‌ی رایانه‌یی تهیه و با حل چند مثال، کارآمدی و دقت روش نشان داده شده است.

واژگان کلیدی: روش بدون شبکه، خاک چسبنده، مرز بالای تحلیل حدی.

s.raei@sutech.ac.ir
binesh@sutech.ac.ir

۱. مقدمه

استفاده از تحلیل‌های خمیری یکی از گزینه‌های مطلوب در تعیین بار حدی در مسائل مکانیک خاک است. تحلیل‌های خمیری را می‌توان به دو دسته‌ی کلی تقسیم‌بندی کرد، که شامل روش‌های گام‌به‌گام و روش‌های تحلیل حدی هستند. روش‌های گام‌به‌گام، روش‌هایی هستند که کل مسیر بار ـ تغییر فرم را ردیابی می‌کنند و روش‌هایی زمان‌بر و به لحاظ محاسباتی، پر هزینه هستند. در مقابل، روش‌های تحلیل حدی براساس تئوری‌های مرز بالا و پایین، که در پژوهشی معرفی شده‌اند،[۱] استوار هستند؛ و مستقیماً مسائل پایداری را بررسی می‌کنند. استفاده از روش‌های عددی نظیر المان محدود و تکنیک‌های بهینه‌یابی ریاضی به همراه تئوری‌های حدی به روش بسیار کارآمدی با عنوان روش تحلیل حدی عددی منجر شده است، که در تحلیل مسائل پیچیده کاربرد فراوانی دارد.

روش‌های تحلیل حدی عددی در مهندسی ژئوتکنیک اولین بار در سال ۱۹۷۰ مورد استفاده قرار گرفته است.[۲] با وجود نوآوری فراوانی که این روش پیشنهادی داشت، از برخی معضلات نظیر ناتوانی در تولید میدان تنش کامل برای محیط‌های نیمه بی‌نهایت و یا محدودیت در شبکه‌بندی محیط رنج می‌برد. سپس در پژوهش دیگری فرمولاسیون روش المان محدود برای تعیین بار حدی در مسائل مکانیک خاک با استفاده از تئوری‌های حدی ارائه شد.[۳] پژوهشگری[۴] نیز با بهره‌گیری از فرمولاسیون پژوهش پیشین،[۴] و نیز الگوریتم دسته‌ی فعال،[۵] مسائل صفحه‌یی در مکانیک خاک را مورد تحلیل قرار داد.[۴] همچنین برخی از پژوهشگران به بهبود مطالعه‌ی پیشین، در تحلیل حدی مرز بالا پرداختند.[۶-۸] در این مطالعات با خطی‌سازی سطح تسلیم، مسئله‌ی بهینه‌یابی، که در روند تحلیل حدی عددی شکل می‌گیرد، با استفاده از الگوریتم‌های برنامه‌ریزی خطی حل شده است. خطاهای ناشی از خطی‌سازی سطح تسلیم و تعداد قیود زیاد، پژوهشگران را بر آن داشت که به روش‌های غیرخطی روی آورند. در ابتدا، دیدگاه غیرخطی در سال‌های ۲۰۰۲ و ۱۹۹۳، مورد استفاده قرار گرفت.[۹و۱۰] با وجود از میان‌رفتن خطاهای ناشی از خطی‌سازی سطح تسلیم، استفاده از روش‌های این پژوهشگران به علت قیود اضافی ناشی از درنظرگرفتن توأم میدان سرعت و میدان تنش در تابع هدف، قیود ناشی از درنظرگرفتن گسستگی بین المان‌ها، پیچیدگی روش المان‌بندی به منظور ارضاء شرط تراکم‌ناپذیری و استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی پیچیده، زمان‌بر و مشکل است. از این رو پژوهشگران به استفاده از روش‌های المان محدود مرسوم و تشکیل تابع هدف براساس میدان سرعت و نیز بهبود الگوریتم‌های برنامه‌ریزی ریاضی روی آوردند.[۱۱-۱۷]

عمده‌ی ضعف روش‌های فوق، که آنالیز را براساس شبکه‌بندی انجام می‌دهند، آن است که با هر تغییری در هندسه‌ی مسئله، لازم است که تولید شبکه مجدداً انجام شود و این امر کاری زمان‌بر است و علاوه بر وقت بیشتر، پیچیدگی کار را افزایش

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۵/۱۸، *اصلاحیه* ۱۳۹۱/۱۰/۹، *پذیرش* ۱۳۹۲/۲/۳.

می‌دهد و از دقت نتایج می‌کاهد. از جمله ضعف‌های دیگر این روش‌ها می‌توان به دقت کم در محاسبه‌ی میدان سرعت اشاره کرد. علاوه بر این، روش‌هایی که برای بازتولید شبکه استفاده می‌شوند، فقط در فضای مسائل دو بعدی کاربرد دارند و در مسائل سه بعدی به دلیل ضعف تکنیکی قابل استفاده نیستند. از این رو در مطالعات اخیر به استفاده از روش‌های بدون شبکه در مجزا سازی محیط برای انجام تحلیل‌های حدی عددی رو آورده شده است.[۱۸-۲۲] در این نوشتار سعی شده است که با بنانهادن یک روش تحلیل حدی عددی بدون شبکه‌ی جدید به تعیین مرز بالا برای بار حدی در خاک‌های چسبنده پرداخته شود. استفاده از روش پیشنهادی منجر به حل پایدار و با دقت مناسب برای تعیین مرز بالای بار حدی شده است.

۲. روش پیشنهادی حد بالا

کلیات روشی که در این نوشتار جهت تعیین مرز بالای بار حدی در خاک‌های چسبنده پیشنهاد شده است، به این صورت است:

۱. تبیین تئوری حد بالا به زبان ریاضی؛

۲. انتخاب سطح تسلیم ون ـ میسز به‌عنوان مرز جداکننده‌ی رفتار صلب و رفتار کاملاً خمیری؛

۳. تعیین رابطه‌ی بین تنش‌ها و نرخ کرنش‌های خمیری با استفاده از قانون جریان وابسته؛

۴. استفاده از روش درون‌یابی نقطه‌یی با توابع شعاعی جهت مجزاسازی میدان سرعت؛

۵. تعیین قیود لازم برای سازگاری میدان سرعت تولیدشده؛

۶. تشکیل مسئله‌ی بهینه‌یابی ریاضی براساس میدان سرعت گره‌یی تولیدی؛

۷. حل مسئله‌ی بهینه‌یابی با استفاده از روش لاگرانژین و پیش‌بینی مرز بالای بار حدی.

در ادامه، هر یک از موارد مطرح‌شده در بالا به تفصیل شرح داده خواهد شد.

۱.۲.تئوری مرز بالای تحلیل حدی

تئوری مرز بالای تحلیل حدی با تعمیم اصل کار خمیری بیشینه سال ۱۹۵۲ ارائه شده است.[۱] بر پایه‌ی این تئوری، در یک میدان سرعت سازگار، باری که از مساوی قراردادن توان اتلافی داخلی و توان نیروهای خارجی به‌دست می‌آید، کمتر از بار واقعی زوال نخواهد بود. فرمول‌بندی ریاضی این تئوری برای محیط‌های پیوسته را می‌توان به این صورت عنوان کرد:[۲۳]

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T}.\mathbf{u}\, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f}.\mathbf{u}\, d\Omega \leq \int_{\Omega} \sigma^T.\varepsilon\, d\Omega \tag{۱}$$

که در این رابطه، $\mathbf{T}$ تنش وارد بر سطح Γ، $\mathbf{u}$ میدان سرعت، $\mathbf{f}$ نیروی حجمی در دامنه‌ی Ω و σ میدان تنش مرتبط با میدان نرخ کرنش خمیری ε است.

