

بررسی اثر بیهی عرشه در پاسخ دینامیکی پل با در نظر گرفتن اندرکنش دینامیکی پل - قطار

مجید صادق آذر* (دانشیار)

مصعب رضا تجلی (کارشناس ارشد)
گروه مهندسی عمران، دانشگاه تهران

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۳۹۳ (۱۳۳۳)
دوری ۲ - ۳۰، شماره ۲/۴، ص. ۳۱-۳۳

در سال‌های اخیر توجه به دینامیک پل‌های راه‌آهن به عنوان یکی از مقدمات ضروری جهت احداث خطوط قطارهای سریع‌السیر افزایش یافته است. در این تحقیق، پاسخ دینامیکی پل راه‌آهن دوخطه یزدان از خط راه‌آهن قم - ساقه با بیهی‌های مختلف 0° ، 15° ، 30° و 45° و 60° درجه تحت بار قطار عبوری و تأثیر بیهی عرشه بر پاسخ دینامیکی سازه مورد بررسی قرار گرفته است. تحلیل دینامیکی بر پایه یک مدل سه‌بعدی از مجموعه پل و قطار و اندرکنش بین آن‌ها صورت گرفته است. با افزایش بیهی پل مقدار فرکانس مربوط به مد اول پل افزایش یافته و در حالت کلی پاسخ دینامیکی پل با افزایش بیهی کاهش می‌یابد. همچنین در سرعت‌های نزدیک به تشدید، با عبور هر گروه از محور چرخ‌ها از روی پل، مقادیر پاسخ‌ها به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

msadegha@ut.ac.ir
tajalli@alumni.ut.ac.ir

واژگان کلیدی: اندرکنش پل و قطار، پاسخ دینامیکی، قطار سریع‌السیر، پل بیهی دار.

۱. مقدمه

یکی از اهداف پژوهش‌های انجام‌شده در این زمینه، تعیین ضریب ضربه‌ی دینامیکی است. در پژوهشی در سال ۲۰۱۰، مطالعات پارامتری بر روی ۴ پل با دهانه‌های مختلف تحت سرعت‌های متفاوت انجام شد.^[۱] و نشان داده شد که در بسیاری از موارد مقادیر ضریب ضربه‌ی ارائه‌شده در آیین‌نامه‌های طراحی کمتر از مقادیر واقعی است. همچنین نتایج نشان داد که علاوه بر پارامتر دهانه‌ی پل، که در آیین‌نامه‌ها در نظر گرفته می‌شود، سرعت بار عبوری و نسبت فاصله‌ی چرخ‌ها به طول دهانه، ۲ فاکتور مهم در تعیین ضریب ضربه است.

در بسیاری از موارد پاسخ‌های دینامیکی منتج از حل تحلیلی مسئله با مقادیر اندازه‌گیری‌شده از آزمایش، مورد مقایسه قرار گرفته‌است. در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۲، با ارائه‌ی یک مدل سه‌بعدی از پل Sesia که در آن علاوه بر مسئله‌ی اندرکنش، اثر ناهمواری‌های خط و حرکت هانتینگ چرخ نیز در نظر گرفته شده بود، برخی پاسخ‌های دینامیکی حاصل از تحلیل با مقادیر اندازه‌گیری‌شده مورد مقایسه قرار گرفت و نشان داده شد که پل مورد بررسی در دو جهت قائم و جانبی دارای سختی کافی است و ضوابط لازم برای طراحی پل‌های خطوط سریع‌السیر را ارضاء می‌کند.^[۱۱]

در مطالعه‌ی دیگری پل دوخطه‌ی راه‌آهن با باکس بتنی پیش‌تنبه‌ی متشکل از ۲۸ دهانه‌ی ساده‌ی ۲۴ متری مورد مطالعه قرار گرفت، و پاسخ‌های دینامیکی پل و قطار از قبیل خیز، تغییرشکل‌های جانبی، شتاب‌های قائم و جانبی تیر و همچنین شتاب‌های واگن به‌دست‌آمده از مدل محاسباتی و مقادیر اندازه‌گیری‌شده مورد بررسی قرار گرفت.^[۱۲]

امروزه با افزایش سرعت و بار محوری قطارها، تحلیل دقیق‌تر و مطابق با واقعیت از رفتار پل‌های راه‌آهن تحت بار وسیله‌ی نقلیه ضروری به‌نظر می‌رسد. از مهم‌ترین پارامترهایی که در پاسخ دینامیکی پل‌های راه‌آهن مؤثرند، می‌توان به مشخصات بسامدی سازه‌ی پل‌ها (طول، جرم و سختی اعضاء آن)، مشخصات بسامدی وسائط نقلیه (جرم‌های معلق و ثابت چرخ و محور، سختی فنرها)، ضریب میرایی پل‌ها و وسائط نقلیه، سرعت وسائط نقلیه و ناهمواری‌های خط اشاره کرد. تا به امروز پژوهشگران مدل‌های متفاوتی را که هر کدام تأثیر برخی از پارامترها را در برمی‌گیرد، ارائه کرده‌اند. ساده‌ترین مدل مورد استفاده از وسیله‌ی نقلیه، مدل بار متحرک است.^[۱-۳]

اگرچه در این مدل اندرکنش سازه‌ی پل با جرم متحرک نادیده گرفته می‌شود، اما در مواردی که نسبت جرم متحرک به جرم پل بسیار اندک باشد، پاسخ‌ها از درجه‌ی صحت بیشتری برخوردارند. در مطالعات بعدی جهت در نظر گرفتن اثر لختی وسیله‌ی نقلیه از مدل جرم متحرک برای به‌دست‌آوردن پاسخ دینامیکی سازه تحت بار استفاده شده است.^[۴] اما در مدل مذکور نیز به‌خصوص در مواردی که وسیله‌ی نقلیه دارای سرعت بالاتری باشد و یا روسازی ناهمواری قابل توجهی داشته باشد، از صحت پاسخ‌ها کاسته شده است. برای رفع این معضل پژوهشگران از مدلی استفاده کرده‌اند که بتواند اندرکنش سازه‌ی پل با جرم متحرک را نیز در نظر بگیرد، که همان مدل جرم معلق است. با قراردادن یک فنر و میراگر بین جرم متحرک و سازه‌ی پل می‌توان به یک مدل نزدیک به واقعیت دست پیدا کرد.^[۵-۶]

* نویسنده مسؤل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۷/۳، اصلاحیه ۱۳۹۱/۱۱/۱۷، پذیرش: ۱۳۹۲/۴/۴

در سال ۲۰۰۴ نیز در یک مطالعه پژوهشی، یک نمونه آزمایشگاهی از پل بیه‌دار تحت بارگذاری استاتیکی و دینامیکی قرار داده شد و نتایج آزمایش با نتایج حاصل از مدل اجزاء محدود پل، که با نرم‌افزار SAP۲۰۰۰ ایجاد شده بود، از تطابق خوبی برخوردار بودند. همچنین یک مدل ساده‌ی متشکل از دو تیر به هم چسبیده جهت آنالیز دینامیکی پل بیه‌دار مورد استفاده قرار گرفت، که بسامدهای ۵ مود اول اختلاف بسیاری کمی با نتایج آزمایش داشتند.^[۱۲]

در این نوشتار، جهت بررسی تأثیر بیه‌ی عرشه‌ی پل در پاسخ دینامیکی سازه از قبیل جابجایی‌ها و شتاب، تحلیل دینامیکی بر پایه‌ی یک مدل سه‌بعدی از مجموعه‌ی پل و قطار و اندرکنش بین آن‌ها در نرم‌افزار آباکوس، که یکی از نرم‌افزارهای قدرتمند اجزاء محدود در حل مسائل دینامیکی است، صورت گرفته است.

