مهندسی عمران شریف، (زمستان ۱۳۹۳)
دوره‌ی ۲ - ۳۰، شماره‌ی ۴/۲، ص. ۴۳-۵۱

Original Article

مقایسه‌ی روش‌های انتگرال‌گیری صریح و ضمنی در شبیه‌سازی مرکب با استفاده از عملیات تکرارشونده‌ی عددی روی زیرسازه‌ها

ایمان نجارزادگان (کارشناس ارشد)
بخش مهندسی زلزله، دانشگاه اصفهان
فرهاد بهنام‌فر* (دانشیار)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

«آزمایش دینامیکی مرکب آنی» به‌عنوان یکی از شیوه‌های شبیه‌سازی مرکب، روشی نوین در مهندسی زلزله است، که امکان ارزیابی عملکرد لرزه‌یی سازه‌های بزرگ را فراهم می‌کند. در این روش با به‌کارگیری «تکنیک زیرسازه» سیستم سازه‌یی به دو یا چند زیرسازه‌ی رایانه‌یی و آزمایشگاهی تقسیم می‌شود. زیرسازه‌ی رایانه‌یی در رایانه و زیرسازه‌ی آزمایشگاهی در آزمایشگاه مدل‌سازی می‌شود. در تکنیکی دیگر، شبیه‌سازی مرکب می‌تواند با تقسیم یک سازه‌ی بزرگ به تعدادی زیرسازه، که همگی در رایانه به‌صورت موازی مورد پردازش قرار می‌گیرند، انجام شود. در این نوشتار، حالت اخیر از شبیه‌سازی برای یک قاب بتنی بررسی شده است. حالات مختلف حل عددی با استفاده از روش‌های مختلف انتگرال‌گیری انجام پذیرفته و نتایج به‌صورت نمودارهایی ارائه شده است. از بین چند فرض انجام‌شده برای حل تکراری معادلات حرکت زیرسازه‌ها، فرض حذف جملات ضمنی از روابط و استفاده از عملیات تکرارشونده‌ی عددی برای همگراکردن پاسخ‌ها به‌عنوان الگوریتم منجر به دقیق‌ترین نتایج برگزیده شده است.

واژگان کلیدی: تکنیک زیرسازه، شبیه‌سازی مرکب، آزمایش دینامیکی مرکب آنی، روش‌های انتگرال‌گیری عددی.

inajarzadegan@gmail.com
farhad@cc.iut.ac.ir

۱. مقدمه

پژوهش‌های آزمایشگاهی در حوزه‌ی دینامیک سازه و مهندسی زلزله معمولاً با استفاده از یکی از دو روش آزمایش شبه‌دینامیکی و آزمایش میز لرزان انجام می‌گیرد. آزمایش شبه‌دینامیکی عمدتاً برای سازه‌هایی مورد استفاده قرار می‌گیرد که چندین جرم مجزای بزرگ دارند. محرک‌ها نیروهای لازم برای ایجاد تغییرشکل‌های محاسبه‌شده از تحلیل رایانه‌یی هم‌زمان کل سازه را بر هر جرم به‌صورت استاتیکی وارد می‌کنند. از برش‌های حاصل در هر طبقه برای ادامه‌ی تحلیل رایانه‌یی استفاده می‌شود.

در آزمایش میز لرزان، بارهای وارده حالت دینامیکی‌داشته و در اعضای مدل نیروی اینرسی ایجاد می‌کنند. این روش عمدتاً برای آزمایش روی سازه‌هایی با مدل‌های کوچک‌مقیاس مناسب است. مدل، روی میز نصب می‌شود و میز توسط محرک‌ها تحریک می‌شود تا جنبش و حرکت پایه به مدل منتقل شود.

با وجود اینکه آزمایش‌های مذکور، اطلاعات با ارزشی را ارائه می‌کنند و موجب افزایش دانش از رفتار سازه‌ی تحت بارهای دینامیکی می‌شوند، محدودیت‌هایی را نیز در بر دارند. از آنجایی که آزمایش شبه‌دینامیکی در یک محدوده‌ی زمانی نسبتاً طولانی انجام می‌گیرد، اثرات دینامیکی بارها لحاظ نمی‌شود. این اثرات می‌تواند شامل تقویت دینامیکی دامنه‌ی ارتعاش ناشی از تشدید و یا تغییر در خصوصیات مصالح در کرنش‌های بالا باشد. به علاوه این روش برای سازه‌هایی که دارای اجزاء تابع سرعت هستند، قابل اجرا نیست. میزهای لرزان قادرند این نقیصه را برطرف کنند، اما معمولاً به علت محدودیت ابعاد میز نیازمند به استفاده از مدل‌های با مقیاس کوچک هستند. در این حالت مشکلات ناشی از برون‌یابی نتایج نمونه‌ی مقیاس‌شده قابل توجه است. از طرفی انعطاف‌پذیری و اینرسی میز نیز موجب بروز خطا در نتایج می‌شود.

به منظور برطرف‌کردن این مشکلات، روش خاصی مرکب از آزمایش و تحلیل دینامیکی پیشنهاد شده است. این روش در واقع تلفیقی از روش‌های آزمایش شبه‌دینامیکی و میز لرزان با استفاده از تکنیک زیرسازه است، با این تفاوت که اولاً اعمال بار در آن بسیار سریع انجام می‌گیرد و ثانیاً در آن علاوه بر محرک، میز ارتعاش نیز به‌کار می‌رود. در نتیجه، بارگذاری ماهیت دینامیکی پیدا می‌کند. به چنین شیوه‌ی آزمایش و تحلیل، روش دینامیکی مرکب آنی، یا به اختصار روش مرکب می‌گویند؛ که شامل ترکیبی از آزمایش فیزیکی و شبیه‌سازی رایانه‌یی است.[۱]

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۷/۱۵، اصلاحیه ۱۳۹۱/۱۲/۱۶، پذیرش ۱۳۹۲/۴/۱۹.

در سال ۱۹۹۴ طرح مدل کردن قسمت کوچکی از سازه به جای کل سازه (شیوه‌ی زیرسازه) پیشنهاد شد.[۲] سپس توسعه‌ی این شیوه‌ی منجر به ابداع روش مرکب شد.

در سال ۱۹۹۹، آزمایش مرکب موفقی بر روی یک سازه‌ی ۵ طبقه، مجهز به جداساز لرزه‌یی، انجام و آزمایش تا تخریب کامل نمونه ادامه داده شد.[۳] پس از آن نیز در سال ۲۰۰۱، مطالعاتی بر روی محدودیت‌های آزمایش مرکب انجام و سیستمی جدید برای آزمایش روی چنین نمونه‌هایی ارائه شد.[۴]

همچنین در سال ۲۰۰۴، یک پل ۶ دهانه به روش مرکب تحت آزمایش قرار گرفت.[۵] در این آزمایش عرشه‌ی پل و بزرگ‌ترین ستون آن به‌صورت عددی در رایانه و ۴ ستون دیگر آن به‌صورت فیزیکی و در ۴ آزمایشگاه مختلف مدل شد. شایان ذکر است در این آزمایش که با مشارکت ۵ دانشگاه[۱] و تحت نظارت دانشگاه برکلی صورت گرفت، گام‌های زمانی حل عددی در حدود ۱۰۰ میلی ثانیه بود.