۲.۲. سطح تسلیم برای خاک‌های ریزدانه

در این نوشتار، برای بیان سطح تسلیم در خاک‌های ریزدانه از معیار ون ـ میسز استفاده شده است. در حالت کلی معیار ون ـ میسز را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۲ بیان کرد:[۲۴]

$$F(\sigma) = \sigma^T \mathbf{P} \sigma - ۱ = ۰ \tag{۲}$$

که در این رابطه، بردار تنش σ در فضای دو بعدی، که شامل محورهای $x_۱$ و $x_۲$ است، را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۳ و متناظر با بردار σ، و ماتریس $\mathbf{P}$ را به‌صورت رابطه‌ی ۴ بیان کرد، که در آن S_u مقاومت برشی زهکشی‌نشده‌ی خاک چسبنده است.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{۱۱} & \sigma_{۲۲} & \sigma_{۱۲} \end{bmatrix}^T \tag{۳}$$

$$\mathbf{P} = \frac{۱}{S_u^۲} \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ -\frac{۱}{۲} & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \tag{۴}$$

۳.۲. رابطه‌ی تنش ـ نرخ کرنش خمیری

به‌طورکلی با استفاده از قانون تعامد و قانون جریان وابسته، رابطه‌ی بین تنش و نرخ کرنش خمیری را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۵ نوشت:

$$\varepsilon = \dot{\eta} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} \tag{۵}$$

که در آن، $\dot{\eta}$ شاخص بارگذاری و ε بردار نرخ کرنش خمیری است؛ که متناظر با بردار تنش به‌صورت رابطه‌ی ۶ تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{۱۱} & \varepsilon_{۲۲} & \varepsilon_{۱۲} \end{bmatrix}^T \tag{۶}$$

با توجه به روابط ۲ و ۵، رابطه‌ی ۷ به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon = \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = ۲\dot{\eta} \mathbf{P} \sigma \tag{۷}$$

بنابراین می‌توان تنش را بر حسب نرخ کرنش خمیری به‌صورت رابطه‌ی ۸ بیان کرد:

$$\sigma = \frac{۱}{۲\dot{\eta}} \mathbf{P}^{-۱} \varepsilon \tag{۸}$$

باید توجه داشت که معادله‌ی ۸ برای شرایطی است که وضعیت تنش در حالت تسلیم است، بنابراین اگر تنش به‌دست‌آمده از رابطه‌ی ۸ در رابطه‌ی ۲ جای‌گذاری شود، حاصل عبارت باید برابر با مقدار صفر شود. از این رو رابطه‌ی ۹ حاصل خواهد شد:

$$F(\sigma) = \sigma^T \mathbf{P} \sigma - ۱ = ۰ \tag{۹}$$

بنابراین رابطه‌ی ۱۰ برقرار خواهد شد:

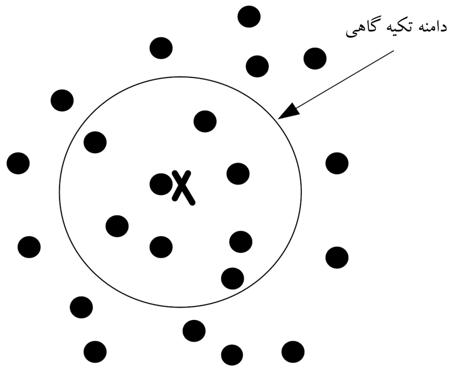
$$\left(\frac{۱}{۲\dot{\eta}} \mathbf{P}^{-۱} \varepsilon \right)^T \mathbf{P} \left(\frac{۱}{۲\dot{\eta}} \mathbf{P}^{-۱} \varepsilon \right) = ۰ \tag{۱۰}$$

و یا رابطه‌ی ۱۱ حاصل خواهد شد:

$$\dot{\eta} = \frac{۱}{۲} \sqrt{\varepsilon^T \mathbf{P}^{-۱} \varepsilon} \tag{۱۱}$$

از جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۱ در رابطه‌ی ۸، ارتباط بین تنش و نرخ کرنش خمیری مطابق رابطه‌ی ۱۲ به‌دست می‌آید:

$$\sigma^T = \frac{\sqrt{\varepsilon^T \mathbf{P}^{-۱} \varepsilon}}{\varepsilon} \tag{۱۲}$$



شکل ۱. دامنه‌ی تکیه‌گاهی.

۴.۲. مجزاسازی میدان سرعت

هدف از مجزاسازی یک میدان پیوسته آن است که مقدار متغیر میدان در هر نقطه از محیط، به مقادیر گره‌یی وابسته شود. در غالب روش‌های تحلیل حدی عددی، از روش المان محدود برای مجزاسازی محیط استفاده می‌شود. بر این اساس، لازم است که دامنه‌ی مسئله به المان‌هایی تقسیم‌بندی شود و با استفاده از توابع شکل در هر المان، مجزاسازی محیط انجام شود. مشکلات ناشی از المان‌بندی محیط، نویسندگان این نوشتار را بر آن داشت که عملیات مجزاسازی محیط را از طریق یک روش بدون شبکه انجام دهند. در این روش هیچ‌گونه شبکه‌بندی برای محیط صورت نمی‌گیرد و دامنه‌ی مسئله فقط توسط گره‌ها شبیه‌سازی می‌شود و ارتباط بین گره‌ها از طریق معرفی دامنه‌ی تکیه‌گاهی تأمین می‌شود. دامنه‌ی تکیه‌گاهی برای یک نقطه، محدوده‌یی شامل گره‌های اطراف نقطه‌ی موردنظر است، که بر متغیر میدان در آن نقطه تأثیرگذار هستند (شکل ۱). متغیر میدان در هر نقطه را می‌توان با روش‌های مختلف به مقادیر گره‌یی مرتبط ساخت و درواقع، توابع شکل را تشکیل داد. عمده‌ی اختلاف روش‌های بدون شبکه‌ی مختلف، در نحوه‌ی ساخت توابع شکل است. در این نوشتار از روش درون‌یابی نقطه‌یی با توابع اساسی شعاعی و تقویت‌شده توسط کثیرالجمله‌یی‌ها برای تشکیل توابع شکل استفاده شده است، که در ادامه به اختصار شرح داده خواهد شد.

اگر مقادیر گره‌یی تابع پیوسته‌ی U در گره‌های واقع در دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقطه‌ی x مشخص باشند، تخمین مقدار تابع U در نقطه‌ی x را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۱۳ نوشت:

$$U^h(x)=\sum_{i=1}^{N}R_i(x)a_i+\sum_{j=1}^{M}P_j(x)b_j \qquad (۱۳)$$

که در این رابطه، N تعداد نقاط در دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقطه‌ی x، $R_i(x)$ توابع اساسی شعاعی، a_i ضرایب مرتبط با $R_i(x)$، M تعداد توابع اساسی کثیرالجمله‌یی برای تضمین بازتولید توابع، $P_j(x)$ توابع اساسی کثیرالجمله‌یی و b_j ضرایب مرتبط با $P_j(x)$ هستند. در این نوشتار از فرم استاندارد تابع مولتی کوادرتیک به‌عنوان توابع اساسی شعاعی استفاده شده است، که در فضای دو بعدی $\mathbf{x}=[x_1 \;\; x_2]^T$ به‌صورت رابطه‌ی ۱۴ هستند:

$$R_i(x_1,x_2)=\left(((x_1)_i-x_1)^2+((x_2)_i-x_2)^2+c^2\right)^q \qquad (۱۴)$$

ثابت‌های C و q پارامترهای شکل هستند که طبق پیشنهاد لیو،[25] C برابر ۱٫۴۲ و q برابر ۰٫۹۸ در نظر گرفته می‌شوند.

با ارضاء رابطه‌ی ۱۳ در گره‌ها و اختصاص مقادیر گره‌یی به تابع $U^h(x)$ و نیز ارضاء روابط لازم برای یکتایی جواب، $N+M$ معادله به‌دست می‌آید، که از طریق آن‌ها $N+M$ ضرایب مجهول a_i و b_j تعیین می‌شوند و با استفاده از این ضرایب می‌توان تابع $U^h(x)$ را با مقادیر تابع در نقاط گره‌یی مرتبط ساخت. به‌عبارت دیگر، می‌توان نوشت (رابطه‌ی ۱۵):

$$U^h(x)=\Phi(\mathbf{x})\mathbf{U_s} \qquad (۱۵)$$

که در آن، $\Phi(\mathbf{x})$ و $\mathbf{U_s}$ به ترتیب بردار توابع شکل و مقادیر گره‌یی تابع $U(x)$ هستند، که عبارت‌اند از (رابطه‌های ۱۶ و ۱۷):

$$\Phi(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\phi_1(\mathbf{x}) & \phi_2(\mathbf{x}) & \dots & \phi_N(\mathbf{x})\end{bmatrix}^T \qquad (۱۶)$$

$$\mathbf{U_s}=\begin{bmatrix}U_1 & U_2 & \dots & U_N\end{bmatrix}^T \qquad (۱۷)$$

با انجام محاسباتی که جزئیات آن در پژوهشی در سال ۲۰۰۲ اشاره شده است،[25] می‌توان رابطه‌ی ۱۸ را نوشت:

$$\phi_k(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}R_i(\mathbf{x})S_{aik}+\sum_{j=1}^{M}P_j(\mathbf{x})S_{bjk} \qquad (۱۸)$$

که در آن، S_{aik} و S_{bjk} به ترتیب مؤلفه‌های (i,k) و (j,k) مربوط به ماتریس‌های $\mathbf{S_a}$ و $\mathbf{S_b}$ هستند. ماتریس‌های مذکور به‌صورت رابطه‌های ۱۹ و ۲۰ تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{S}_a=\mathbf{R}_M^{-1}-\mathbf{R}_M^{-1}\mathbf{P}_M\mathbf{S}_b \qquad (۱۹)$$

$$\mathbf{S}_b=(\mathbf{P}_M^T\mathbf{R}_M^{-1}\mathbf{P}_M)^{-1}\mathbf{P}_M^T\mathbf{R}_M^{-1} \qquad (۲۰)$$