۲. مدل‌سازی پل و قطار

۲.۱.۲. مدل پل

پل مورد بررسی در این پژوهش، پل یک‌دهانه‌ی ساده به طول ۲۲ متریکی از پل‌های در حال ساخت راه‌آهن دو خطه‌ی اتصالی قم - ساقه است. این پل جهت عبور راه‌آهن از روی خط لوله‌ی آب‌بزدان در نظر گرفته شده است. پل موردنظر دارای عرشه با سیستم دو عنصری متشکل از تیرهای طولی I شکل فازی و دال بتنی است. عرض عرشه برابر با ۱۲ متر و از ۱۱ تیر طولی به فواصل ۱٫۷ متر تشکیل شده است. جهت تعیین اثر بیه، پل در ۵ حالت مستقیم و با بیه‌های ۱۵، ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه مورد بررسی قرار گرفت. جدول ۱، مشخصات فیزیکی مجموعه‌ی پل و بالاست را نشان می‌دهد.

در این پژوهش، فقط مجموعه‌ی پل و بالاست مدل شده است و به دلیل آنکه بررسی اندرکنش‌های جزئی از قبیل نحوه‌ی تماس چرخ و ریل،^[۱۳] مورد توجه این پژوهش نبوده است و همچنین کم‌بودن جرم مجموعه‌ی ریل و تراورس نسبت به وزن پل و بالاست از اثرات آن صرف‌نظر شده است.

جهت مدل‌کردن پل و بالاست در نرم‌افزار آباکوس از المان‌های پوسته‌ی S۴R استفاده شده است. S۴R یک المان پوسته‌ی ۴ گره‌ی بی است که هر گره‌ی آن دارای ۳ درجه‌ی آزادی جابجایی و ۳ درجه‌ی آزادی چرخشی است. به دلیل کاهش نقاط انتگرال‌گیری در این المان، مدت زمان تحلیل کمتر شده و هم‌گرایی به‌صورت غیریکنواخت است. معادله‌ی حاکم بر رفتار دینامیکی پل (در حالت بدون میرایی) برای یک المان از رابطه‌ی ۱ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}_e \mathbf{u}_n = \mathbf{f}_n \quad (1)$$

که در آن، $\ddot{\mathbf{u}}_n$ و \mathbf{u}_n به‌ترتیب بردارهای شتاب و تغییرشکل را برای یک المان نشان می‌دهد. \mathbf{M}_e و \mathbf{K}_e نیز به‌ترتیب ماتریس جرم و سختی و \mathbf{f}_n بردار نیروهای گره‌ی

جدول ۱. مشخصات فیزیکی مجموعه پل و بالاست.

مشخصه‌ی هندسی یا فیزیکی	نشانه	واحد	مقدار
مدول کشسانی بتن	E_c	GPa	۲۳٫۲
ضریب پواسون بتن	ν_c	—	۰٫۲
مدول کشسانی فولاد	E_s	GPa	۲۱۰
ضریب پواسون فولاد	ν_s	—	۰٫۳
مدول کشسان بالاست	E_b	GPa	۲۸٫۲
ضریب پواسون بالاست	ν_b	—	۰٫۳

المان را نشان می‌دهد. بردار تغییرشکل برای یک المان برابر است با:

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} u_{n_1} & u_{n_2} & u_{n_3} & u_{n_4} \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

که در آن بردار تغییرشکل برای هر کدام از بردارهای جزء در گره‌ی m ام دارای ۶ درجه‌ی آزادی است، که مطابق رابطه‌ی ۳ است:

$$\mathbf{u}_{nn} = \begin{bmatrix} X_{nn} & Y_{nn} & Z_{nn} & R_{X_{nn}} & R_{Y_{nn}} & R_{Z_{nn}} \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

معادله‌ی دینامیکی حاکم بر کل پل با در نظر گرفتن اثر میرایی به شکل رابطه‌ی ۴ خواهد بود:

$$\mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{u}}_B + \mathbf{C}_B \dot{\mathbf{u}}_B + \mathbf{K}_B \mathbf{u}_B = \mathbf{f}_B \quad (4)$$

که در آن، $\ddot{\mathbf{u}}_B$ ، $\dot{\mathbf{u}}_B$ و \mathbf{u}_B به‌ترتیب بردارهای شتاب، سرعت و تغییرشکل پل نسبت به مختصات مرجع است. همچنین \mathbf{M}_B ، \mathbf{C}_B ، \mathbf{K}_B و \mathbf{f}_B به‌ترتیب ماتریس‌های کل جرم، میرایی، سختی و بردار نیرو را نشان می‌دهند.

طبق تئوری رابله، ماتریس میرایی می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی از ماتریس جرم و سختی بیان شود:

$$\mathbf{C}_B = \alpha \mathbf{M}_B + \beta \mathbf{K}_B \quad (5)$$

با داشتن ضریب میرایی ζ برابر با ۰٫۵٪، دو ثابت α و β می‌توانند از روابط ۶ به‌دست آیند:^[۱۵]

$$\alpha = \frac{2\xi\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad \beta = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_2} \quad (6)$$

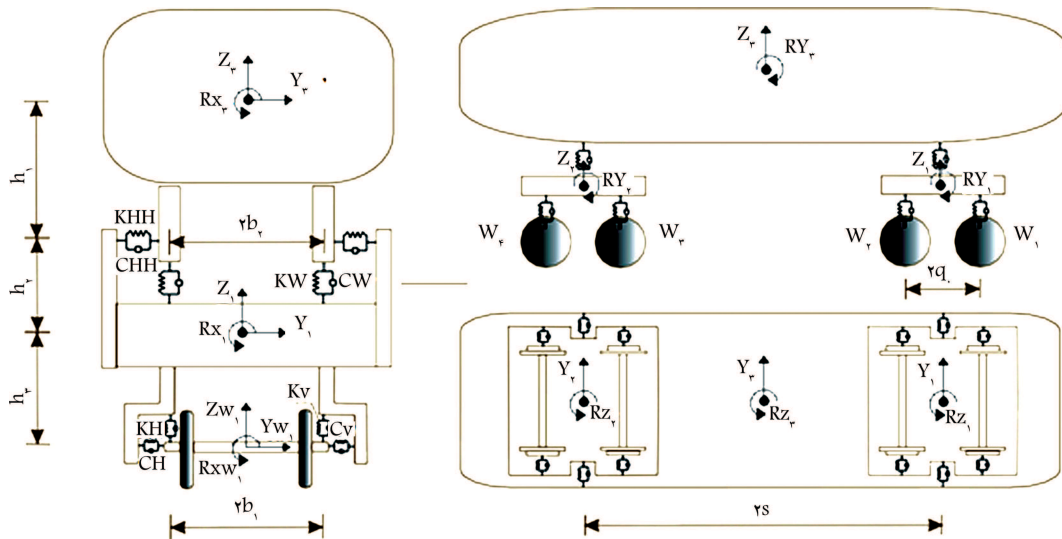
که در آن، ω_1 و ω_2 به‌ترتیب بسامد دورانی اول و دوم مدهای ویژه ارتعاشی را نشان می‌دهند.

۲.۲. مدل قطار

در این پژوهش، هر واگن یا لوکوموتیو با المان‌های صلب با ۲۷ درجه‌ی آزادی مدل شده است. البته اگر فقط درجات آزادی را در نظر بگیریم که مستقل هستند و توسط پل مقید نشده‌اند، این مقدار به ۱۵ درجه‌ی آزادی کاهش می‌یابد. با این روش می‌توان ترکیبی از لوکوموتیوها، واگن‌های مسافری و واگن‌های باری را به نحوی مناسب به‌وجود آورد، تا مدلی واقعی از قطار موردنظر به‌دست آید. یک مدل واگن از قطار شامل این اجزاء است:

هر محور با یک جرم متمرکز که دارای درجات آزادی جانبی $(Y_{Wi}, i = 1, \dots, 4)$ ، بانسینگ^۱ (Z_{Wi}) و رولینگ^۲ $(R_{X_{Wi}})$ است، مدل شده است (شکل ۱). دو بوژی و بدنه‌ی واگن هرکدام با صفحات صلب و جرم متمرکز و درجات آزادی جانبی (Y_1, Y_2, Y_3) ، عمودی (Z_1, Z_2, Z_3) ، پیچینگ^۳ $(R_{Y_1}, R_{Y_2}, R_{Y_3})$ ، رولینگ $(R_{X_1}, R_{X_2}, R_{X_3})$ و یاونگ^۴ $(R_{Z_1}, R_{Z_2}, R_{Z_3})$ مدل شده‌اند.