در سال ۲۰۰۷، برخی از انواع روش‌های انتگرال‌گیری عددی مورد استفاده در شبیه‌سازی مرکب معرفی شد.[۶] و با انجام آزمایش روی سازه‌یی با دو درجه آزاد، مزایا و معایب این روش‌ها مورد بررسی قرار گرفت. البته این پژوهش‌ها بیشتر در زمینه‌ی حذف اثرات تأخیرهای زمانی ناشی از عملکرد محرک‌ها بود.

در سال ۲۰۱۰، نیز یک قاب خمشی فولادی ۴ دهانه‌ی دو طبقه، مجهز به میراگر الاستومر تحت آزمایش مرکب قرار گرفت.[۷] در این آزمایش میراگرهای الاستومر در آزمایشگاه و بقیه‌ی سازه در رایانه مدل شدند. به همین دلیل رفتار نمونه در آزمایشگاه به‌طور عینی مشاهده و ثبت شد و آسیب و تغییر رفتار به‌دست‌آمده به‌صورت عددی به مدل رایانه‌یی منتقل شد.

در این نوشتار، ضمن مطرح‌کردن یک مثال ساده‌ی عددی، حالتی خاص از شبیه‌سازی مرکب، که در آن زیرسازه‌ها فقط در رایانه تحلیل می‌شوند، بررسی و چند پیشنهاد برای حل مطرح شده است، که پس از مقایسه بین نتایج گزینه‌های ارائه‌شده، پیشنهاد حذف نیروهای مجهول برشی بین زیرسازه‌ها در هر گام از حل و سپس همگراکردن پاسخ‌ها از طریق عملیات تکرارشونده‌ی عددی به‌عنوان بهترین گزینه برای تحلیل انتخاب شده است.

۲. معادلات حاکم

معادلات حاکم بر یک مسئله‌ی شبیه‌سازی مرکب وابسته به نوع شبیه‌سازی است. انواع حالت‌های شبیه‌سازی مرکب شامل: تحلیل + تحلیل، تحلیل + آزمایش و آزمایش + آزمایش است. حالت تحلیل + تحلیل مربوط به شبیه‌سازی سیستم‌های سازه‌یی بزرگ و پیچیده است، در این حالت، برای سرعت‌بخشی به عملیات تحلیل، سازه‌ی اصلی به دو یا چند زیرسازه‌ی رایانه‌یی تقسیم می‌شود و هر یک به‌صورت موازی مورد پردازش عددی قرار می‌گیرد، بنابراین در هر گام از انتگرال‌گیری، پاسخ‌ها توسط یک الگوریتم کنترل‌کننده‌ی مؤثر با یکدیگر ترکیب و پاسخ کل سیستم ارائه می‌شود. این عملیات می‌تواند در یک ابررایانه‌یی چندین هسته‌یی نیز انجام پذیرد. حال اگر فرض شود یک سازه‌ی n درجه‌ی آزاد به دو زیرسازه‌ی n_1 و n_2 درجه‌ی آزاد تفکیک شود $(n = n_1 + n_2)$ و هر یک از این زیرسازه‌ها در رایانه تحلیل شوند، معادلات حرکت زیرسازه‌ها به شکل رابطه‌ی ۱ خواهد بود:

$$\begin{cases} M_1\ddot{U}_1 + C_1\dot{U}_1 + K_1U_1 = -M_1\ddot{u}_g + V \\ M_2\ddot{U}_2 + C_2\dot{U}_2 + K_2U_2 = -M_2\ddot{u}_g - V \end{cases} \qquad (1)$$

در معادله‌ی ۱، U و مشتقات اول و دوم آن به ترتیب بیانگر بردار تغییرمکان، سرعت و شتاب مدل عددی است. $\ddot{u}_g$، بردار شتاب زمین ناشی از زلزله را نشان می‌دهد. M، C و K نیز به ترتیب معرف ماتریس جرم، میرایی و سختی سازه است. اندیس ۱ مربوط به زیرسازه‌ی عددی n_1 درجه‌ی آزاد و اندیس ۲ مربوط به زیرسازه‌ی n_2 درجه‌ی آزاد است. V، بردار نیروی بازگرداننده‌ی موجود در فصل مشترک بین دو زیرسازه است. جزئیات بردار نیروی بازگرداننده در هر حالت بسته به شرایط مرزی موجود متفاوت است.

در حالت تحلیل + آزمایش، بخشی از سازه (زیرسازه‌ی فیزیکی) در آزمایشگاه و بقیه‌ی سازه در رایانه مدل می‌شود. ترجیحاً آن قسمت از سازه که رفتار غیرخطی دارد، در آزمایشگاه و بقیه‌ی سازه در رایانه مدل می‌شود. در هر گام زمانی، نیروهای تماسی موجود در فصل مشترک زیرسازه‌های عددی و فیزیکی بین نمونه‌ی فیزیکی و مدل تحلیلی منتقل می‌شود.[۱]

بالاخره، در حالت آزمایش + آزمایش سازه به دو یا چند زیرسازه‌ی فیزیکی تقسیم می‌شود، که هر یک در آزمایشگاه مورد آزمایش قرار گرفته و از طریق سیستم شبکه، مثلاً اینترنت، با یکدیگر در ارتباط‌اند. زیرسازه‌ها می‌توانند در یک آزمایشگاه واحد یا در چند آزمایشگاه مجزا (آزمایش توزیع‌شده از نظر جغرافیایی) تحت آزمایش قرار گیرند. در این صورت بهره‌مندی از تجهیزات آزمایشگاه‌های مختلف امکان‌پذیر می‌شود.[۸]

۳. روش‌های حل عددی در شبیه‌سازی مرکب

همان‌گونه که ذکر شد، در شبیه‌سازی‌های مرکب معادلات حرکت زیرسازه(های) عددی با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی حل می‌شود. به‌طورکلی، روش‌های انتگرال‌گیری عددی به دو دسته‌ی صریح و ضمنی تقسیم می‌شوند. در حالت صریح، معادلات حرکت گام فعلی با واکنش‌های معلوم برای محاسبه‌ی واکنش‌های گام بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ اما در حالت ضمنی معادله‌ی حرکت در گام بعدی نوشته می‌شود. این روش‌ها، معادله‌ی حرکت را در گام‌های زمانی متوالی حل می‌کنند و مقادیر تغییرمکان، سرعت و شتاب را در هر گام زمانی به‌دست می‌آورند. این عمل، که در قسمت شبیه‌سازی رایانه‌یی انجام می‌گیرد، یکی از چالش برانگیزترین مفاهیم در شبیه‌سازی مرکب است. از آنجایی که شبیه‌سازی مرکب با زیرسازه‌های فیزیکی سروکار دارد، استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری ضمنی تکرارشونده با مشکل مواجه است. در چنین حالتی باید از انجام عملیات تکرارشونده بر روی نمونه‌های فیزیکی اجتناب شود، زیرا اگر در ناحیه‌ی غیرخطی انجام گیرد، منجر به تغییرشکل‌های ماندگار خواهد شد. برآورد دقیق ماتریس سختی مماسی یا وتری نیز ممکن است به‌دلیل اشکالات ناشی از خطاهای اندازه‌گیری دشوار باشد. این محدودیت‌ها موجب شده است که روش‌های صریح حل عددی در شبیه‌سازی مرکب رایج شوند. روش‌های صریح از دقت بالایی برخوردارند و عملیات تکرارشونده در آنها وجود ندارد.