که در این روابط، ماتریس‌های $\mathbf{R}_M$ و $\mathbf{P}_M$ (ماتریس‌های گشتاور) عبارت‌اند از (رابطه‌های ۲۱ و ۲۲):

$$\mathbf{R}_M=\begin{bmatrix}R_1((x_1)_1,(x_2)_1) & R_2((x_1)_1,(x_2)_1) & \dots & R_N((x_1)_1,(x_2)_1)\\ R_1((x_1)_2,(x_2)_2) & R_2((x_1)_2,(x_2)_2) & \dots & R_N((x_1)_2,(x_2)_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R_1((x_1)_N,(x_2)_N) & R_2((x_1)_N,(x_2)_N) & \dots & R_N((x_1)_N,(x_2)_N)\end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

$$\mathbf{P}_M=\begin{bmatrix}P_1((x_1)_1,(x_2)_1) & P_2((x_1)_1,(x_2)_1) & \dots & P_m((x_1)_1,(x_2)_1)\\ P_1((x_1)_2,(x_2)_2) & P_2((x_1)_2,(x_2)_2) & \dots & P_m((x_1)_2,(x_2)_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_1((x_1)_N,(x_2)_N) & P_2((x_1)_N,(x_2)_N) & \dots & P_m((x_1)_N,(x_2)_N)\end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

با توجه به جمیع موارد فوق و با لحاظ‌کردن رابطه‌ی ۱۵، مقادیر سرعت $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ و نرخ کرنش خمیری $\varepsilon(x)$ را می‌توان بر اساس روابط ۲۳ الی ۲۵ به سرعت‌های گره‌یی

$\mathbf{u_s}$ وابسته کرد:

$$\mathbf{u(x)} = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{u_s} \tag{۲۳}$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{B(x)u_s} \tag{۲۴}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_N}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_N}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_N}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_N}{\partial x_1} \end{bmatrix} \tag{۲۵}$$

در روش بدون شبکه‌یی که در این نوشتار استفاده شده است، برای محاسبه‌ی عددی انتگرال‌های موجود در روابط، از یک شبکه‌ی پس‌زمینه و روش انتگرال‌گیری گاوس استفاده می‌شود و هیچ‌گونه ارتباطی بین شبکه‌ی پس‌زمینه و گره‌های معرف هندسه‌ی مسئله وجود ندارد.

۵.۲. تعیین قیود لازم برای سازگاری میدان سرعت

همان‌طورکه در بخش ۱.۲. ذکر شده است، تئوری حد بالا برای میدان سرعت سازگار برقرار است. طبق تعریف، میدان سرعتی سازگار نامیده می‌شود که سازگاری‌های کینماتیکی و خمیری را ارضاء کند. سازگاری کینماتیکی یک میدان سرعت زمانی ارضاء می‌شود که شرایط همسازی[1] و شرایط مرزی کینماتیکی برای آن میدان (روابط ۲۶ و ۲۷) برقرار باشد. به‌عبارت دیگر:

$$\varepsilon = \mathbf{Lu} \qquad \text{در کل دامنه‌ی مسئله} \tag{۲۶}$$

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{در مرزهای بسته‌شده به لحاظ سرعت} \tag{۲۷}$$

که در این روابط، $\mathbf{u}$ متغیر میدانی سرعت و ε نرخ کرنش خمیری است و در فضای دو بعدی، بردارهای $\mathbf{u}$ و ε و نیز ماتریس $\mathbf{L}$ را می‌توان به‌صورت روابط ۲۸ الی ۳۰ تعریف کرد:

$$\mathbf{u}_s^T = \{u_1 \;\; u_2\} \tag{۲۸}$$

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_{11} \;\; \varepsilon_{22} \;\; \gamma_{12}\} \tag{۲۹}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

که در این روابط، u_1 و u_2 به ترتیب بیانگر مؤلفه‌های سرعت در راستای محورهای x_1 و x_2 هستند.

برای برقراری شرایط سازگاری خمیری باید بردار نرخ کرنش خمیری، متعلق به دسته بردارهای عمود بر سطح تسلیم باشد (به‌عبارت دیگر، قانون تعامد را ارضاء کند). همچنین توان نیروهای خارجی باید مثبت باشد، یا به زبان ریاضی (رابطه‌ی ۳۱):

$$\int_\Omega \mathbf{f.u}\, d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{T.u}\, d\Gamma \geq 0 \tag{۳۱}$$

که پارامترهای این رابطه در بخش ۱.۲. توضیح داده شده است.

با توجه به شرایط عنوان‌شده در زمینه‌ی میدان سرعت سازگار، لازم است که برای تشکیل مسئله‌ی بهینه‌یابی که از رابطه‌ی ۱ حاصل می‌شود، قیودی در نظر گرفته شود. شرایط مربوط به سازگاری کینماتیکی با لحاظ‌کردن رابطه‌ی ۲۴ برای میدان سرعت مجزا شده است و نیز درنظرگرفتن شرایط مرزی برای سرعت‌های صفر به‌صورت خودکار ارضاء می‌شود. از طرفی برای ارضاء شرایط سازگاری خمیری باید نرخ کرنش‌های خمیری، شرایط تعامد بر سطح تسلیم را ارضاء کنند. بر این اساس، با درنظرگرفتن معیار تسلیم ون ـ میسز، بردار نرخ کرنش برای ارضاء خاصیت تعامد نباید هیچ‌گونه مؤلفه‌ی تغییر حجم داشته باشد، که اصطلاحاً شرط تراکم‌ناپذیری برای معیار ون ـ میسز نامیده می‌شود و در فضای دو بعدی (x_1, x_2) برای شرایط کرنش صفحه‌یی این قید را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۳۲ در نظر گرفت:

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0 \tag{۳۲}$$

علاوه بر مطالب فوق، ذکر این نکته ضروری است که در تحلیل‌های حدی، رفتار مصالح به‌صورت صلب ـ خمیری در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این رفتار، نرخ سرعت‌ها تأثیری در حل مسئله ندارد و بنابراین بدون از بین‌رفتن کلیت مسئله می‌توان نرخ سرعت‌ها را به نحوی انتخاب کرد که رابطه‌ی ۳۳ برقرار شود:

$$\int_\Omega \mathbf{f.u}d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{T.u}d\Gamma = 1 \tag{۳۳}$$

در این صورت هم قید مربوط به رابطه‌ی ۳۱ برای ارضاء سازگاری خمیری لحاظ شده است و هم شکل‌دهی مسئله‌ی بهینه‌یابی ساده‌تر می‌شود.

۶.۲. تشکیل مسئله‌ی بهینه‌یابی ریاضی

با توجه به معادله‌ی ۱، با فرض ایجاد زوال توسط ضریبی از بار معادل خارجی، رابطه‌ی ۳۴ را خواهیم داشت:

$$\lambda\left(\int_\Gamma \mathbf{T.u}\, d\Gamma + \int_\Omega \mathbf{f.u}\, d\Omega\right) \leq \int_\Omega \sigma^T.\varepsilon\, d\Omega \tag{۳۴}$$

که در این رابطه، λ ضریب بارهای خارجی است. بنابراین می‌توان رابطه‌ی ۳۵ را نوشت:

$$\lambda \leq \frac{\int_\Omega \sigma^T.\varepsilon\, d\Omega}{\int_\Gamma \mathbf{T.u}\, d\Gamma + \int_\Omega \mathbf{f.u}\, d\Omega} \tag{۳۵}$$

بدون از بین‌رفتن کلیت مسئله و با فرضی که در رابطه‌ی ۳۳ عنوان شده است، رابطه‌ی ۳۶ را خواهیم داشت:

$$\lambda \leq \int_\Omega \sigma^T.\varepsilon\, d\Omega \tag{۳۶}$$

رابطه‌ی ۳۶ بیان می‌کند که کمترین مقدار توان اتلافی داخلی که از یکی از میدان‌های سرعت سازگار حاصل می‌شود، همان ضریب بار واقعی زوال است. بنابراین حد بالا برای ضریب بار زوال را می‌توان با حل یک مسئله‌ی‌بهینه‌یابی ریاضی به‌دست آورد. تابع هدف در این مسئله‌ی بهینه‌یابی توان اتلافی داخلی است و قیود مسئله، قیود لازم برای سازگاری میدان سرعت هستند. این مسئله‌ی بهینه‌یابی را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۳۷ نوشت:

$$\begin{cases} \lambda = \min \int_\Omega \sigma^T.\varepsilon\, d\Omega \\ subject\ \text{to}: \int_\Omega \mathbf{f.u}\, d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{T.u}\, d\Gamma = 1 \\ \qquad \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0 \quad \text{on}\ \Omega \\ \qquad \varepsilon = \mathbf{Lu} \quad \text{on}\ \Omega \\ \qquad \mathbf{u} = 0 \quad \text{on}\ \Gamma \end{cases} \tag{۳۷}$$