هر محور توسط سیستم تعلیق اولیه، متشکل از فنر و دمپر با سختی و میرایی C_H, K_H ، در جهت y (جانبی) و C_V, K_V ، در جهت z (قائم) به بوژی متصل شده است. همچنین بدنه‌ی واگن توسط سیستم تعلیق ثانویه با سختی و میرایی C_{HH}, K_{HH} و C_{VV}, K_{VV} ، به‌ترتیب در جهت y و z بر روی بوژی سوار شده است. سختی فنرها و میرایی دمپرها در هر دو سیستم تعلیق به‌ترتیب خطی و دارای چسبندگی است. مشخصات هندسی و فیزیکی قطار سریع‌السیر ETR۵۰۰ Y از پژوهشی در سال ۲۰۰۹ به‌دست آورده شده‌اند.^[۱۶]



شکل ۱. مدل کامل سه بعدی از قطار ETR500.

به دست می آیند:

$$K_{\lambda} = K_{\tau} =$$

$$\begin{bmatrix} \psi K_{HH} & \circ & K_A & \circ & \circ \\ \psi K_{VV} + \psi K_{VV} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & k_B & \circ & \circ \\ & & \psi K_{Vq}^{\dagger} & \circ & \circ \\ Sym. & & & \psi K_{Hq}^{\dagger} & \circ \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$K_{\tau} =$$

$$\begin{bmatrix} \psi K_{HH} & \circ & \psi K_{HH} h_{\lambda} & \circ & \circ \\ \psi K_{VV} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & k_C & \circ & \circ \\ & & \psi K_{VV} s^{\dagger} & \circ & \circ \\ Sym. & & & \psi K_{HH} s^{\dagger} & \circ \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$K_{(1,\tau)} = K_{(\tau,\tau)} =$$

$$\begin{bmatrix} -\psi K_{HH} & \circ & -\psi K_{HH} h_{\lambda} & \circ & -\psi K_{HHS} \\ -\psi K_{VV} & \circ & -\psi K_{VV} s^{\dagger} & \circ & \circ \\ & & k_D & \circ & \psi K_{HH} s h_{\tau} \\ & & & \circ & \circ \\ Sym. & & & \circ & \circ \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در آنها مؤلفه های سختی در ماتریس های مذکور عبارت اند از:

$$K_A = \psi K_{Hh_{\tau}} + \psi K_{HH} h_{\tau} \quad (13)$$

$$K_B = \psi K_{Vb_{\tau}^{\dagger}} + \psi K_{VV} b_{\lambda}^{\dagger} + \psi K_{Hh_{\tau}^{\dagger}} + \psi K_{HH} h_{\tau}^{\dagger} \quad (14)$$

$$K_C = \psi K_{HH} h_{\lambda}^{\dagger} + \psi K_{VV} b_{\lambda}^{\dagger} \quad (15)$$

$$K_D = \psi K_{HH} h_{\tau} h_{\lambda} - \psi K_{VV} b_{\lambda}^{\dagger} \quad (16)$$

۳.۲. معادلات حاکم بر حرکت قطار

در گذشته، مدل های گوناگونی برای تماس پل و وسیله نقلیه جهت در نظر گرفتن نیروهای تماسی ارائه شده است. به دلیل آنکه تماس بین چرخ های فولادی و ریل فولادی با سختی بالا رخ می دهد، لذا بسیاری از پژوهشگران تماس بین چرخ و ریل را کاملاً صلب در نظر گرفته اند.^[۱۷]

معادله های دینامیکی حاکم بر حرکت واگن را در حالت کلی می توان به شکل رابطه ی ۷ نوشت:

$$M_V \ddot{u}_V + C_V \dot{u}_V + K_V u_V = f_V \quad (7)$$

شامل نیروهای استاتیکی و نیروهای دینامیکی ناشی از اندرکنش پل و قطار است. که در آن M_V ، C_V ، K_V به ترتیب نشان دهنده ی ماتریس جرم، میرایی و سختی واگن است. بردارهای \ddot{u}_V ، \dot{u}_V و u_V به ترتیب نشان دهنده ی بردار شتاب، سرعت و جابجایی در معادله ی ۷ هستند. از آنجایی که درجات آزادی محورها در نقاط تماس با درجات آزادی پل مقید شده اند، می توان در معادله ی ۷، بردار جابجایی را فقط برای بوژی ها و بدنه ی واگن در نظر گرفت (معادله ی ۸):

$$u_V = \begin{bmatrix} Y_1 & Z_1 & R_{X1} & R_{Y1} & R_{Z1} & Y_2 & Z_2 & R_{X2} & R_{Y2} \\ Y_3 & Z_3 & R_{X3} & R_{Y3} & R_{Z3} \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

که در آن اندیس ۱ و ۲ به ترتیب نشان دهنده ی بوژی جلو و عقب و اندیس ۳ بدنه ی واگن را نشان می دهد.

با جای گذاری ماتریس جابجایی ذکر شده (رابطه ی ۸) در معادله ی کلی حرکت، ماتریس سختی مربوط به k_{λ} امین واگن به شکل رابطه ی ۹ خواهد بود:

$$K_{VK} = \begin{bmatrix} K_{\lambda} & \circ & K_{(1,\tau)} \\ & K_{\tau} & K_{(\tau,\tau)} \\ Sym. & & K_{\tau} \end{bmatrix} \quad (9)$$

که در آن، مقادیر K_{λ} ، K_{τ} ، $K_{(1,\tau)}$ و $K_{(\tau,\tau)}$ از رابطه های ۱۰ الی ۱۲

که در آن، ماتریس سختی و میرایی \mathbf{K}_F و \mathbf{C}_F ، در واقع نیروهای اندرکنش ناشی از سیستم تعلیق اولیه ی وارد بر واگن را به ترتیب بر حسب جابجایی \mathbf{u}_W و $\dot{\mathbf{u}}_W$ سرعت محور چرخ ها بیان می کنند (رابطه ی ۲۶):

$$\mathbf{K}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{F1} & \circ & \circ \\ & \mathbf{K}_{F2} & \circ \\ Sym. & & \circ \end{bmatrix} \quad (26)$$

که در آن، ماتریس های جزء \mathbf{K}_{F1} و \mathbf{K}_{F2} از رابطه ی ۲۷ به دست می آید:

$$\mathbf{K}_{F1} = \mathbf{K}_{F2} = \begin{bmatrix} 2K_H & \circ & \circ & 2K_H & \circ & \circ \\ \circ & 2K_V & \circ & \circ & 2K_V & \circ \\ 2K_V h_{r1} & \circ & 2K_V b_{r1}^T & 2K_V h_{r2} & \circ & 2K_V b_{r2}^T \\ \circ & -2K_V q_1 & \circ & 2K_V q_2 & \circ & \circ \\ -2K_V q_1 & \circ & \circ & -2K_V q_2 & \circ & \circ \end{bmatrix} \quad (27)$$

به همین ترتیب نیروهای اندرکنشی ناشی از میرایی وابسته به بردار سرعت $\dot{\mathbf{u}}_W$ محور است و ماتریس میرایی متناظر از رابطه ی ۲۸ به دست می آید:

$$\mathbf{C}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{F1} & \circ & \circ \\ & \mathbf{C}_{F2} & \circ \\ Sym. & & \circ \end{bmatrix} \quad (28)$$

که ماتریس های جزء در ماتریس ۲۸ از همان معادله ی ۲۷ ماتریس سختی با به کارگیری ضرایب میرایی C_V ، C_H ، به جای ضرایب سختی K_V و K_H ، به دست می آیند.