علی‌رغم سادگی اجرای روش‌های صریح در شبیه‌سازی مرکب، این روش‌ها پایدار شرطی هستند و بیشینه‌ی گام زمانی مجاز در آنها محدودیت دارد. محدودیت پایداری به بزرگ‌ترین بسامد طبیعی سیستم بستگی دارد؛ بنابراین روش‌های صریح کارایی خود را در ارتباط با سیستم‌های سخت که بسامد طبیعی بالایی دارند یا سیستم‌های با درجات آزادی زیاد از دست می‌دهند. از طرفی با کوچک‌شدن گام زمانی تعداد گام‌ها افزایش می‌یابد؛ این امر خود موجب افزایش پدیده‌ی جمع‌شدگی خطاها می‌شود.

انجام عملیات تکرارشونده‌ی عددی در رایانه مشکلی ایجاد نمی‌کند، ولی در شبیه‌سازی مرکب، رفتار وابسته به مسیر زیرسازه‌های آزمایشگاهی امکان اجرای مستقیم روش‌های انتگرال‌گیری تکرارشونده‌ی فیزیکی را ناممکن می‌سازد، زیرا عملیات تکرارشونده ممکن است منجر به خرابی غیرمنتظره زیرسازه‌ی آزمایشگاهی یا نادرستی میزان اتلاف انرژی آن شود. به علاوه، تضمین دائمی برای همگرایی حل تکرارشونده در مسائل غیرخطی وجود ندارد.[۶] یکی از پرکاربردترین روش‌ها در انتگرال‌گیری عددی، روش نیومارک است، که یک روش ضمنی است. این روش، که بر قاعده‌ی انتگرال‌گیری ذوزنقه‌یی مبتنی است، در سال ۱۹۵۹، ابداع شد.[۹] وی خانواده‌یی از روش‌های گام به گام زمانی را بر پایه‌ی روابط ۲ و ۳، در گام iاُم انتگرال‌گیری ایجاد کرد:

$$U_{i+1} = U_i + (\Delta t)\,\dot{U}_i + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2\right]\ddot{U}_i + \left[\beta\,(\Delta t)^2\right]\ddot{U}_{i+1} \qquad (2)$$

$$\dot{U}_{i+1} = \dot{U}_i + [(1-\gamma)\,(\Delta t)]\,\ddot{U}_i + (\gamma.\Delta t)\,\ddot{U}_{i+1} \qquad (3)$$

در این روابط، U، $\dot{U}$ و $\ddot{U}$ واکنش‌های سیستم هستند، که درگام iاُم معلوم‌اند و باید درگام $i+1$اُم محاسبه شوند. پارامترهای β و γ بیانگر نحوه‌ی تغییرات شتاب در طول گام زمانی Δt هستند و بر دقت و پایداری الگوریتم تأثیر می‌گذارند. در روش نیومارک برای رسیدن به دقت و پایداری مناسب $\gamma = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{6} \le \beta \le \frac{1}{4}$ پیشنهاد می‌شود. به هر حال روش نیومارک فقط هنگامی پایدار است که رابطه‌ی ۴ برقرار باشد:

$$\omega_n.\Delta t \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \qquad (4)$$

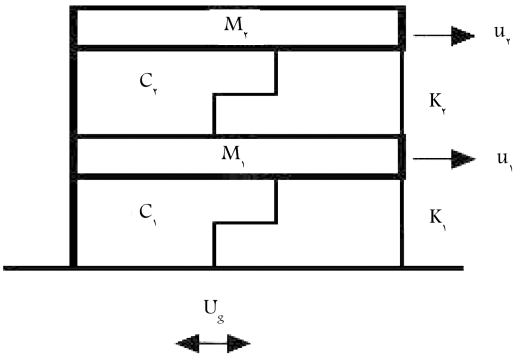
که در آن، ω_n بزرگ‌ترین بسامد طبیعی سیستم است. اگر $\beta = \frac{1}{4}$ و $\gamma = \frac{1}{2}$ باشد، فرمول‌ها به حالت شتاب ثابت که همواره پایدار است، و چنانچه $\beta = \frac{1}{6}$ و $\gamma = \frac{1}{2}$ باشد، به حالت شتاب خطی تبدیل می‌شود.

در روش تفاضل مرکزی، که یک روش صریح محسوب می‌شود، باز هم روابط ۲ و ۳ صادق است؛ با این تفاوت که $\beta = 0$ و $\gamma = \frac{1}{2}$. از رابطه‌ی ۴ نتیجه می‌شود که برای پایداری باید $\omega_n.\Delta t \le 2$. برای رسیدن به دقت مناسب در نتایج، معمولاً به گام زمانی در حدود یک دهم کوچک‌ترین زمان تناوب مهم سازه نیاز است. این مقدار معمولاً کوچک‌تر از مقدار ارائه‌شده در رابطه‌ی ۴ است.

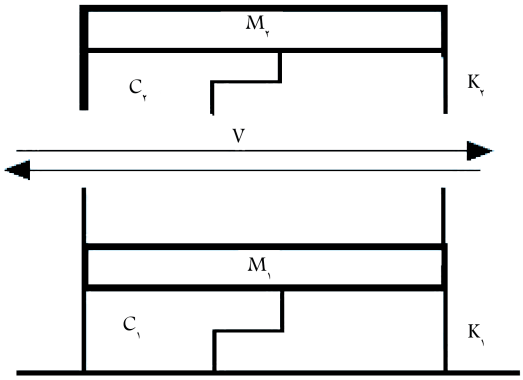
۴. الگوریتم‌های پیشنهادی برای تحلیل توأم زیرسازه‌ها

در شبیه‌سازی مرکب، چنانچه یکی از زیرسازه‌ها در آزمایشگاه مدل شود، مسئله‌ی نحوه‌ی اعمال شرایط مرزی مطرح می‌شود. به‌عبارت دیگر، باید نیروهای تماسی بین زیرسازه‌های عددی و فیزیکی یا تغییرشکل‌های مربوط با دقت بالا و به‌درستی به نمونه اعمال شود.

نبود فضا و امکانات آزمایشگاهی کافی، پژوهشگران را ناگزیر به اعمال ساده‌سازی‌هایی در شرایط مرزی کرده است. به‌طورکلی اعمال خمش و پیچش در آزمایشگاه دشوار است. در این صورت بهتر است به منظور حذف خمش و پیچش از شرایط مرزی، با فرض تشکیل نقطه‌ی عطف لنگر در وسط ستون‌ها، در این نقطه، تکیه‌گاه غلتکی در نظر گرفته شود و در همین نقطه با کاربرد محرک نیرو، برش بین طبقات اعمال شود.



شکل ۱. قاب برشی ۲ طبقه.



شکل ۲. زیرسازه‌های ۱ و ۲.

در این صورت چنانچه دو زیرسازه موجود باشند و زیرسازه‌ها از وسط ستون‌های یک طبقه‌ی مشخص تفکیک شوند و زیرسازه‌ی ۱ در آزمایشگاه مدل شود، باید در گام iاُم از حل، تغییرمکان‌های افقی u_1^i، به تراز طبقات زیرسازه‌ی ۱ و تغییرمکان‌های $u_1^i + \frac{u_2^i - u_1^i}{2}$، به گره‌های فصل مشترک دو زیرسازه اعمال شود. همچنین باید نیروهای محوری ستون‌های زیرسازه‌ی فوقانی به‌طور مناسبی به زیرسازه‌ی تحتانی اعمال شود.