با درنظرگرفتن رابطه‌ی ۱۲، که ارتباط بین تنش و نرخ کرنش خمیری را بیان می‌کند، مسئله‌ی بهینه‌یابی عنوان‌شده در رابطه‌ی ۳۷ را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۳۸ بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \lambda = \min \int_{\Omega} \sqrt{\varepsilon^T \mathbf{P}^{-1} \varepsilon}\, d\Omega \\ subject\,\text{to}: \displaystyle\int_{\Omega} \mathbf{f}.\mathbf{u}\, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{T}.\mathbf{u}\, d\Gamma = 1 \\ \qquad \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0 \quad \text{on}\, \Omega \\ \qquad \varepsilon = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad \text{on}\, \Omega \\ \qquad \mathbf{u} = 0 \quad \text{on}\, \Gamma \end{cases} \tag{38}$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری گوس و معادلات ۲۳ و ۲۴، معادله‌ی بهینه‌سازی ۳۸ برای میدان سرعت مجزاشده به‌صورت رابطه‌ی ۳۹ بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \lambda = \min \sum_{i=1}^{NG} \rho_i \sqrt{\mathbf{u_s^T B^T P^{-1} B u}_s} \\ subject\,\text{to}: \quad \mathbf{F}^t \mathbf{u_s} = 1 \\ \qquad \mathbf{D}_v \mathbf{B} \mathbf{u}_s = 0 \end{cases} \tag{39}$$

که در این رابطه، NG و ρ_i به ترتیب تعداد و وزن نقاط گوس هستند. همچنین بردار $\mathbf{F}$ و $\mathbf{D_v}$ به‌صورت رابطه‌های ۴۰ و ۴۱ تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{F} = \int_{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{\Phi^T T} d\Gamma + \int_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{\Phi^T f} d\Omega \tag{40}$$

$$\mathbf{D_v} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0] \tag{41}$$

۷.۲. حل مسئله‌ی بهینه‌یابی ریاضی

رابطه‌ی بهینه‌یابی ۳۹، یک مسئله‌ی بهینه‌یابی غیرخطی با دو قید تساوی است. تابع هدف تابعی غیرخطی و پیوسته است که در بعضی نقاط مشتق‌ناپذیر است. مشتق‌ناپذیربودن تابع هدف می‌تواند در روند حل مسئله‌ی بهینه‌یابی، حل را دچار مشکل سازد. به منظور فائق‌آمدن بر این مشکل از الگوریتم تکرار پیشنهادشده در پژوهشی در سال ۱۹۹۱،[۲۶] بر پایه‌ی جداسازی دو ناحیه‌ی صلب و خمیری در این نوشتار استفاده شده است. در پژوهش دیگری به منظور اعمال شرط تراکم‌ناپذیری از روش جریمه‌یی با فرض ضریب جریمه‌یی متغیر استفاده شد.[۲۷] این روش به انتخاب مناسب ضریب جریمه، که دارای محدوده‌ی گسترده‌یی است، حساسیت زیادی دارد و مسئله‌ی بهینه‌یابی را دچار مشکل می‌سازد. لذا در این نوشتار، با اعمال شرط $\mathbf{D_v B u_s} = 0$ با استفاده از ضریب لاگرانژین نامشخص μ (که در طی روند حل مسئله تعیین می‌شود)، این نقص بر طرف شده است. با استفاده از روش لاگرانژین، قیود رابطه‌ی ۳۹ به‌صورت رابطه‌ی ۴۲ به تابع هدف اعمال می‌شوند:[۲۸]

$$L(\mathbf{u}_s, q, \mu) = \sum_{i=1}^{NG} \rho_i \sqrt{\mathbf{u_s^T B^T P^{-1} B u_s}} + q(F^T \mathbf{u}_s - 1) + \mu(\mathbf{D_v B u}_s) = 0 \tag{42}$$

که در آن، q و μ ضرایب نامشخص لاگرانژین هستند، که در طی روند حل مسئله تعیین می‌شوند. به منظور استفاده از الگوریتم تکرار بهینه‌یابی، معادله‌ی ۴۲ به‌صورت رابطه‌ی ۴۳ باز نویسی می‌شود:

$$L(\mathbf{u}_s, q, \mu) = \sum_{i=1}^{NG} \rho_i \frac{\mathbf{u}_s^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B u_s}}{W_{icp}} + q(F^T \mathbf{u}_s - 1) + \mu(\mathbf{D_v B u_s}) = 0 \tag{43}$$

که در آن،W_{icp} پارامتر تکرار نامیده و به‌صورت رابطه‌ی ۴۴ تعریف می‌شود:

$$W_{icp} = \sqrt{\mathbf{u_s^T B^T P^{-1} B u_s}} \tag{44}$$

نقاط مشتق‌ناپذیر با تعیین مقدار W_{icp} در هر گام تکرار تعیین می‌شوند. الگوریتم تکرار با فرض مخالف صفربودن کرنش‌های خمیری در تمامی نواحی مورد بررسی شروع و در گام‌های بعدی با تعیین مقدار W_{icp} در هر نقطه‌ی گوس، نواحی مشتق‌ناپذیر تابع هدف (نواحی صلب) تعیین می‌شوند. در این نواحی نرخ کرنش خمیری برابر صفر می‌شود و بنابراین مقدار W_{icp}برابر صفر است. بر طبق بحث بالا الگوریتم تکرار برای محاسبه‌ی بار خمیری به این صورت پیشنهاد می‌شود:

گام اول: با توجه به بی‌اثربودن مقدار اولیه‌ی میدان سرعت گره‌یی در جواب مسئله،[۲۹] طبق پیشنهاد برخی پژوهشگران،[۳۰] در شروع مسئله فرض می‌کنیم که $(W_{icp})_1 = 1$ باشد. طبق این فرض معادله‌ی ۴۳ به‌صورت رابطه‌ی ۴۵ باز نویسی می‌شود:

$$L(\mathbf{u}_s, q, \mu) = \sum_{i=1}^{NG} \rho_i \mathbf{u_s^T B^T P^{-1} B u_s} + q(F^T \mathbf{u}_s - 1) + \mu(\mathbf{D_v B u_s}) = 0 \tag{45}$$

با استفاده از تئوری بهینه‌سازی لاگرانژین و اعمال $\partial L/\partial \mathbf{u_s} = 0$، $\partial L/\partial q = 0$ و $\partial L/\partial \mu = 0$ سیستم معادلات خطی به‌صورت رابطه‌ی ۴۶ حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{F} & (\mathbf{D_v B})^T \\ \mathbf{F}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{D_v B} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u_s} \\ q \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

با حل دستگاه معادلات خطی ذکرشده در رابطه‌ی ۴۶، مقدار $(\mathbf{u_s})_1$ در گام اول تعیین و با استفاده از آن مقدار λ_1 از رابطه‌ی ۴۷ حاصل می‌شود:

$$\lambda_1 = \sum \rho_i \sqrt{(\mathbf{u_s}^T)_1 \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{u_s})_1} \tag{47}$$

گام $k+1$ اُم $(k = 1, 2, \ldots)$: در ابتدا با استفاده از مقدار سرعت به‌دست‌آمده در هر نقطه‌ی گوس، از گام kاُم مقدار W_{icp} در هر نقطه‌ی گوس تعیین می‌شود. با توجه به مقدار به‌دست‌آمده برای W_{icp}، ناحیه‌ی Ω به دو ناحیه‌ی صلب (مشتق‌ناپذیر) و خمیری (مشتق‌پذیر) تقسیم می‌شود (رابطه‌ی ۴۸):

$$I = (I_{nd})_{k+1} \cup (I_d)_{k+1} \tag{48}$$

که در آن، I_d مشخص‌کننده‌ی نواحی مشتق‌پذیر و I_{nd} مشخص‌کننده‌ی نواحی مشتق‌ناپذیر است که به‌صورت مجموعه‌روابط ۴۹ تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} I_{nd} = \left\{ i \in I, \sqrt{(\mathbf{u}_s^T)_k \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{u_s})_\mathbf{k}} = 0 \right\} \\ I_d = \left\{ i \in I, \sqrt{(\mathbf{u}_s^T)_k \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{u_s})_\mathbf{k}} \neq 0 \right\} \end{cases} \tag{49}$$