در حالت واقعی در هر لحظه هر محور از واگن در دو نقطه، که در واقع مکان چرخ هاست، با پل در تماس است. از این به بعد اندیس im برای نشان دادن نقطه ی تماس بین m امین چرخ از i امین محور واگن قطار به کار برده می شود، در حالی که m می تواند مقادیر ۱، ۲ را داشته باشد. بنابراین تغییر شکل های جانبی و قائم در محل اولین چرخ را به ترتیب با Y_{i1} و Z_{i1} و در محل چرخ دوم با Y_{i2} و Z_{i2} می توان نشان داد. بردار تغییر شکل نقاط تماس برای m امین چرخ به صورت رابطه ی ۲۹ در می آید:

$$\mathbf{u}_{im} = \begin{bmatrix} Y_{im} & Z_{im} \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

بنابراین بردار جابجایی نقاط در تماس با i امین محور را می توان به شکل رابطه ی ۳۰ نوشت:

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i1} & \mathbf{u}_{i2} \end{bmatrix}^T \quad (30)$$

که در آن، \mathbf{u}_{i1} و \mathbf{u}_{i2} همان مقادیر تعریف شده در معادله ی ۲۹ هستند. با این فرض ها، رابطه ی بین تغییر شکل های محور و نقاط پل در محل تماس با چرخ ها را می توان به شکل رابطه ی ۳۱ نوشت:

$$\mathbf{u}_{W_i} = \mathbf{D}_a \mathbf{u}_i \quad (31)$$

ماتریس میرایی مربوط به k امین واگن نیز مانند ماتریس سختی به دست می آید:

$$\mathbf{C}_{VK} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \circ & \mathbf{C}_{(1,2)} \\ & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_{(2,2)} \\ Sym. & & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

که ماتریس های جزء در ماتریس مذکور از همان معادله های ۱۰ الی ۱۶ ماتریس سختی با به کارگیری ضرایب میرایی C_V ، C_H ، C_{VV} و C_{HH} به جای ضرایب سختی K_V ، K_H ، K_{VV} و K_{HH} به دست می آیند. با فرض اینکه نیروهای اینرسی ناشی از شتاب جرم های متمرکز به صورت بار نقطه یی در همان نقاط وارد می شوند، ماتریس جرم به شکل یک ماتریس قطری در خواهد آمد. [۱۸] بنابراین ماتریس جرم واگن به شکل رابطه ی ۱۸ خواهد بود:

$$\mathbf{M}_V = \text{diag} \left[m_{v1} \quad m_{v1} \quad I_{X1} \quad I_{Y1} \quad I_{Z1} \quad m_{v2} \quad m_{v2} \quad I_{X2} \quad I_{Y2} \quad I_{Z2} \quad m_{v2} \quad m_{v2} \quad I_{X2} \quad I_{Y2} \quad I_{Z2} \right]^T \quad (18)$$

همچنین بردار جابجایی و ماتریس جرم مربوط به محورهای واگن برابر است با (رابطه های ۱۹ و ۲۰):

$$\mathbf{u}_{W_i} = \begin{bmatrix} Y_{W_i} & Z_{W_i} & R_{XW_i} \end{bmatrix}_{i=1, \dots, 2} \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_W = \begin{bmatrix} [M_{W_i}]_{i=1, \dots, 2} \end{bmatrix} = \text{diag} \left[\begin{bmatrix} m_{W_i} & m_{W_i} & I_{XW_i} \end{bmatrix}_{i=1, \dots, 2} \right] \quad (20)$$

بردار نیروی وارد بر واگن از دو مؤلفه ی اصلی تشکیل شده است: ۱. نیروی استاتیکی خارجی، ۲. نیروی دینامیکی:

$$\mathbf{f}_V = \mathbf{f}_V^{\text{sta}} + \mathbf{f}_V^{\text{dyn}} \quad (21)$$

نیروی استاتیکی $\mathbf{f}_V^{\text{sta}}$ نیروی ناشی از وزن واگن است، که در جهت قائم اثر می کند و مقدار آن ثابت است. نیروی استاتیکی ناشی از وزن را می توان به شکل رابطه ی ۲۲ نوشت:

$$\mathbf{f}_V^{\text{sta}} = g \mathbf{M}_V \begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \quad (22)$$

که در آن، g شتاب جاذبه را نشان می دهد.

نیروی دینامیکی $\mathbf{f}_V^{\text{dyn}}$ خود ناشی از دو مؤلفه است: یکی نیروی کشسان ($\mathbf{f}_K^{\text{dyn}}$) و دیگری نیروی میراگر ($\mathbf{f}_C^{\text{dyn}}$) ناشی از سختی و میرایی سیستم تعلیق اولیه:

$$\mathbf{f}_V^{\text{dyn}} = \mathbf{f}_K^{\text{dyn}} + \mathbf{f}_C^{\text{dyn}} \quad (23)$$

نیروهای دینامیکی مذکور که با زمان مقدار و جهت آن ها می تواند تغییر کند، از معادله های ۲۴ و ۲۵ محاسبه می شوند:

$$\mathbf{f}_K^{\text{dyn}} = \mathbf{K}_F \mathbf{u}_W \quad (24)$$

$$\mathbf{f}_C^{\text{dyn}} = \mathbf{C}_F \dot{\mathbf{u}}_W \quad (25)$$

که در آن ماتریس قید D_a به شکل رابطه‌ی ۳۲ تعریف می‌شود:

$$D_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & -\frac{1}{C_g} & 0 & \frac{1}{C_g} \end{bmatrix} \quad (32)$$

که در آن، C_g فاصله‌ی ریل‌های یک خط است.

اگر قطار دارای N_V واگن باشد، معادلات حرکت آن‌ها شبیه به معادله‌ی ۷ برای حرکت یک واگن است، و ماتریس‌ها و بردارهای قبلی به شکل آرایه‌های سه بعدی با ابعاد $15 \times 15 \times N_V$ و $15 \times 1 \times N_V$ در می‌آیند.

۴.۲. معادلات اندرکنش پل و قطار

محور \hat{a}_m از واگنی که با سرعت ثابت V از روی پل عبور می‌کند، در نقطه‌ی p_{im} به فاصله‌ی x_{im} و y_{im} از گره مرجع المان پل در تماس است. بنابراین، محور واگن با المان پل جفت می‌شود و اثرات اینرسی آن در معادله‌ی دینامیکی حاکم بر المان پل اثر می‌گذارد. علاوه بر این، درجات آزادی محور نیز به تغییرشکل‌های پل مقید می‌شود و اندرکنش بین پل و قطار ایجاد می‌شود. معادله‌ی حاکم بر المان پل را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۳۳ نوشت:

$$M_e \ddot{u}_n + C_e \dot{u}_n + K_e u_n = f_n + G^T(x_{im}, y_{im}) \tilde{f}_{im} \quad (33)$$

در سمت راست معادله‌ی ۳۳، نیروهای ناشی از چرخ قطار در نقطه‌ی تماس اضافه شده‌اند. در حالت کلی بردار \tilde{f}_{im} می‌تواند در هر ۶ جهت مؤلفه داشته باشد. اما در اینجا فرض می‌کنیم فقط نیروهای قائم و عرضی وجود داشته باشند، بنابراین بردار نیروهای ناشی از چرخ به شکل رابطه‌ی ۳۴ در خواهد آمد:

$$\tilde{f}_{im} = \begin{bmatrix} 0 & f_{im}^y & f_{im}^z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} 0 & f_{im}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (34)$$