در اینجا ساده‌ترین حالت ممکن، یعنی سازه‌ی دو درجه‌ی آزاد بررسی شده است؛ ولی با توجه به شکل ماتریسی روابط، این حالت قابل تعمیم به سیستم‌های چند درجه‌ی آزاد و سیستم‌های با تغییرشکل غیرکشسان نیز است. فرض شود یک قاب برشی دو طبقه مانند شکل ۱ موجود باشد.

چنانچه زیرسازه‌ها از وسط ستون‌های طبقه‌ی دوم تفکیک شوند، دو زیرسازه، مشابه شکل ۲ خواهیم داشت.

معادلات حرکت سازه‌ی یک‌پارچه‌ی شکل ۱ به‌صورت رابطه‌ی ۵ نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + \mathbf{C}_2 & -\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + \mathbf{K}_2 & -\mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_1\ddot{u}_g \\ -M_2\ddot{u}_g \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_1\ddot{u}_g \\ -M_2\ddot{u}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +V \\ -V \end{bmatrix} \qquad (5)$$

که در آن V برش طبقه است و از رابطه‌ی ۶ به‌دست می‌آید:

$$V = C_2\left(\dot{u}_2 - \dot{u}_1\right) + K_2\left(u_2 - u_1\right) \tag{۶}$$

با تغییر آرایش روابط، معادلات حرکت زیرسازه‌های تفکیک‌شده‌ی ۱ و ۲ در شکل ۲، در گام iاُم به‌صورت رابطه‌ی ۷ خواهد بود:

$$\begin{cases} M_1\ddot{u}_1^i + C_1\dot{u}_1^i + K_1u_1^i = -M_1\ddot{u}_g^i + V^i \\ M_2\ddot{u}_2^i = -M_2\ddot{u}_g^i - V^i \end{cases} \tag{۷}$$

همان‌طور که گفته شد، برای حل عددی می‌توان از روش‌های انتگرال‌گیری صریح یا ضمنی استفاده کرد. فرمولاسیون روش‌های صریح و ضمنی نیومارک در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده است.[۱۰]

اگر از روش صریح تفاضل مرکزی برای یافتن واکنش دینامیکی زیرسازه‌ها استفاده شود، با توجه به روابط ارائه‌شده در جدول ۱، تغییرمکان هر یک از درجات آزادی به‌صورت رابطه‌های ۸ و ۹ محاسبه می‌شود:

$$u_1^{i+1} = \frac{1}{a_0M_1 + a_1C_1}\begin{bmatrix} -M_1\ddot{u}_g^i + V^i - \left(K_1 - a_2M_1\right)u_1^i \\ -\left(a_0M_1 - a_1C_1\right)u_1^{i-1} \end{bmatrix} \tag{۸}$$

$$u_2^{i+1} = \frac{1}{a_0M_2 + a_1C_2}\begin{bmatrix} -M_2\ddot{u}_g^i + V^i - \left(K_2 - a_2M_2\right)u_2^i \\ -\left(a_0M_2 - a_1C_2\right)u_2^{i-1} \end{bmatrix} \tag{۹}$$

نیروی برشی بین دو طبقه، $V^i = C_2\left(\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i\right) + K_2\left(u_2^i - u_1^i\right)$، شامل دو بخش وابسته به تغییرمکان و وابسته به سرعت است. از طرفی با توجه به فرمول سرعت ارائه‌شده در جدول ۱، سرعت هرگام نیز به تغییرمکان گام بعد بستگی دارد، که مقداری است مجهول؛ بنابراین برای حل روابط ۸ و ۹، چهار حالت در نظر گرفته می‌شود:

الف) از کل نیروی برشی گام قبل؛ یعنی V^{i-1}، به جای V^i، استفاده شود:

$$u_1^{i+1} = \frac{1}{a_0M_1 + a_1C_1}\begin{bmatrix} -M_1\ddot{u}_g^i + V^{i-1} - \left(K_1 - a_2M_1\right)u_1^i \\ -\left(a_0M_1 - a_1C_1\right)u_1^{i-1} \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

$$u_2^{i+1} = \frac{1}{a_0M_2 + a_1C_2}\begin{bmatrix} -M_2\ddot{u}_g^i + V^{i-1} - \left(K_2 - a_2M_2\right)u_2^i \\ -\left(a_0M_2 - a_1C_2\right)u_2^{i-1} \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

ب) فقط بخش وابسته به سرعت برش طبقه، $C_2\left(\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i\right)$، از گام قبل برداشت شود:

$$u_1^{i+1} = \frac{1}{a_0M_1 + a_1C_1}\begin{bmatrix} -M_1\ddot{u}_g^i + C_2\left(\dot{u}_2^{i-1} - \dot{u}_1^{i-1}\right) + K_2\left(u_2^i - u_1^i\right) \\ -\left(K_1 - a_2M_1\right)u_1^i - \left(a_0M_1 - a_1C_1\right)u_1^{i-1} \end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

جدول ۱. فرمولاسیون روش صریح تفاضل مرکزی.

محاسبات اولیه:

۱-۱) $a_0 = \frac{1}{\Delta t^2} \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t} \quad a_2 = 2a_0 \quad a_3 = \frac{1}{a_2}$

۱-۲) $u^{-1} = u^0 - \Delta t\dot{u}^0 + a_3\ddot{u}^0$

۱-۳) $\hat{M} = a_0M + a_1C$

محاسبات تکراری:

۲-۱) $\hat{R}^i = R^i - \left(K - a_2M\right)u^i - \left(a_0M - a_1C\right)u^{i-1}$

۲-۲) Solve: $\hat{M}u^{i+1} = \hat{R}^i$

$$\begin{cases} \dot{u}^i = a_1\left(u^{i+1} - u^{i-1}\right) \\ \ddot{u}^i = a_0\left(u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}\right) \end{cases}$$

جدول ۲. فرمولاسیون حالت شتاب خطی روش ضمنی نیومارک.