با توجه به جداسازی نواحی مشتق‌پذیر و مشتق‌ناپذیر، مقدار میدان سرعت در گام $k+1$اُم با حل مسئله‌ی بهینه‌یابی ۵۰ تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} \lambda = \min \sum_{i=1}^{NG} \rho_i \frac{\mathbf{u}_s^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u_s}}{W_{icp}} \\ \mathbf{F}^T\mathbf{u_s}=1 \\ \mathbf{D_v}\mathbf{B}\mathbf{u_s}=0 & \text{on } V \\ \mathbf{u_s}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u_s}=0 & \text{on } I_{nd} \end{cases} \tag{50}$$

که با استفاده از تئوری بهینه‌سازی لاگرانژین معادله‌ی ۴۹ به‌صورت رابطه‌ی ۵۱ بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u_s},q,\mu) &= \sum \rho_i \mathbf{u_s}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u_s} + q\mathbf{F}^T\mathbf{u_s} - 1) \\ &+ \mu(\mathbf{D_v}\mathbf{B}\mathbf{u_s}) + \alpha(\mathbf{u_s}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u_s}) = 0 \end{aligned} \tag{51}$$

که در این رابطه، α به‌عنوان ضریب جریمه برای نواحی مشتق‌ناپذیر تعریف می‌شود. در واقع با استفاده از این ضریب به جای تقسیم تابع هدف بر یک مقدار خیلی کوچک آن را در یک مقدار خیلی بزرگ ضرب می‌کنیم. در این نوشتار، این ضریب برابر 10^{12} در نظر گرفته شده است. با اعمال $\partial L/\partial \mathbf{u_s}=0$، $\partial L/\partial q=0$ و $\partial L/\partial \mu=0$، سیستم معادلات خطی به‌صورت رابطه‌ی ۵۲ حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + 2\alpha\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{F} & (\mathbf{D_v}\mathbf{B})^T \\ \mathbf{F}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{D_v}\mathbf{B} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u_s} \\ q \\ \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

با حل دستگاه معادلات خطی ۵۲، مقدار $(\mathbf{u_s})_{k+1}$ و با استفاده از آن مقدار λ_{k+1} در هر گام تکرار با استفاده از رابطه‌ی ۵۳ تعیین می‌شود:

$$\lambda_{k+1} = \sum \rho_i \sqrt{(\mathbf{u_s}^T)_{k+1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{u_s})_{\mathbf{k+1}}} \tag{53}$$

الگوریتم تکرار بالا تا جایی ادامه می‌یابد که معیارهای همگرایی ۵۴ و ۵۵ ارضاء شوند:

$$\frac{|\lambda_k - \lambda_{k+1}|}{\lambda_{k+1}} \le \eta_1 \tag{54}$$

$$\frac{||(\mathbf{u_s})_{\mathbf{k+1}} - (\mathbf{u_s})_{\mathbf{k}}||}{||(\mathbf{u_s})_{\mathbf{k+1}}||} \le \eta_2 \tag{55}$$

مقدار η_1 و η_2 حدود تحمل هستند، که در این نوشتار برابر با 10^{-4} در نظر گرفته شده است.

۳. کاربرد

در این قسمت با حل دو مثال برای خاک‌های چسبنده با مقاومت برشی ثابت و متغیر، کارآمدی روش حل برای تعیین مرز بالای بار حدی مورد بررسی قرار گرفته است. در مثال‌های حل‌شده، برنامه‌ی رایانه‌یی به گونه‌یی تهیه شده است که تعداد مناسب گره‌ها در هر یک از دامنه‌های تکیه‌گاهی به‌صورت هوشمند در نظر گرفته شود.

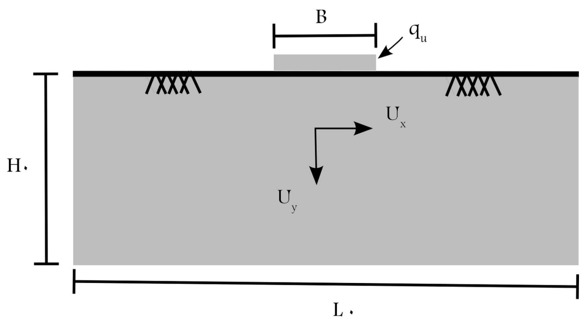
۱.۳. بارگذاری زهکشی‌نشده بر روی خاک چسبنده با مقاومت برشی ثابت نسبت به عمق

در این مثال، بارگذاری یکنواختی بر روی یک خاک چسبنده در یک محیط نیمه بی‌نهایت مطابق شکل ۲ در نظر گرفته شده است. خاک بدون وزن فرض شده و مقاومت برشی آن در تمامی اعماق مقدار ثابت S_u است. مقدار دقیق بار حدی برای این مسئله در پژوهشی ارائه شده است،[31] که برابر S_u $(\pi+2)$ است. به منظور تعیین مرز بالا برای بار حدی توسط روش پیشنهادی در این نوشتار، لازم است که محدوده‌یی برای حل مسئله در نظر گرفته شود. این محدوده باید به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار شود تا کل ناحیه‌ی خمیری ایجادشده را در برگیرد و در جواب‌های مسئله مؤثر نباشد. برای این منظور طول (L_0) و عرض (H_0) محدوده‌ی مورد بررسی به ترتیب $16B$ و $4B$ در نظر گرفته شده‌است، که B معرف عرض ناحیه‌ی بارگذاری است.

به منظور تعیین مرز بالا برای بار حدی و نیز بررسی تأثیر آرایش گره‌ها در دقت جواب‌های به‌دست‌آمده، به ترتیب سه مدل بدون شبکه با آرایش‌های منظم، اتفاقی و شعاعی گره‌ها در نظر گرفته شده است (شکل ۳). شایان ذکر است که در تمامی مدل‌ها به دلیل تقارن، نیمی از مسئله مدل‌سازی شده است.

نتایج مربوط به تحلیل‌های سه مدل برای بار حدی با درنظرگرفتن $S_u=1$ در جدول ۱ ارائه شده است.

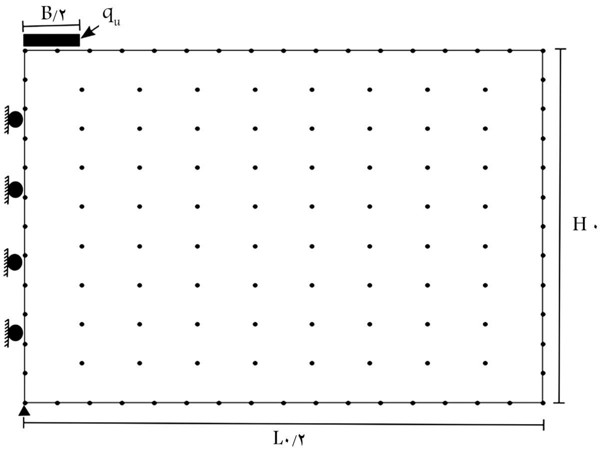
مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی به شکل آرایش گره‌ها حساس است و در این مثال خاص، آرایش شعاعی برای گره‌ها بهترین نتیجه را به‌دست داده است. علت این امر چگالی بیشتر گره‌ها در مناطق تمرکز تنش و نیز هم‌خوانی آرایش گره‌ها با نحوه‌ی چرخش تنش حول نقطه‌ی تکینگی در گوشه‌ی محل بارگذاری است. با توجه به نتایج به‌دست آمده (جدول ۱)، برای بررسی همگرایی روش، آرایش شعاعی گره‌ها برگزیده شده است. بر این اساس باید نشان داده شود که با افزایش تعداد گره‌ها، جواب‌های به‌دست‌آمده به سمت حل دقیق میل می‌کنند. لذا ۴ مدل با الگوهای



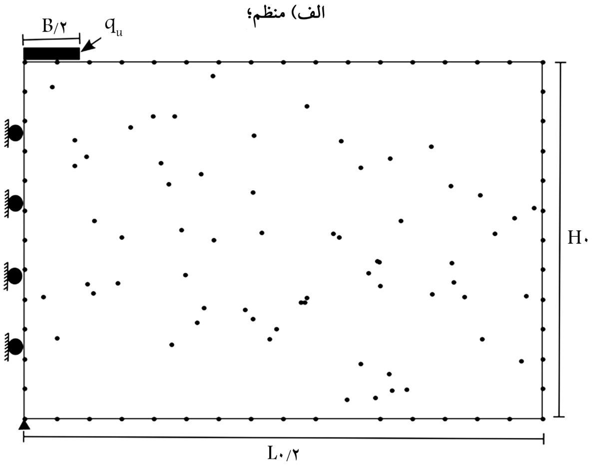
شکل ۲. مدل نیمه بی‌نهایت تحت بارگذاری فشاری یکنواخت.