که در آن، بردار f_{im} نیروهای عرضی و قائم را نشان می‌دهد و خود متشکل از این نیروهاست:

$$f_{im} = f_{im}^F + f_{im}^M + f_{im}^K + f_{im}^C \quad (35)$$

که در آن، f_{im}^F نیروی استاتیکی ناشی از وزن واگن را که در این نقطه به پل وارد می‌شود، نشان می‌دهد. f_{im}^M نیروی اینرسی ناشی از جرم محور، f_{im}^K و f_{im}^C به ترتیب نیروهای ناشی از سختی و میرایی سیستم تعلیق اولیه را نشان می‌دهند. نیروی استاتیکی در جهت قائم دارای مقدار و در جهت عرضی برابر با صفر است (رابطه‌ی ۳۶).

$$f_{im}^F = \begin{bmatrix} F_{im}^{Fy} & F_{im}^{Fz} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \sum f_{Vj}^{sta} \end{bmatrix}^T \quad (36)$$

و نیروی اینرسی ناشی از جرم محور نیز از معادله‌ی ۳۷ به دست می‌آید:

$$f_{im}^M = \begin{bmatrix} F_{im}^{My} & F_{im}^{Mz} \end{bmatrix}^T = -\bar{M}_{W_i} \ddot{u}_{im} = \\ -\text{diag} \left[\frac{1}{r} m W_i \quad \frac{1}{r} m W_i \right] \begin{bmatrix} \ddot{Y}_{im} & \ddot{Z}_{im} \end{bmatrix}^T \quad (37)$$

که در آن، \ddot{Y}_{im} و \ddot{Z}_{im} به ترتیب، شتاب جانبی و قائم پل را در نقطه‌ی تماس نشان می‌دهند. بردار شتاب \ddot{u}_{im} در واقع مشتق دوم بردار جابجایی پل u_{im} نسبت به

زمان در نقطه‌ی تماس p_{im} است. بردار جابجایی بر حسب مقادیر گره‌یی از رابطه‌ی ۳۸ به دست می‌آید:

$$f_{im}^M = \begin{bmatrix} F_{im}^{My} & F_{im}^{Mz} \end{bmatrix}^T = -\bar{M}_{W_i} \ddot{u}_{im} = \bar{G}_{im}(x_{im}, y_{im}) u_n \quad (38)$$

که در آن، \bar{G}_{im} ماتریسی است که فقط تابع شکل تغییر مکان جانبی و قائم را در بر دارد. در این حالت می‌توان نیروی اینرسی چرخ را به صورت رابطه‌ی ۳۹ باز نویسی کرد:

$$f_{im}^M = -\bar{M}_{W_i} \ddot{u}_{im} = -\bar{M}_{W_i} [2\bar{G}_{im} \ddot{u}_n + 2V\bar{G}'_{im} \dot{u}_n \\ \bar{G}_{im}(x_{im}, y_{im}) u_n] \quad (39)$$

دو نیروی ناشی از سختی و میرایی سیستم تعلیق متأثر از درجات آزادی بوزی و چرخ نیز از معادله‌های ۴۰ و ۴۱ به دست می‌آیند:

$$f_{im}^K = \begin{Bmatrix} F_{im}^{Ky} \\ F_{im}^{Kz} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} K_H(-Y_{W_i} + Y_j + h_r R_{Xj} + q_r R_{Zj}) \\ K_V(-Z_{W_i} - b_r R_{XW_i} + Z_j - q_r R_{Yj} + b_r R_{Xj}) \end{Bmatrix} \quad (40)$$

$$f_{im}^C = \begin{Bmatrix} F_{im}^{Cy} \\ F_{im}^{Cz} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} C_H(-\dot{Y}_{W_i} + \dot{Y}_j + h_r \dot{R}_{Xj} + q_r \dot{R}_{Zj}) \\ C_V(-\dot{Z}_{W_i} - b_r \dot{R}_{XW_i} + \dot{Z}_j - q_r \dot{R}_{Yj} + b_r \dot{R}_{Xj}) \end{Bmatrix} \quad (41)$$

با جایگزینی معادلات ۳۹ الی ۴۱ در معادله‌ی ۱، رابطه‌ی ۴۲ را خواهیم داشت:

$$M_e \ddot{u}_n + C_e \dot{u}_n + K_e u_n + G^T(x_{im}, y_{im}) f_{im}^M = f_n \\ + G^T(x_{im}, y_{im})(f_{im}^F + f_{im}^K + f_{im}^C) \quad (42)$$

اگر بخواهیم معادله را به همان فرم اصلی نشان دهیم، روابط ۴۳ الی ۴۷ را خواهیم داشت:

$$\bar{M}_e \ddot{u}_n + \bar{C}_e \dot{u}_n + \bar{K}_e u_n = \bar{f}_n \quad (43)$$

$$\bar{M}_e = M_e + G^T(x_{im}, y_{im}) \bar{M}_{W_i} \bar{G}_{im}(x_{im}, y_{im}) \quad (44)$$

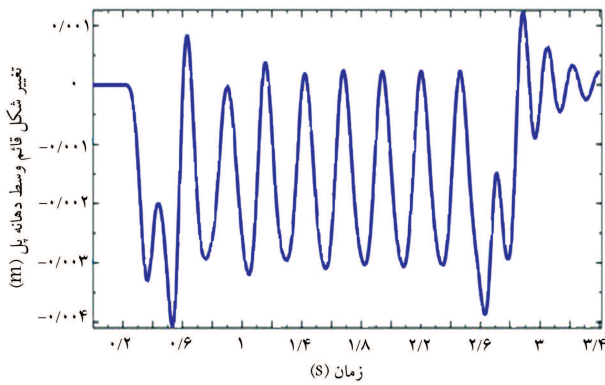
$$\bar{C}_e = C_e + 2V G^T(x_{im}, y_{im}) \bar{M}_{W_i} \bar{G}'_{im}(x_{im}, y_{im}) \quad (45)$$

$$\bar{K}_e = K_e + V^T G^T(x_{im}, y_{im}) \bar{M}_{W_i} \bar{G}''_{im}(x_{im}, y_{im}) \quad (46)$$

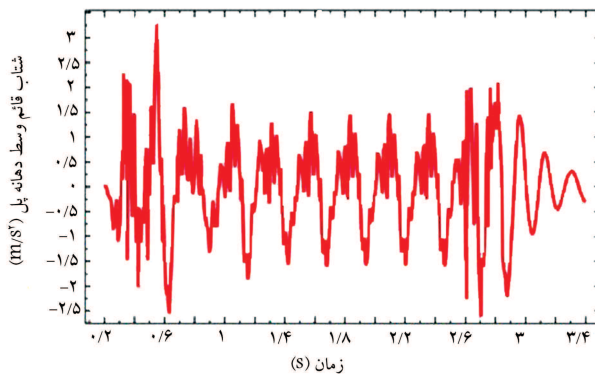
$$\bar{f}_e = f_n + G^T(x_{im}, y_{im})(f_{im}^F + f_{im}^K + f_{im}^C) \quad (47)$$

۳. صحت‌سنجی نتایج

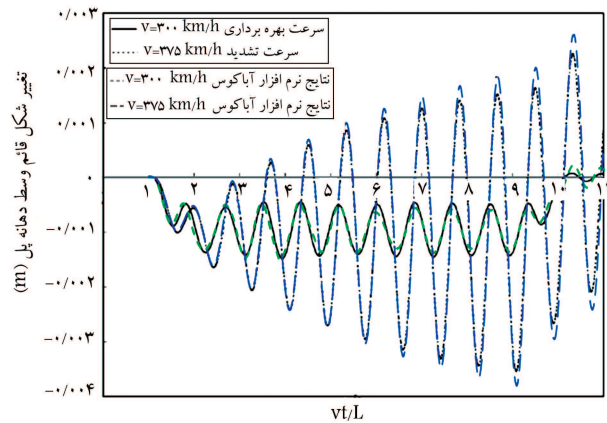
این مدل که از نوشتاری در سال ۲۰۰۳ انتخاب شده است،^[۱۵] و به بررسی قطار ۱۰ واگنه از نوع SKS سری ۳۰۰، که از روی پل چند قطعه‌یی (هر قطعه به طول