محاسبات اولیه:

حالت شتاب خطی $\left(\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}\right)$

۱-۱) $a_0 = \frac{1}{\beta.\Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta.\Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\beta.\Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1$

$a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1 \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right) \quad a_6 = \Delta t\left(1 - \gamma\right) \quad a_7 = \gamma.\Delta t$

۱-۲) $\hat{K} = K + a_0M + a_1C$

محاسبات تکراری:

۲-۱) $\hat{R}^{i+1} = R^{i+1} + M\left(a_0u^i + a_2\dot{u}^i + a_3\ddot{u}^i\right) + C\left(a_1u^i + a_4\dot{u}^i + a_5\ddot{u}^i\right)$

۲-۲) Solve: $\hat{K}u^{i+1} = \hat{R}^{i+1}$

$$\begin{cases} \dot{u}^{i+1} = \dot{u}^i + a_6\ddot{u}^i + a_7\ddot{u}^{i+1} \\ \ddot{u}^{i+1} = a_0\left(u^{i+1} - u^i\right) - a_2\dot{u}^i - a_3\ddot{u}^i \end{cases}$$

$$u_2^{i+1} = \frac{1}{a_0 M_2 + a_1 C_2} \begin{bmatrix} -M_2 \ddot{u}_g^i + C_2\left(\dot{u}_2^{i-1} - \dot{u}_1^{i-1}\right) + K_2\left(u_2^i - u_1^i\right) \\ -\left(K_2 - a_2 M_2\right) u_2^i - \left(a_0 M_2 - a_1 C_2\right) u_2^{i-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ج) از بخش وابسته به سرعت، $C_2(\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i)$، صرف‌نظر شود:

$$u_1^{i+1} = \frac{1}{a_0 M_1 + a_1 C_1} \begin{bmatrix} -M_1 \ddot{u}_g^i + K_2\left(u_2^i - u_1^i\right) - \left(K_1 - a_2 M_1\right) u_1^i \\ -\left(a_0 M_1 - a_1 C_1\right) u_1^{i-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$u_2^{i+1} = \frac{1}{a_0 M_2 + a_1 C_2} \begin{bmatrix} -M_2 \ddot{u}_g^i + K_2\left(u_2^i - u_1^i\right) - \left(K_2 - a_2 M_2\right) u_2^i \\ -\left(a_0 M_2 - a_1 C_2\right) u_2^{i-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

د) از عبارت $C_2(\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i)$، صرف‌نظر شود (مشابه روابط ۱۴ و ۱۵)، با این شرط که برش‌های بین طبقات طی عملیات تکرارشونده همگرا شوند.

حال چنانچه از روش ضمنی نیومارک برای محاسبه‌ی واکنش دینامیکی زیرسازه‌ها استفاده شود، با توجه به جدول ۲ خواهیم داشت:

$$u_1^{i+1} = \frac{1}{K_1 + a_0 M_1 + a_1 C_1} \begin{bmatrix} -M_1 \ddot{u}_g^{i+1} + V^{i+1} + M_1\left(a_0 u_1^i + a_2 \dot{u}_1^i + a_3 \ddot{u}_1^i\right) \\ +C_1\left(a_1 u_1^i + a_4 \dot{u}_1^i + a_5 \ddot{u}_1^i\right) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$u_2^{i+1} = \frac{1}{K_2 + a_0 M_2 + a_1 C_2} \begin{bmatrix} -M_2 \ddot{u}_g^{i+1} + V^{i+1} + M_2\left(a_0 u_2^i + a_2 \dot{u}_2^i + a_3 \ddot{u}_2^i\right) \\ +C_2\left(a_1 u_2^i + a_4 \dot{u}_2^i + a_5 \ddot{u}_2^i\right) \end{bmatrix} \quad (17)$$

در این روابط، تمامی پارامترها مربوط به گام iاُم هستند، به جز نیروی برشی بین دو طبقه‌ی V^{i+1}، که مربوط به گام $i+1$اُم و مجهول است؛ بنابراین برای حل روابط ۱۶ و ۱۷، این سه حالت در نظر گرفته می‌شود:

هـ) از نیروی برشی گام قبل؛ یعنی V^i، به جای V^{i+1}، استفاده شود (روابط ۱۸ و ۱۹):

$$u_1^{i+1} = \frac{1}{K_1 + a_0 M_1 + a_1 C_1} \begin{bmatrix} -M_1 \ddot{u}_g^{i+1} + V^i + M_1\left(a_0 u_1^i + a_2 \dot{u}_1^i + a_3 \ddot{u}_1^i\right) \\ +C_1\left(a_1 u_1^i + a_4 \dot{u}_1^i + a_5 \ddot{u}_1^i\right) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$u_2^{i+1} = \frac{1}{K_2 + a_0 M_2 + a_1 C_2} \begin{bmatrix} -M_2 \ddot{u}_g^{i+1} + V^i + M_2\left(a_0 u_2^i + a_2 \dot{u}_2^i + a_3 \ddot{u}_2^i\right) \\ +C_2\left(a_1 u_2^i + a_4 \dot{u}_2^i + a_5 \ddot{u}_2^i\right) \end{bmatrix} \quad (19)$$

و) از کل برش طبقه صرف‌نظر شود (روابط ۲۰ و ۲۱):

$$u_1^{i+1} = \frac{1}{K_1 + a_0 M_1 + a_1 C_1} \begin{bmatrix} -M_1 \ddot{u}_g^{i+1} + M_1\left(a_0 u_1^i + a_2 \dot{u}_1^i + a_3 \ddot{u}_1^i\right) \\ +C_1\left(a_1 u_1^i + a_4 \dot{u}_1^i + a_5 \ddot{u}_1^i\right) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$u_2^{i+1} = \frac{1}{K_2 + a_0 M_2 + a_1 C_2} \begin{bmatrix} -M_2 \ddot{u}_g^{i+1} + M_2\left(a_0 u_2^i + a_2 \dot{u}_2^i + a_3 \ddot{u}_2^i\right) \\ +C_2\left(a_1 u_2^i + a_4 \dot{u}_2^i + a_5 \ddot{u}_2^i\right) \end{bmatrix} \quad (21)$$

ز) از عبارت V^{i+1} صرف‌نظر شود، با این شرط که برش طبقات طی عملیات تکرارشونده همگرا شوند.

۵. تحلیل عددی

یک قاب برشی بتنی دو طبقه نظیر شکل ۲، برای حل عددی در نظر گرفته می‌شود. مقطع ستون‌های این قاب، دایره‌یی به قطر ۴۰ cm است. نمودارهای تاریخچه‌ی زمانی تغییرمکان هر یک از دو درجه‌ی آزادی قاب، به روش‌های صریح و ضمنی محاسبه می‌شود. با توجه به محدودیت‌های موجود، هر دو زیرسازه به‌صورت تحلیلی در نظر گرفته می‌شوند. فرض می‌شود سازه از حال سکون تحت مؤلفه‌ی افقی شتاب زمین‌لرزه‌ی سان فرناندو[2] تحریک شده باشد.[11] وزن هر طبق ۱۵ ton و ضریب میرایی هر دو درجه‌ی آزادی، C_1 و C_2 در شکل ۲، یکسان و برابر با ۲۳٫۳۸ kgf.sec/cm است.

سختی جانبی هر یک از ستون‌های سازه از رابطه‌ی $K = \frac{12EI_e}{h^3}$ به‌دست می‌آید، که در آن E، I_e و h عبارت‌اند از: ضریب ارتجاعی، ممان اینرسی مؤثر و ارتفاع ستون‌ها. ممان اینرسی مؤثر هر ستون به علت ترک‌خوردگی، مساوی ۷۰٪ ممان اینرسی کل آن فرض می‌شود. در نتیجه رابطه‌ی ۲۲ را خواهیم داشت:

$$K = 0.7\frac{2 * 12EI_e}{h^3} = 0.7\frac{24 * 2.3e5 * 87965}{(300)^3} = 17984\frac{\text{kgf}}{\text{cm}} \quad (22)$$

به این ترتیب ماتریس‌های جرم (M)، میرایی (C) و سختی کل سازه (K) عبارت خواهند بود از (روابط ۲۳ الی ۲۵):

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.3 & 0 \\ 0 & 15.3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46.76 & -23.38 \\ -23.38 & 23.38 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35968 & -17984 \\ -17984 & 17984 \end{bmatrix} \quad (25)$$