جدول ۱. نتایج حاصل از سه الگوی بدون شبکه.

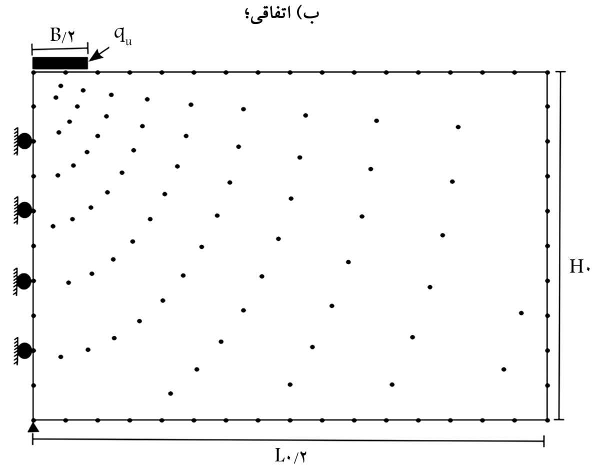
مدل بدون شبکه	حل دقیق مسئله	حل مرز بالا
مدل شعاعی ۱۲۰ گره	۵/۱۴	۸/۷۷۰۱
مدل منظم ۱۲۰ گره	۵/۱۴	۱۵/۰۲۴
مدل اتفاقی ۱۲۰ گره	۵/۱۴	۱۰/۶۹۹



الف) منظم؛



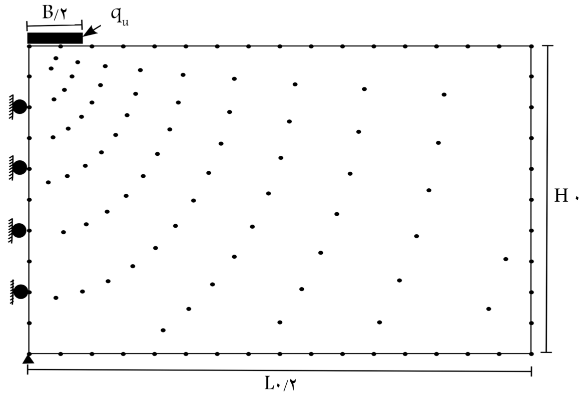
ب) اتفاقی؛



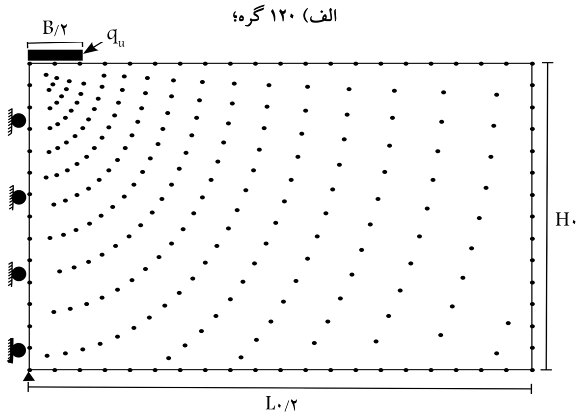
ج) شعاعی.

شکل ۳. الگوهای بدون شبکه.

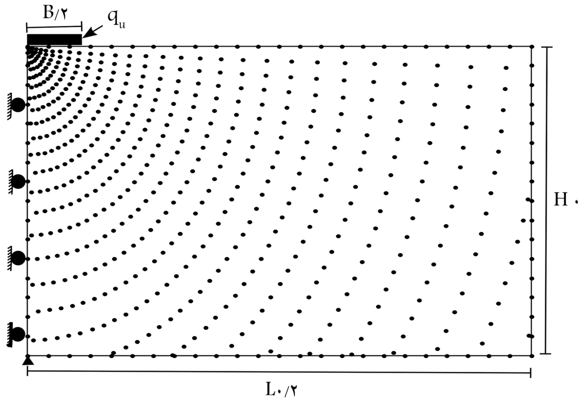
نشان داده‌شده در شکل ۴ در نظر گرفته شده است. در این مدل‌ها، ابتدا با تنظیم فاصله‌ی بین گره‌ها، مرز دامنه‌ی موردنظر شبیه‌سازی شده است. سپس برای تولید گره‌های داخلی با درنظرگرفتن آرایش شعاعی، با کاهش فاصله‌ی بین گره‌ها برروی محیط هر یک از دایره‌ها به مرکزیت مرکز پی، و نیز افزایش تعداد دوایر هم‌مرکز، گره‌ها از طریق یک برنامه به‌صورت خودکار تولید می‌شوند. با توجه به آرایش شعاعی نمی‌توان فاصله‌ی متوسطی بین گره‌ها تعریف کرد و فقط می‌توان تعداد گره‌ها را



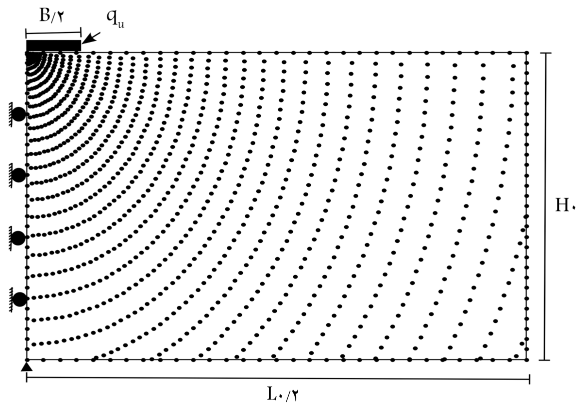
الف) ۱۲۰ گره؛



ب) ۲۴۸ گره؛



ج) ۴۹۲ گره؛



د) ۱۰۶۶ گره.

شکل ۴. مدل بدون شبکه.

بیان کرد. نتایج حاصل از تحلیل مدل‌های در نظرگرفته‌شده به همراه تعداد گره‌های استفاده‌شده در هر مدل در جدول ۲ ارائه شده است.

همان‌طورکه از این نتایج مشخص است، حل‌های مرز بالا تخمین بسیار خوبی از بار حدی مسئله‌ی موردنظر را به‌دست می‌دهند و با افزایش تعداد گره‌ها دقت جواب بهتر می‌شود. علاوه بر این، اختلاف بین جواب‌های به‌دست‌آمده در تراکم بالای گره‌ها کمتر است، که این امر شاهدی بر همگرایی روش است. نکته‌ی قابل توجه آن است که به علت آنکه شرط تراکم ناپذیری، که مربوط به قانون تعامد می‌شود، به‌صورت متوسط درگره‌ها ارضاء شده است و در تمامی نقاط دامنه ارضاء نمی‌شود، نمی‌توان ادعا کرد که حل به‌دست‌آمده اکیداً یک حل مرز بالاست، اما نتایج آزمون‌های عددی نشان داده است که با درنظرگرفتن تعداد کافی از گره‌ها حل حد بالا به‌دست می‌آید.

میدان سرعت شکل‌گرفته در زیر پی نیز در شکل ۵ نشان داده شده است. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، میدان سرعت ایجادشده، معرف منطقه‌ی خمیری در زیر پی است، که مطابقت خوبی با مکانیزم پرندتل دارد و این امر شاهدی دیگر بر صحت الگوریتم پیشنهادی است.

۲.۳. بارگذاری زهکشی‌نشده بر روی خاک چسبنده با مقاومت برشی افزایش‌یابنده نسبت به عمق

شرایط بارگذاری و محیط مورد مطالعه مطابق مثال پیشین است، با این تفاوت که مطابق شکل ۶ فرض شده است که مقاومت برشی زهکشی‌نشده از مقدار $S_{u\circ}$ در سطح زمین، به‌صورت خطی و با نرخ افزایشی ρ متناسب با عمق افزایش می‌یابد.