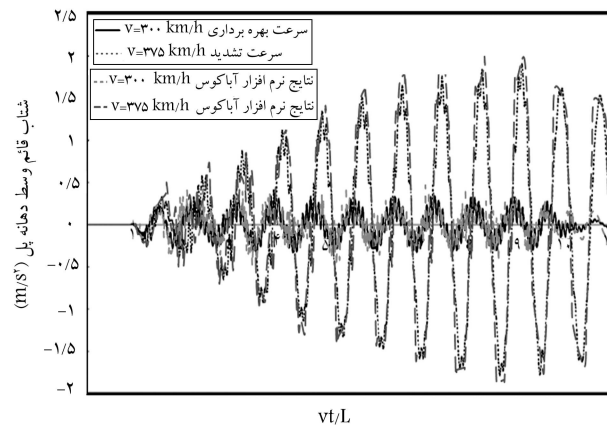
شکل ۴. تغییر شکل قائم وسط دهانه‌ی پل با بیهی ۶۰ درجه در سرعت ۱۰۰ متر بر ثانیه.



شکل ۵. شتاب قائم وسط دهانه‌ی پل با بیهی ۶۰ درجه در سرعت ۱۰۰ متر بر ثانیه.



شکل ۲. مقایسه‌ی تغییر شکل قائم وسط دهانه‌ی پل.



شکل ۳. مقایسه‌ی شتاب قائم وسط دهانه‌ی پل.

۵. تأثیر بیهی پل در پاسخ‌های دینامیکی پل

اولین تفاوت در رفتار دینامیکی بین پل‌های بیه‌دار و پل مستقیم مربوط به بسامد طبیعی پل هاست. مقادیر مربوط به اولین بسامد خمشی (f_1) برای پل مستقیم و پل‌های بیه‌دار در جدول ۲ نشان داده شده است. بنابراین، بیهی پل به‌طور قابل ملاحظه‌ای در پاسخ مودال پل تأثیر گذاشته است و مقدار بسامد را افزایش می‌دهد. یکی از پارامترهای مهم در طراحی پل‌هایی که طبق آیین‌نامه‌ی اروپا نیاز به آنالیز دینامیکی دارند،^[۱۹] ضریب تأثیر دینامیکی است؛ که به‌صورت نسبت بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی به بیشینه‌ی پاسخ استاتیکی پل در یک نقطه‌ی مشخص تعریف می‌شود. در شکل ۶، تغییر شکل‌های دینامیکی پل توسط ضریب تأثیر دینامیکی (DAF)^۵ تعریف شده است (رابطه‌ی ۴۸):

$$DAF_U = \frac{w_{dyn}^{max}(L/\psi)}{w_{sta}^{max}(L/\psi)} \quad (48)$$

که در آن، $w_{dyn}^{max}(L/\psi)$ بیشینه‌ی تغییر شکل قائم پل تحت بار دینامیکی و $w_{sta}^{max}(L/\psi)$ بیشینه‌ی تغییر شکل استاتیکی پل در وسط دهانه است. محور

جدول ۲. مقادیر بسامدهای مد اول خمشی.

بیهی پل (deg)	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰
f_1 (Hz)	۵٫۴۵	۵٫۴۷	۵٫۶۶	۵٫۷۵	۶٫۰۹

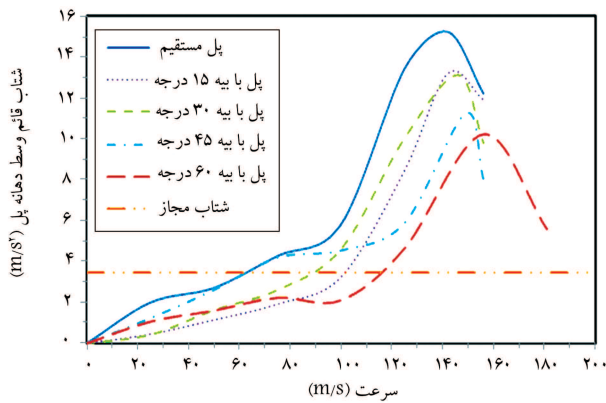
۳۰ (متر) عبور می‌کند، می‌پردازد. ابعاد و مشخصات واگن و مشخصات هندسی و فیزیکی ریل، بالاست و پل به‌طور کامل در نوشتار مذکور آمده است.

در نوشتار مورد بررسی، مقادیر تغییر شکل‌ها و شتاب قائم در وسط دهانه‌ی پل بر اساس مدل دوبعدی در سرعت‌های ۳۰۰ (km/h) و ۳۷۵ (km/h) به‌دست آورده شده است. شکل ۲، مقایسه‌ی تغییر شکل‌های قائم در وسط دهانه‌ی پل در سرعت ۳۰۰ (km/h) و ۳۷۵ (km/h) را با استفاده از مدل آباکوس نشان می‌دهد.

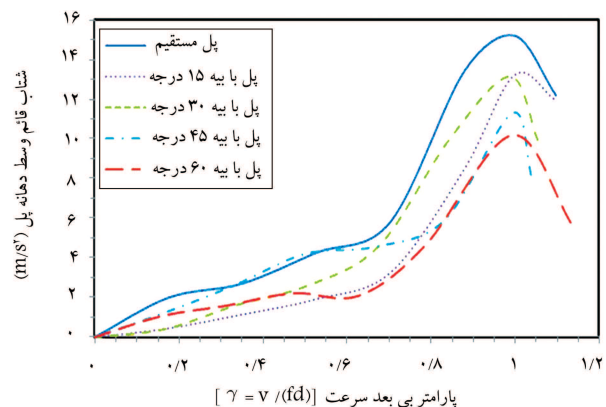
شکل ۳، شتاب قائم وسط دهانه‌ی پل را در سرعت‌های ۳۰۰ (km/h) و ۳۷۵ (km/h) بر حسب پارامتر بی‌بعد (vt/L)، از نوشتار مذکور و با استفاده از مدل آباکوس نشان می‌دهد.

۴. پاسخ دینامیکی پل

در این قسمت پاسخ‌های دینامیکی پل بر حسب زمان در بیشینه‌ی سرعت مجاز قطار (۱۰۰ متر بر ثانیه) نشان داده شده است. شکل‌های ۴ و ۵ به ترتیب، تغییر مکان و شتاب قائم وسط دهانه‌ی پل با بیهی ۶۰ درجه را بر حسب زمان نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بیشینه‌ی مقادیر جابجایی و شتاب هنگام عبور لوکوموتیو اول و آخر از روی پل رخ می‌دهد و همچنین پس از عبور تمامی چرخ‌ها از روی پل، این مقادیر میرا می‌شوند.



شکل ۸. بیشینه‌ی شتاب وسط دهانه برای پل‌ها با بیهی مختلف بر حسب سرعت.



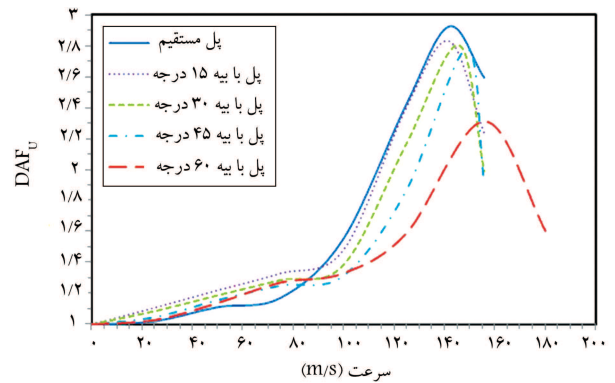
شکل ۹. بیشینه‌ی شتاب وسط دهانه برای پل‌ها با بیهی مختلف بر حسب پارامتر بی بعد ۶.