۱.۵. روش صریح

۱.۱.۵. محاسبات اولیه

تحلیل طبق جدول ۱ انجام می‌گیرد. گام‌های زمانی شتاب ثبت‌شده ۰٫۰۰۵ ثانیه

است، بنابراین:

$$1-1)\ a_0 = \frac{1}{\Delta t^2} = 4e4$$
$$a_1 = \frac{1}{2\Delta t} = 100$$
$$a_2 = 2a_0 = 8e4$$
$$a_3 = \frac{1}{a_2} = 1/25e-5$$

مقادیر سرعت و تغییرمکان اولیه صفر فرض می‌شود. شتاب اولیه نیز با نوشتن معادله‌ی حرکت درگام صفر به این صورت به‌دست می‌آید:

$$\ddot{u}_1^0 = \ddot{u}_2^0 = -\ddot{u}_g^0 = 3/08\frac{cm}{\sec^2}$$
$$1-2)\ u^{-1} = u^0 - \Delta t\dot{u}^0 + a_3\ddot{u}^0$$
$$\Rightarrow u^{-1} = 3/85e-5cm$$
$$1-3)\ \hat{M} = a_0 M + a_1 C$$
$$\begin{cases}\hat{M}_1 = (4e4)(15/3) + (100)(23/38) = 614,338\\ \hat{M}_2 = (4e4)(15/3) = 612,000\end{cases}$$

اندیس‌های ۱ و ۲ در $\hat{M}$ شماره‌ی زیرسازه را نشان می‌دهند.

۲.۱.۵. محاسبات تکراری

درجه‌ی آزادی اول:

$$2-1)\ \hat{R}_1^i = R_1^i - (K_1 - a_2M_1)\,u_1^i - (a_0M_1 - a_1C_1)\,u_1^{i-1}$$
$$\hat{R}_1^i = -(15/3)\ddot{u}_g^i + V^i - (1,206,016)u_1^i - (609,662)u_1^{i-1}$$
$$2-2)\ \text{Solve}: \hat{M}_1u_1^{i+1} = \hat{R}_1^i$$
$$u_1^{i+1} = \frac{1}{614,338}\left[-15/3\ddot{u}_g^i + V^i + (1,206,016)u_1^i - (609,662)u_1^{i-1}\right]$$

درجه‌ی آزادی دوم:

$$2-1)\ \hat{R}_2^i = R_2^i - (K_2 - a_2M_2)\,u_2^i - (a_0M_2 - a_1C_2)\,u_2^{i-1}$$
$$\hat{R}_2^i = -(15/3)\ddot{u}_g^i + V^i - (1,224,000)u_2^i - (612,000)u_2^{i-1}$$
$$2-2)\ \text{Solve}: \hat{M}_2u_2^{i+1} = \hat{R}_2^i$$
$$u_2^{i+1} = \frac{1}{612,000}\left[-15/3\ddot{u}_g^i + V^i + (1,224,000)u_2^i - (612,000)u_2^{i-1}\right]$$

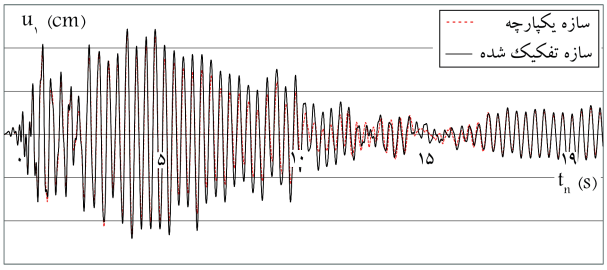
برنامه‌ی رایانه‌یی مربوط به ۴ حالت ذکرشده در بند ۴ (روابط ۱۰ تا ۱۵ و بند (د)) برای حل روابط ۸ و ۹، در نرم‌افزار MATLAB نوشته شد و تاریخچه‌ی زمانی تغییرمکان هر دو درجه‌ی آزادی ناشی از حالات فوق به دست آمد. سپس این نمودارها با نمودارهای به‌دست‌آمده از حل سازه‌ی یک‌پارچه به روش صریح (رابطه‌ی ۵) مقایسه شد.

پاسخ حاصل از روابط ۱۰ الی ۱۳ واگرا می‌شود. در روابط ۱۴ و ۱۵ به علت حذف نیروهای وابسته به سرعت، پاسخ‌ها با حالت یک‌پارچه تا حدی تفاوت دارند (شکل ۳)، ولی در حالت (د) با بیشینه‌ی ۱۷٪ خطا، انطباق خوبی بین نتایج حالت سازه‌ی یک‌پارچه و سازه‌ی تفکیک‌شده مشاهده می‌شود (شکل ۴).

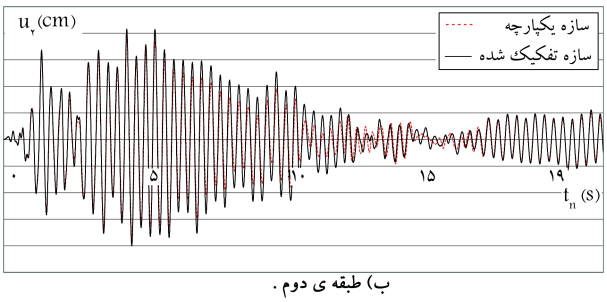
۲.۵. روش ضمنی

۱.۲.۵. محاسبات اولیه

دراین حالت تحلیل طبق جدول ۲ انجام می‌گیرد. با توجه به اینکه $\Delta t = 0/005\,\sec$،

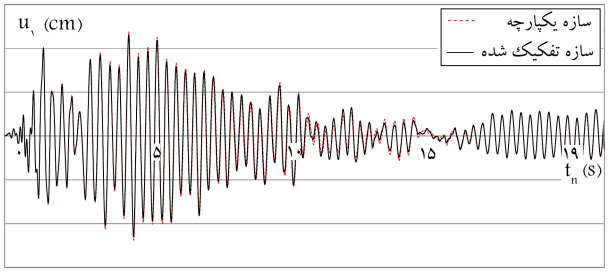


الف) طبقه ی اول؛

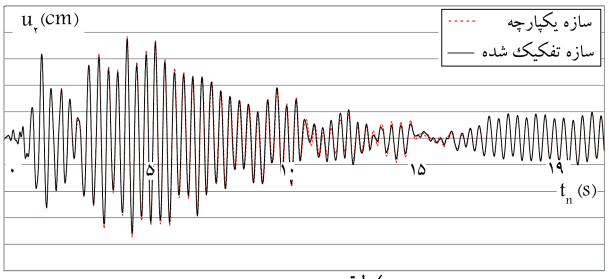


ب) طبقه ی دوم .

شکل ۳. مقایسه‌ی تاریخچه‌ی زمانی تغییرمکان طبقات در حالت سازه‌ی یک‌پارچه و سازه‌ی تفکیک‌شده طبق روابط ۱۴ و ۱۵.



الف) طبقه ی اول؛



ب) طبقه ی دوم .

شکل ۴. مقایسه‌ی تاریخچه‌ی زمانی تغییرمکان طبقات در حالت سازه‌ی یک‌پارچه و سازه‌ی تفکیک‌شده طبق بند (د).