حل دقیق این مسئله در پژوهشی در سال ۱۹۷۳ به‌صورت رابطه‌ی ۵۶ ارائه شده است:[۳۲]

$$Q_u = f\left[(۲+\pi)\, S_{u\circ} + \rho B/۴\right] \qquad (۵۶)$$

در این رابطه، f تابعی از کمیت بدون بعد $\rho B/S_{u\circ}$ است. با انتخاب $\rho B/S_{u\circ} = ۳$ رابطه‌ی ۵۷ را خواهیم داشت:

$$\frac{Q_u}{S_{u\circ}} = ۵{,}۸۹ f \qquad (۵۷)$$

با درنظرگرفتن $S_{u\circ} = ۱$، رابطه‌ی ۵۸ را خواهیم داشت:

$$f = \frac{Q_u}{۵{,}۸۹} \qquad (۵۸)$$

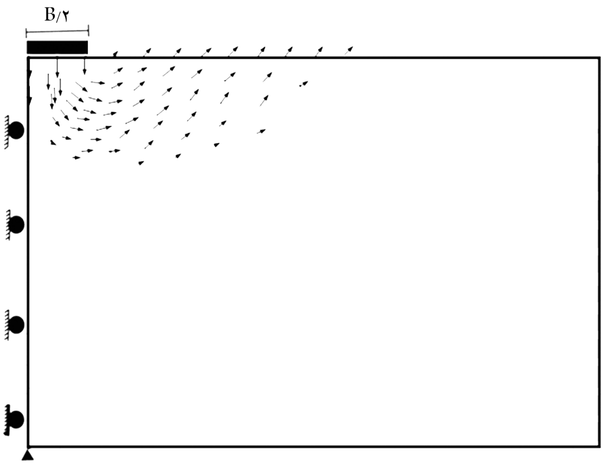
بنابراین با تعیین Q_u برای مسئله‌ی موردنظر و به‌دست‌آوردن مقدار f و مقایسه‌ی آن با مقدار تقریبی جواب دقیق کمیت، که برای $\rho B/S_{u\circ} = ۳$ برابر ۱٫۲۲ است، می‌توان به دقت روش حل و نیز صحت آن پی برد. بر این اساس، با بهره‌گیری از نتایج و الگوی تولید شبکه، که در مثال قبل عنوان شد، ۴ الگوی آرایش شعاعی برای گره‌ها مطابق شکل ۷ در نظر گرفته شده است. تعداد گره‌های تولیدی برای هر مدل در جدول ۳ ارائه شده است. همچنین شبکه‌ی پس‌زمینه جهت انتگرال‌گیری نیز در شکل ۸ نشان داده شده است.

نتایج تحلیل‌های انجام‌شده برای هر ۴ مدل در جدول ۳ ارائه شده است. همان‌طور که از این جدول مشخص است، تمامی مدل‌های موردنظر حدود بالای مناسبی را به‌دست می‌دهند و با افزایش چگالی گره‌ها، دقت حل نیز افزایش می‌یابد؛ که این امر تأییدی بر همگرایی و نیز دقت روش مطرح‌شده در این نوشتار است.

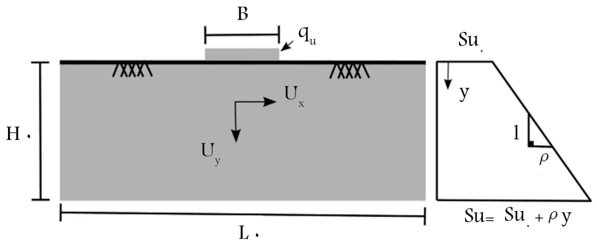
علاوه بر این، جهت بررسی نحوه‌ی عملکرد فرایند تکرار در مسئله‌ی بهینه‌یابی، برای مدل بدون شبکه با ۱۱۷۴ گره، تعداد تکرارها در مقابل مقدار کمیت f در شکل ۹

جدول ۲. نتایج حاصل از همگرایی مدل بدون شبکه‌ی شعاعی.

تعداد گره‌ها	حل دقیق مسئله	حل مرز بالا
۱۲۰ گره	۵٫۱۴	۸٫۷۷۰
۲۴۸ گره	۵٫۱۴	۷٫۰۰۳
۴۹۲ گره	۵٫۱۴	۵٫۱۷۱
۱۰۶۶ گره	۵٫۱۴	۵٫۱۶۱



شکل ۵. میدان سرعت در زیر پی برای مدل بدون شبکه با ۲۴۸ گره.

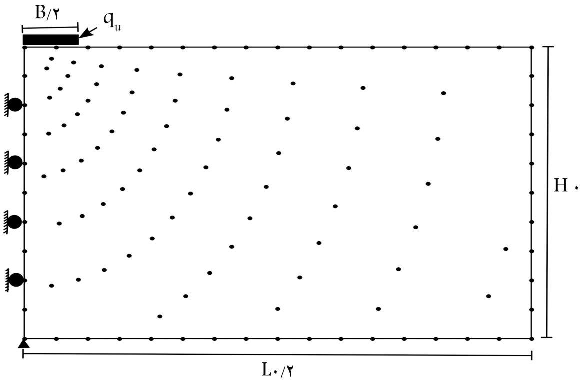


شکل ۶. مدل نیمه بی‌نهایت در خاکی با چسبندگی متغیر.

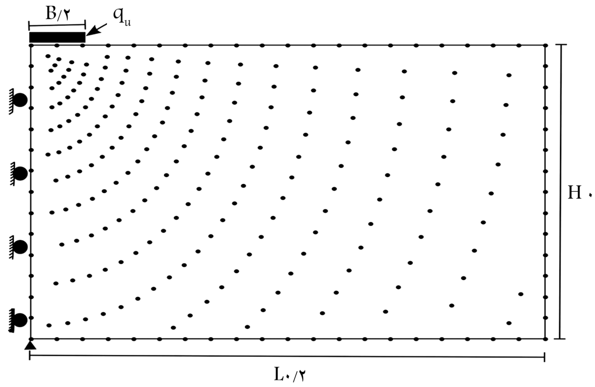
جدول ۳. نتایج حاصل از همگرایی مدل بدون شبکه‌ی شعاعی.

تعداد گره‌ها	مقدار دقیق	مرز بالا برای
۱۲۰ گره	۱٫۲۲	۱٫۷۸۳۰
۲۴۸ گره	۱٫۲۲	۱٫۶۸۴۰
۵۹۳ گره	۱٫۲۲	۱٫۲۳۱۴
۱۱۷۴ گره	۱٫۲۲	۱٫۲۳۰۱

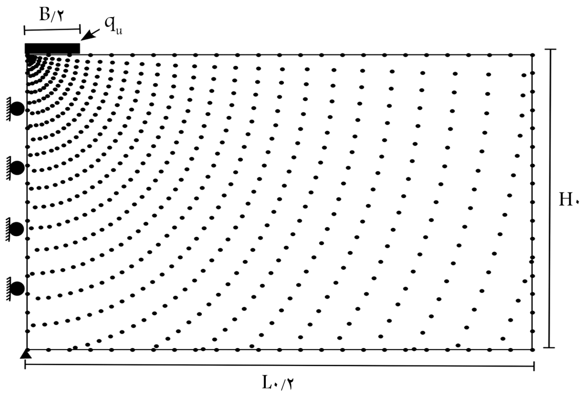
نشان داده شده است. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، در ۲ یا ۳ گام اول روش تکرار، جواب‌ها به میزان قابل توجهی بالاتر از حل دقیق هستند، اما پس ازگام چهارم طی یک روند مناسب جواب‌های به‌دست‌آمده به حل دقیق نزدیک می‌شوند. برای سایر مدل‌ها نیز همین روند در فرایند حل مسئله‌ی بهینه‌یابی مشاهده می‌شود، که حکایت از پایداری روند حل تکرار مسئله‌ی بهینه‌یابی دارد.



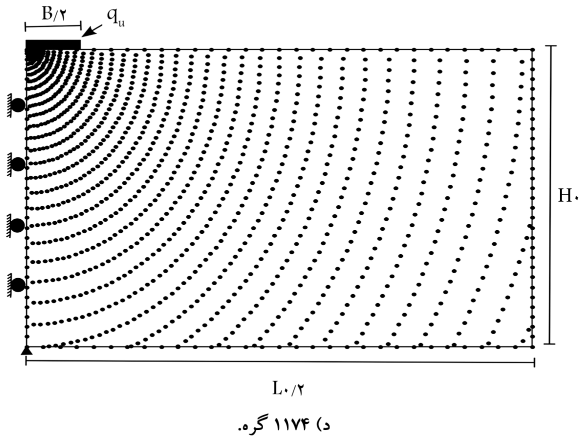
الف) ۱۲۰ گره؛



ب) ۲۴۸ گره؛

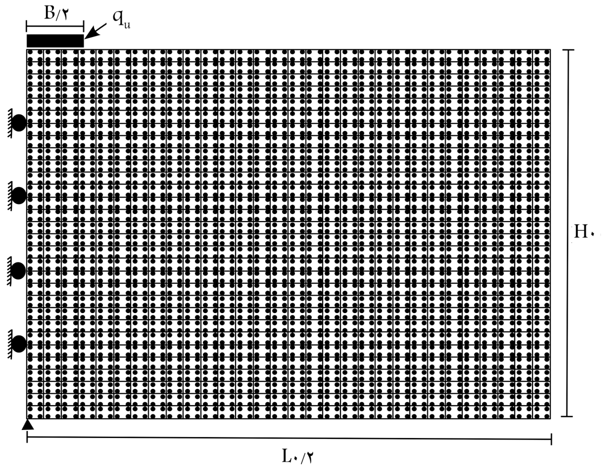


ج) ۵۹۳ گره؛

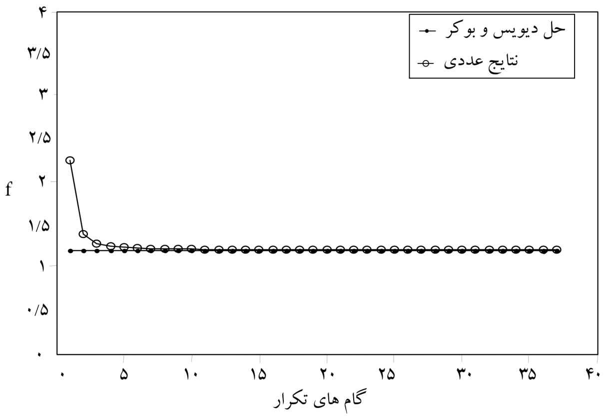


د) ۱۱۷۴ گره.