پیدا کند. در شکل ۹، به جای سرعت از پارامتر بی بعد سرعت $[\gamma = v/(fd)]$ در محور افقی استفاده شده است. در اینجا نیز روند کلی نمودارها شبیه به هم است.

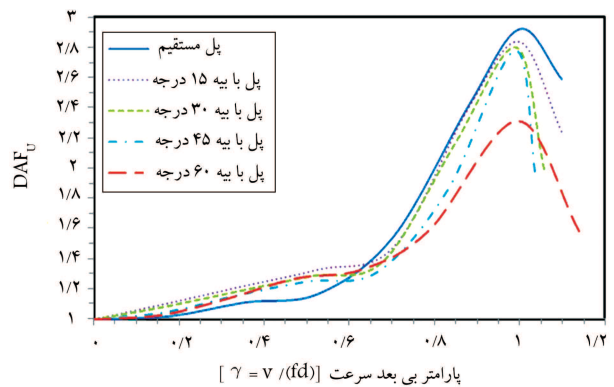
همان‌طور که در شکل‌های ۸ و ۹ مشاهده می‌شود، در سرعت‌های نزدیک به رزونانس، با افزایش بیهی پل، مقدار بیشینه‌ی شتاب قائم پل کاهش می‌یابد. در حالت کلی برای همه‌ی سرعت‌ها نمی‌توان ارتباط ثابتی بین مقدار بیهی و شتاب پل پیدا کرد، ولی مقدار شتاب تقریباً در تمامی پل‌های بیه‌دار نسبت به پل مستقیم کمتر است. همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، بیشینه‌ی شتاب مجاز پل طبق آیین‌نامه‌ی اروپا برابر با $g/35$ است. مشاهده می‌شود که برای پل‌های مستقیم و با بیهی ۳۰ و ۴۵ درجه تا بیشینه‌ی سرعت مجاز قطار (۱۰۰ متر بر ثانیه) این مقدار از شتاب مجاز تجاوز می‌کند، ولی برای پل‌های با بیهی ۱۵ و ۶۰ درجه در محدوده‌ی مجاز باقی می‌ماند.

۶. پدیده‌ی تشدید

با افزایش سرعت قطار به خصوص سرعت‌های بالاتر از ۲۰۰ کیلومتر بر ساعت، خطر وقوع پدیده‌ی تشدید افزایش می‌یابد. در سرعت‌های نزدیک به رزونانس، مقادیر اوج در پاسخ دینامیکی پل به شدت افزایش می‌یابد. بسامد بارگذاری قطار کمیته‌ی است که به فاصله‌ی بین گروه چرخ‌ها و سرعت قطار بستگی دارد و از رابطه‌ی ۴۹



شکل ۶. بیشینه‌ی ضریب تأثیر دینامیکی تغییرشکل برای پل‌ها با بیهی مختلف بر حسب سرعت.



شکل ۷. بیشینه‌ی ضریب تأثیر دینامیکی تغییرشکل برای پل‌ها با بیهی مختلف بر حسب پارامتر بی بعد ۶.

افقی در این نمودار، سرعت قطار بر حسب متر بر ثانیه را نشان می‌دهد. با توجه به پاسخ پل‌های مختلف تحت بار قطار مشخص می‌شود، که بیهی پل تفاوت قابل توجهی در نتایج ایجاد می‌کند. پایین بودن بسامد پل‌های با بیهی کمتر باعث می‌شود نمودار ضریب دینامیکی آنها یک جابجایی به سمت سرعت‌های پایین تر داشته باشد. اگر محور افقی به جای سرعت، نمایانگر پارامتر بی بعد سرعت $[\gamma = v/(fd)]$ باشد (شکل ۷)، مشاهده می‌شود که روند کلی نمودارها برای پل مستقیم و پل‌های بیه‌دار مشابه است، اگرچه مقادیر نمودارها می‌تواند کاملاً متفاوت باشد.

همان‌طور که در شکل‌های ۶ و ۷ مشاهده می‌شود، در حالت کلی هر چه بیهی پل افزایش یابد، مقادیر ضریب تأثیر دینامیکی تغییرشکل‌های پل کاهش می‌یابد؛ البته چنین رفتاری را می‌توان با افزایش بسامد پل‌های بیه‌دار بررسی کرد و سخت تر شدن پل را می‌توان انتظار داشت. البته در سرعت‌های کمتر از ۸۵ متر بر ثانیه، مقادیر مربوط به پل مستقیم کوچک تر از بقیه است.

همچنین مشاهده می‌شود، بیشینه‌ی ضریب تأثیر دینامیکی، برای پل مستقیم، که در سرعت تشدید رخ می‌دهد، برابر با $2/9$ است و تغییرشکل دینامیکی متناظر با آن $9/2$ میلی‌متر است، که از مقدار مجاز تغییرشکل پل $(L/80)$ که برابر با $27/5$ میلی‌متر است، کمتر است.

شکل ۸، شتاب قائم پل‌های مختلف در وسط دهانه (زیر چرخ‌ها) را بر حسب پارامتر سرعت نشان می‌دهد. همان اختلاف در بسامد مد اول خمشی باعث می‌شود که نمودار پل‌های با بیهی کمتر به سوی سرعت‌های پایین تر جابه‌جایی

۷. نتیجه گیری

در این نوشتار، با ارائه‌ی یک مدل سه‌بعدی از پل کامپوزیت در حال ساخت و قطار سریع‌السیر $ETR500Y$ ، پاسخ‌های دینامیکی پل و قطار مورد بررسی قرار گرفته است. حل مسئله با به‌کارگیری روش اجزاء محدود و مدل اندرکنشی چرم - پل با استفاده از نرم‌افزار آباکوس صورت گرفته است. یک پل چند قطعه‌یی با قطعات به طول ۳۰ متر تحت بار عبوری قطار ۱۰ واگنه‌ی SKS جهت صحت‌سنجی مدل اصلی مورد استفاده قرار گرفته است.

جهت تعیین تأثیر بیهی، پل ساده‌ی یک دهانه با عرشه‌ی کامپوزیت که متشکل از تیرهای فلزی I شکل و دال بتنی است، در ۵ حالت مستقیم و با بیهی‌های ۱۵، ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه مورد بررسی قرار گرفته است. تغییرشکل قائم در وسط دهانه‌ی پل با استفاده از ضریب تأثیر دینامیکی (DAFu) نشان داده شده است.

۱. در حالت کلی با افزایش سرعت قطار عبوری پاسخ‌های دینامیکی پل، اعم از تغییرشکل‌ها و شتاب قائم، افزایش می‌یابد.

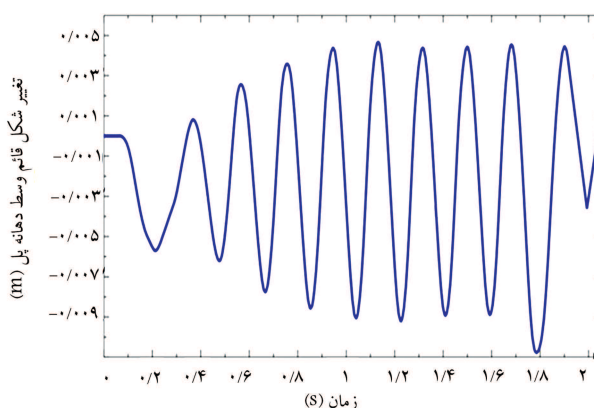
۲. در سرعت‌های غیر از سرعت تشدید بیشینه، مقادیر تغییرشکل و شتاب قائم پل، هنگام عبور واگن سنگین‌تر - لوکوموتیو اول و آخر - رخ می‌دهد. بنابراین در مواردی که سرعت طراحی، اختلاف کافی با سرعت بحرانی دارد، می‌توان تحلیل دینامیکی را فقط برای لوکوموتیو انجام داد و نیاز به مدل‌کردن همه‌ی واگن‌ها نیست.