نتیجه می‌شود:

$$1-1)\quad a_0 = \frac{1}{\beta.\Delta t^2} = 2{,}4e5$$

$$a_1 = \frac{\gamma}{\beta.\Delta t} = 600$$

$$a_2 = \frac{1}{\beta.\Delta t} = 1200$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 = 2$$

$$a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1 = 2$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right) = 2{,}5e-3$$

$$a_6 = \Delta t\,(1-\gamma) = 2{,}5e-3$$

$$a_7 = \gamma.\Delta t = 2{,}5e-3$$

$$1-2)\quad \hat{K} = K + a_0 M + a_1 C \Rightarrow \begin{cases} \hat{K}_1 = 3{,}704{,}012\,\frac{kgf}{cm} \\ \hat{K}_2 = 3{,}672{,}000\,\frac{kgf}{cm} \end{cases}$$

که در آن اندیس ۱ و ۲ در $\hat{K}$ مربوط به شماره‌ی زیرسازه‌هاست.

۲.۲.۵. محاسبات تکراری

درجه‌ی آزادی اول:

$$2-1)\quad \hat{R}_1^{i+1} = R_1^{i+1} + M_1\left(a_0 u_1^i + a_2 \dot{u}_1^i + a_3 \ddot{u}_1^i\right) + C_1\left(a_1 u_1^i + a_4 \dot{u}_1^i + a_5 \ddot{u}_1^i\right)$$

$$\hat{R}_1^{i+1} = -15{,}3\ddot{u}_g^{i+1} + V^{i+1} + 15{,}3\left(2{,}4e5 u_1^i + 1200\dot{u}_1^i + 2\ddot{u}_1^i\right) + 23{,}38\left(600 u_1^i + 2\dot{u}_1^i + 2{,}5e-3\ddot{u}_1^i\right)$$

$$2-2)\quad \text{Solve}: \hat{K}_1 u_1^{i+1} = \hat{R}_1^{i+1}$$

$$u_1^{i+1} = \frac{1}{3{,}704{,}012}\begin{bmatrix} -15{,}3\ddot{u}_g^{i+1} + V^{i+1} \\ +15{,}3\left(2{,}4e5 u_1^i + 1200\dot{u}_1^i + 2\ddot{u}_1^i\right) \\ +23{,}38\left(600 u_1^i + 2\dot{u}_1^i + 2{,}5e-3\ddot{u}_1^i\right) \end{bmatrix}$$

درجه‌ی آزادی دوم:

$$2-1)\quad \hat{R}_2^{i+1} = R_2^{i+1} + M_2\left(a_0 u_2^i + a_2 \dot{u}_2^i + a_3 \ddot{u}_2^i\right) + C_2\left(a_1 u_2^i + a_4 \dot{u}_2^i + a_5 \ddot{u}_2^i\right)$$

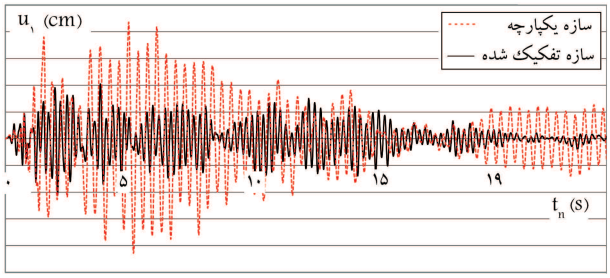
$$\hat{R}_2^{i+1} = -15{,}3\ddot{u}_g^{i+1} + V^{i+1} + 15{,}3\left(2{,}4e5 u_2^i + 1200\dot{u}_2^i + 2\ddot{u}_2^i\right)$$

$$2-2)\quad \text{Solve}: \hat{K}_2 u_2^{i+1} = \hat{R}_2^{i+1}$$

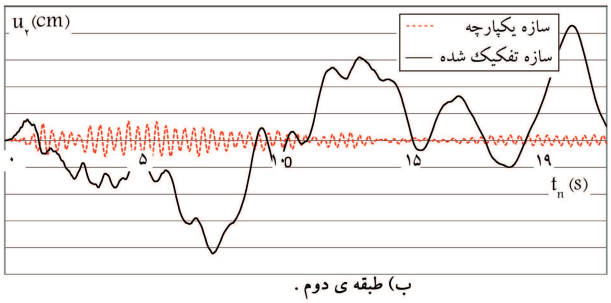
$$u_2^{i+1} = \frac{1}{3{,}672{,}000}\begin{bmatrix} -15{,}3\ddot{u}_g^{i+1} + V^{i+1} \\ +15{,}3\left(2{,}4e5 u_2^i + 1200\dot{u}_2^i + 2\ddot{u}_2^i\right) \end{bmatrix}$$

برنامه‌ی رایانه‌یی مربوط به ۳ حالت ذکرشده در بند ۴ (روابط ۱۸ تا ۲۱ و بند (ز)) برای حل روابط ۱۶ و ۱۷ در نرم‌افزار MATLAB نوشته شد و تاریخچه‌ی زمانی تغییرمکان طبقات به‌دست آمد. سپس این نمودارها با نمودارهای به‌دست‌آمده از حل سازه‌ی یک‌پارچه به روش ضمنی (رابطه‌ی ۵) مقایسه شد. پاسخ حاصل از روابط ۱۸ و ۱۹ واگرا می‌شود. در مورد روابط ۲۰ و ۲۱ به علت حذف برش طبقه، پاسخ‌ها با حالت واقعی تفاوت فاحش دارد (شکل ۵)؛ ولی در حالت (ز) با بیشینه‌ی ۲۰٪ خطا انطباق خوبی بین نتایج حالت سازه‌ی یک‌پارچه و سازه‌ی تفکیک‌شده مشاهده می‌شود (شکل ۶).

شایان ذکر است در حالات (د) و (ز) معیار همگرایی به‌صورت رابطه‌ی

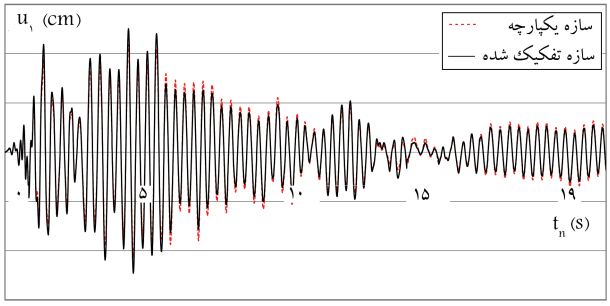


الف) طبقه ی اول؛

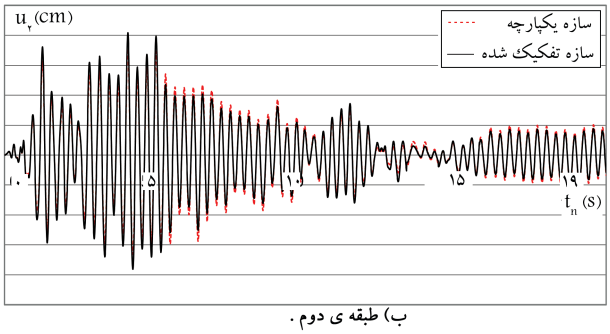


ب) طبقه ی دوم .

شکل ۵. مقایسه‌ی تاریخچه‌ی زمانی تغییرمکان طبقات در حالت سازه‌ی یک‌پارچه و سازه‌ی تفکیک‌شده طبق روابط ۱۸ و ۱۹.