شکل ۷. مدل بدون شبکه.



شکل ۸. شبکه‌ی پس‌زمینه‌جهت انتگرال‌گیری عددی.



شکل ۹. هم‌گرایی کمیت f در مقابل گام تکرار.

۴. نتیجه‌گیری

در این نوشتار، با ترکیب تئوری مرز بالای تحلیل حدی و یک روش بدون شبکه، شیوه‌یی جدید برای تعیین مرز بالا در مسائل صفحه‌یی مکانیک خاک مربوط به خاک‌های چسبنده بنا نهاده شده است. در روش پیشنهادی با استفاده از اعمال قانون جریان وابسته به معیار ون ـ میسز، نرخ اتلاف انرژی داخلی مستقیماً به میدان سرعت ارتباط داده شده است. جهت مجزاسازی میدان سرعت از روش درون‌یابی نقطه‌یی استفاده و فرایند انتگرال‌گیری عددی با استفاده از یک شبکه‌ی پس‌زمینه انجام شده است. مسئله‌ی مرز بالا با استفاده از روابط مربوط به میدان سرعت مجزا و نرخ اتلاف انرژی داخلی و نیز با اعمال قیود ضروری به یک مسئله‌ی بهینه‌یابی ریاضی تبدیل شده است. این مسئله‌ی بهینه‌یابی با استفاده از شیوه‌ی لاگرانژین و یک الگوریتم تکرار صلب ـ خمیری حل و منجر به یافتن مرز بالای بار حدی شده است. از عمده‌ی مزیت‌های روش پیشنهادی پایداری حل و نیز کاهش قیود مورد نیاز جهت تشکیل مسئله‌ی بهینه‌یابی است. نتایج مطالعات عددی نشان داده است که دقت جواب‌های به‌دست‌آمده به الگوی آرایش گره‌ها وابسته است و با افزایش چگالی گره‌ها دقت حل افزایش می‌یابد. همچنین روش پیشنهادی از روند حلی پایدار بهره می‌برد و جواب‌های مرز بالا با دقت مناسبی را به‌دست می‌دهد.

پانوشت

1. compatibility

منابع (References)

1. Drucker, D.C., Prager, W. and Greenberg, H.T. "Extended limit design theorems for continuous media", *Quarterly of Applied Mathematics*, **9**, pp. 381-389 (1952).
2. Lysmer, J. "Limit analysis of plane problems in soil mechanics", *Int. J. Soil Mech. Found. Div., ASCE,* **96**(4), pp. 1311-1334 (1970).
3. Sloan, S.W. "Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming", *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* **13**, pp. 263-282 (1989).
4. Sloan, S.W. "A steepest edge active set algorithm for solving sparse linear programming", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**(12), pp. 2671-2685 (December 1988).
5. Yu, H.S., Sloan, S.W. and Kleeman, P.W. "A quadratic element for upper bound limit analysis", *Engineering Computations,* **11**(3), pp. 195-212 (1994).
6. Merifeld, R.S., Sloan, S.W. and Yu, H.S. "Rigorous plasticity solutions for the bearing capacity of two-layered clays", *Geotechnique,* **49**(4), pp. 471-490 (1999).
7. Milani, G. and Lourenco, P.B. "A discontinuous quasi-upper bound limit analysis approach with sequential linear programming mesh adaptation", *Int. J. of Mechanical Sciences*, **51**, pp. 89-104 (2009).
8. Sloan, S.W. and Kleeman, P.W. "Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **127**(1-4), pp. 293-314 (1995).
9. Lyamin, A.V. and Sloan, S.W. "Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming", *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* **26**, pp. 181-216 (2002).
10. Zouain, N., Herskovits J., Borges, L.A. and Feijo, O.R.A. "An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions", *International Journal of Solids and Structures*, **30**(10), pp. 1397-1417 (1993).
11. Ponter, A.R.S., Chen, H.F., Boulbibane, M. and Habibullah, M. "The linear matching method for the evaluation of limit loads, shakedown limits and related problems", *In: Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Austria (2002).
12. Boulbibane, M. and Ponter, A.R.S. "Limit loads for multilayers half-space using the linear matching method", *Computers and Geotechnics*, **32**(7), pp. 535-544 (2005).
13. Li, H.X. and Yu, H.S. "Kinematic limit analysis of frictional materials using nonlinear programming", *Int. J. of Solids and Structures,* **42**(14), pp. 4058-4076 (2005).
14. Silva, M.V., Antao, A.N. "Upper bound limit analysis with a parallel mixed finite element formulation", *Int. J. of Solids and Structures,* **45**(22-23), pp. 5788-5804 (2008).
15. Xu, Q., Lu, Y., Yin, H. and Li, Zh. "Element integration method for upper bound limit analysis", *Mechanics Research Communications,* **37**(6), pp. 611-616 (2010).
16. Nguyen-Thoi, T., Vu-Do, H.C., Rabczuk, T. and Nguyen-Xuan, H. "A node-based smoothed finite element method (NS-SFEM) for upper bound solution to visco-elastoplastic analyses of solids using triangular and tetrahedral meshes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**(45-48), pp. 3005-3027 (2010).
17. Antao, A.N., Silva, M.V., Guerra, N. and Delgado, R. "An upper-bound based solution for the shape factors of bearing capacity of footings under drained conditions using a parallelized mixed F.E. formulation with quadratic velocity fields", *Computers and Geotechnics*, **41**, pp. 23-35 (2012).
18. Chen, S., Liu, Y. and Cen, Zh. "Lower bound shakedown analysis by using the element free Galerkin method and non-linear programming", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**(45-48), pp. 3911-3921 (2008).
19. Chen, S., Liu, Y. and Cen, Zh. "Lower-bound limit analysis by using the EFG method and non-linear programming", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering,* **74**(3), pp. 391-415 (2008).
20. Le, C.V., Gilbert, M. and Askes, H. "Limit analysis of plates using the EFG method and second-order cone programming", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering,* **78**(13), pp. 1532-1555 (2009).
21. Le, C.V., Gilbert, M. and Askes, H. "Limit analysis of plates and slabs using a meshless equilibrium formulation", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering,* **83**(13), pp. 1739-1758 (2010).
22. Le, C.V., Askes, H. and Gilbert, M. "Adaptive element-free Galerkin method applied to the limit analysis of plates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**(37-40), pp. 2487-2496 (2010).
23. Drucker, D.C. "Limit analysis of two and three-dimensional soil mechanics problems", *J. Mech. Phys. Solids*, **1**(4), pp. 217-226 (1953).
24. Oller, S., Car, E. and Lubliner, J. "Definition of a general implicit orthotropic yield criterion", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.,* **192**(7-8), pp. 895-912 (2003).
25. Liu, G.R., *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, Florida, CRC Press, pp. 171 (2002).
26. Zhang, P.X., Lu, M.W. and Hwang, K. "A mathematical programming algorithm for limit analysis", *Acta Mech. Sinica,* **7**, pp. 267-274 (1991).
27. Li, H.X. and Yu, H.S. "Limit analysis of 2-D and 3-D structures based on an ellipsoid yield criterion", *Acta Geotechnica,* **1**(3), pp. 179-193 (2006).
28. Himmelblau, D.M., *Applied Nonlinear Programming,* McGraw-Hill Book Company, New York. (1972).
29. Huh, H. and Yang, W.H. "A general algorithm for limit solutions of plane stress problems", *Int. J. Solids Struct.,* **28**(6), pp. 727-738 (1991).

30. Zhang, Y.G. and Lu, M.W. "An algorithm for plastic limit analysis", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **126**(3-4), pp. 333-341 (1995).

31. Prandtl, L. "Über die Härte plastischer Körper", *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, **1920**, pp. 74-85 (1920).

32. Davis , E.H. and Booker, J.R. "The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clays", *Geotechnique*, **23**(4), pp. 551-563 (1973).