۳. در سرعت‌های نزدیک به رزونانس، با عبور هر گروه از محور چرخ‌ها از روی پل، مقادیر پاسخ‌ها به‌طور قابل ملاحظه‌یی افزایش می‌یابد. از این رو در نظر گرفتن اثرات تشدید در طراحی پل‌های راه‌آهن خطوط سریع‌السیر ضروری است.

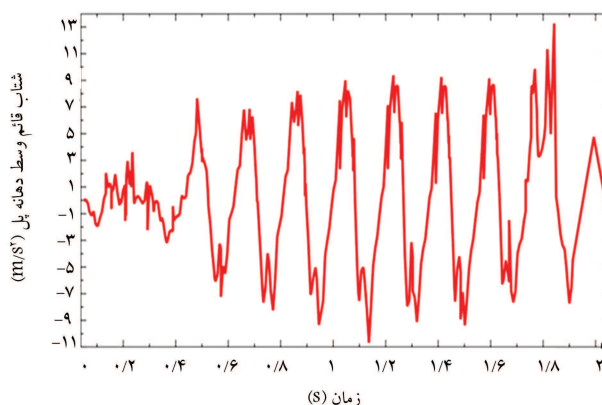
۴. با بررسی مقادیر مجاز شتاب و تغییرشکل قائم پل و همچنین مقادیر مجاز شتاب قائم واگن مشاهده شد که تغییرشکل‌های قائم پل در سرعت‌های نزدیک به تشدید هم در محدوده‌ی مجاز باقی می‌ماند، اما شتاب پل از مقادیر مجاز تجاوز می‌کند.

۵. با در نظر گرفتن پل با بیهی‌های مختلف مشاهده شد که بیهی پل می‌تواند تأثیر قابل ملاحظه‌یی در پاسخ‌های دینامیکی داشته باشد. هر چه بیهی پل بیشتر باشد، مقدار بسامد مربوط به مد اول پل افزایش می‌یابد. این افزایش بسامد باعث می‌شود تا مقادیر پاسخ‌ها بر حسب سرعت برای پل‌های با بیهی بیشتر به سمت سرعت‌های بالاتر شیفت پیدا کند.

۶. در حالت کلی پاسخ دینامیکی پل با افزایش بیهی کاهش می‌یابد.



شکل ۱۰. تغییرشکل قائم وسط دهانه‌ی پل با بیهی ۱۵ درجه در سرعت ۱۴۲ متر بر ثانیه.



شکل ۱۱. شتاب قائم وسط دهانه‌ی پل با بیهی ۱۵ درجه در سرعت ۱۴۲ متر بر ثانیه:

به دست می‌آید:

$$f = \frac{v}{D} \quad (49)$$

که در آن، v ، سرعت قطار عبوری و D فاصله‌ی بین گروه چرخ‌هاست. اگر بسامد بارگذاری قطار و بسامد خمشی پل به هم نزدیک شوند، پدیده‌ی تشدید رخ خواهد داد. در شکل‌های ۱۰ و ۱۱، جابجایی و شتاب قائم وسط دهانه‌ی پل برای پل با بیهی ۱۵ درجه در سرعت ۱۴۲ متر بر ثانیه که تشدید رخ می‌دهد، نشان داده شده است.

پانویس‌ها

1. Bouncing D.O.F
2. Rolling D.O.F
3. Pitching D.O.F
4. Yawing D.O.F
5. dynamic amplitude factor of deflection

منابع (References)

1. Yang, Y.B., Yau, J.D. and Hsu, L.C. "Vibration of simple beams due trains moving at high speeds", *Engineering Structures*, **19**(11), pp. 936-944 (1997).
2. Dugush, Y.A. and Eisenberger, M. "Vibrations of non-uniform continuous beams under moving loads", *Journal*

- of *Sound and Vibration*, **254**(5), pp. 911-926 (2002).
3. Yau, J.D. and Yang, Y.B. "Vertical accelerations of simple beams due to successive loads traveling at resonant speeds", *Journal of Sound and Vibration*, **289**(1-3), pp. 210-228 (2006).
 4. Lee, H.P. "Dynamic response of a beam with moving mass", *Journal of Sound and Vibration*, **191**(2), pp. 289-294 (1996).
 5. Foda, M.A. and Abduljabbar, Z. "A dynamic green function formulation for response of a beam structure to a moving mass", *Journal of Sound and Vibration*, **210**(3), pp. 295-306 (1998).
 6. Liu, K., De Roeck, G. and Lombaert, G. "The effect of dynamic train-bridge interaction on the bridge response during a train passage", *Journal of Sound and Vibration*, **325**(1-2) pp. 240-251 (2009).
 7. Song, M.K., Noh, H.C. and Choi, C.K. "A new three-dimensional finite element analysis model of high-speed train-bridge interactions", *Engineering Structures*, **25**(13), pp. 1611-1626 (2003).
 8. Lou, P. "Finite element analysis for train-track-bridge interaction system", *Arch Appl Mech*, **77**(10), pp. 707-728 (2007).
 9. Zhang, N., Xia, H. and Guo, H. "Vehicle-bridge interaction analysis under high-speed trains", *Journal of Sound and Vibration*, **309**(3-5), pp. 407-425 (2008).
 10. Hamidi, S.A. and Danshju, F. "Determination of impact factor for steel railway bridges considering simultaneous effects of vehicle speed and axle distance to span length ratio", *Engineering Structures*, **32**(5), pp. 1369-1376 (2010).
 11. Guo, W.W., Xia, H., De Roeck, G. and Liu, K. "Integral model for train-track-bridge interaction on the sesia viaduct: Dynamic simulation and critical assessment", *Computers and Structures*, **112-113**, pp. 205-216 (2012).
 12. Xia, H. and Zhang, N. "Dynamic analysis of railway bridge under high-speed trains", *Computers and Structures*, **83**(23-24), pp. 1891-1901 (2005).
 13. Meng, J., Ghasemi, H. and Lui, M. "Analytical and experimental study of a skewe bridge model", *Engineering Structures*, **26**(8), pp. 1127-1142 (2004).
 14. Antolin, P., Zhang, N., Goicolea, J., Xia, H., Astiz, M. and Oliva, J. "Consideration of nonlinear wheel-rail contact forces for dynamic vehicle-bridge interaction in high-speed railways", *Journal of Sound and Vibration*, **332**(5), pp. 1231-1251 (2013).
 15. Wu, Y.S. and Yang, Y.B. "Steady-state response and riding comfort of trains moving over a series of simply supported bridges", *Engineering Structures*, **25**(2), pp. 251-265 (2003).
 16. Liu, K., Reynders, E., De Roeck, G. and Lombaert, G. "Experimental and numerical analysis of a composite bridge for high-speed trains", *Journal of Sound and Vibration*, **320**(1-2), pp. 201-220 (2009).
 17. Xia, H., De Roeck, G., Zhang, H.R., and Zhang, N. "Dynamic analysis of train-bridge system and its application in steel girder reinforcement", *Computers and Structures*, **79**(21-22), pp. 1851-1860 (2001).
 18. Battini, J.M., *Lecture Notes in Structural Dynamics*, Royal Institute of Thechnology, Stockholm (2004).
 19. Cen, *Eurocode1: Action on Structures-Part 2: Traffic Loads on Bridges*, Ref.No.EN 1991-2 2003(E).