الف) طبقه ی اول؛



ب) طبقه ی دوم .

شکل ۶. مقایسه‌ی تاریخچه‌ی زمانی تغییرمکان طبقات در حالت سازه‌ی یکپارچه و سازه‌ی تفکیک‌شده طبق بند (ز).

$\frac{V^{n+1}-V^n}{V^2} \leq \varepsilon$ در الگوریتم حل وارد می‌شود، که در آن بالانویس‌ها نشان‌دهنده‌ی شماره‌ی ترتیب عملیات تکرارشونده است. بدیهی است هر قدر مقدار ε کوچک‌تر انتخاب شود، دقت نتایج بیشتر خواهد شد.

با مقایسه‌ی بین نمودارهای ارائه‌شده معلوم می‌شود بهترین روش برای محاسبه‌ی تغییرمکان زیرسازه‌ها هم در روش صریح و هم در روش ضمنی حذف عبارات ضمنی از روابط و انجام عملیات تکرارشونده‌ی عددی جهت همگراکردن پاسخ‌هاست.

۶. نتیجه‌گیری

روش آزمایش مرکب مشتمل بر آزمایش تجربی و تحلیل عددی است. در بخش تحلیلی شبیه‌سازی مرکب، نیاز به انتگرال‌گیری عددی است. در روش‌های صریح برای یافتن واکنش دینامیکی گام زمانی بعد، معادله‌ی حرکت زیرسازه‌ی رایانه‌یی در گام جاری نوشته می‌شود و در صورت ارتجاعی‌بودن سیستم نیازی به حل تکراری وجود ندارد. این روش‌ها دارای پایداری مشروط هستند. در این روش، چنانچه حالتی از شبیه‌سازی مرکب به‌کار رود که در آن تمام زیرسازه‌ها فقط در رایانه مدل می‌شوند (تحلیل + تحلیل)، مقدار نیروی بازگرداننده در فصل مشترک زیرسازه‌ها هم مجهول است و باید به طریقی محاسبه شود. از طرف دیگر، چنانچه از روش‌های ضمنی انتگرال‌گیری عددی استفاده شود، معادله‌ی تعادل درگام بعد نوشته می‌شود و معمولاً دارای پایداری نامشروط است. در حالت تحلیل + تحلیل، مجهولات این روش نیز از جمله شامل نیروی بازگرداننده در فصل مشترک زیرسازه‌ها خواهند بود. به منظور محاسبه‌ی پارامترهای مجهول، در روش صریح این حالات در حل در نظر گرفته شده است:

الف) ازکل نیروی برشی گام قبل؛ یعنی V^{i-1}، به‌جای V^i، استفاده شده است.

ب) بخش وابسته به سرعت برش طبقه، یعنی $C_2(\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i)$، ازگام قبل برداشت شده است.

ج) از بخش وابسته به سرعت برش طبقه به کلی صرف‌نظر شده است.

د) از عبارت $C_2(\dot{u}_2^i - \dot{u}_1^i)$ صرف‌نظر شده است، اما طی عملیات تکرارشونده‌ی برش طبقه به هم‌گرایی رسانده شده است.

در مورد حل به روش ضمنی نیز این حالات در نظرگرفته شده است:

ه) از نیروی برشی گام قبل؛ یعنی V^i، به‌جای V^{i+1}، استفاده شده است.

و) ازکل برش طبقه، صرف‌نظر شده است.

ز) از عبارت V^{i+1}، صرف‌نظر شده است، با این شرط که نیروهای برشی طی عملیات تکرارشونده، هم‌گرا شوند.

با توجه به مقایسه‌های انجام‌گرفته روی نتایج عددی این روش‌ها، معلوم شد از این میان روش‌هایی که با انجام عملیات تکرارشونده‌ی عددی، پاسخ‌ها را هم‌گرا می‌کنند (حالت‌های (د) و (ز))، بهترین روش برای برآورد مجهولات شبیه‌سازی و تضمین‌کننده‌ی دقت و پایداری حل است. به این ترتیب هر دو روش صریح و ضمنی شامل عملیات تکرارشونده خواهد بود.

با توجه به شکل ماتریسی روابط ارائه‌شده، امکان تعمیم این روابط به زیرسازه‌های n درجه‌ی آزاد وجود دارد. از طرفی با جایگزینی ماتریس سختی مماسی به‌جای ماتریس سختی اولیه در روابط و با اعمال اندک اصلاحاتی در آن امکان تعمیم به حالت غیرخطی نیزوجود دارد، که این خود مهم‌ترین مزیت شبیه‌سازی مرکب است.

با توجه به مطالب ذکرشده، پیش‌بینی می‌شود که ادامه‌ی پژوهش‌ها در زمینه‌ی شبیه‌سازی مرکب شامل ابداع روش‌های انتگرال‌گیری عددی با اپراتورهای پیشرفته مانند روش‌های انتگرال‌گیری صریح و ضمنی توأمان، شیوه‌های حذف تأخیرهای ناشی از عملیات محاسبه و ارتباط داده‌ها بین مدل رایانه‌یی و زیرسازه‌ی فیزیکی و حذف تأخیرهای ناشی از عملکرد محرک‌های هیدرولیکی و میز لرزان، و نهایتاً تقسیم بهینه‌ی حرکت ورودی بین میز لرزان و محرک‌های نیرو به منظور دستیابی به مزایای مکانیکی مناسب‌تر باشد.

پانوشت‌ها

1. Berkeley, Boulder, UIUC, Buffalo, Lehigh
2. San Fernando

منابع (References)

1. Williams, M.S., Blackeborough, A. and Houlsby, G.T. "Development of a real-time hybrid dynamic testing system", University of Oxford, Department of Engineering Science, UK (1998).

2. Buchet, P. and Pegon, P., *PSD with Substructuring: Implementation and Use*, Special publication No. I.94.25 EC, Joint Research Center, Ispra (1994).

3. Nakashima, M. and Masaoka, N. "Real-time online test for MDOF systems", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **28**(4), pp. 393-420 (1999).

4. Nakashima, M. "Development potential, and limitations of real-time online (pseudo dynamic) testing", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A- Mathematical Physical and Engineering Sciences*, **359**(1786), pp. 1851-1867 (2001).

5. Reinhorn, A.M., Sivaselvan, M.V., Liang, Z. and Shao, X. "Real-time dynamic hybrid testing of structural system", *13th World Conf. on Earthquake Engineering*, p. 1644 (2004).

6. Ahmadizadeh, M. "Real-time hybrid simulation procedures for reliable structural performance testing", PhD thesis, University of Buffalo (2007).

7. Ricles, J.M., Theodore, L., Karavasilis, S.R. and Chen, C. "Performance assessment of building systems with

elastomeric dampers using real-time hybrid simulation", *Proceedings of the 9th U.S. National and 10th Canadian Conference on Earthquake Engineering,* p. 1522 (2010).

8. Ojaghi, M., Lamata, M.I., Williams, M.S., Blakeborough, A., Dietz, M. and Crewe, A. "Real-time hybrid testing in geographically distributed laboratories", *14th European Conference on Earthquake Engineering*, Ohrid, Macedonia, Paper 872 (2010).

9. Newmark, N.M. "A method of computation for structural dynamics", *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, pp. 67-94 (1959).

10. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1982).

11. Internet site:peer.berkeley.edu.