

روش‌های برازش شوک و تسخیر شوک به منظور حل جریان تقارن محوری و ماوراء صوت حول دماغه‌ی اجسام سرپخ با اثرات گاز تعادلی

کاظم هجران‌فر (استادیار)

رهمین کمالی مقدم (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

در این تحقیق جریان تقارن محوری، لزج و ماوراء صوت^۱ با اثرات گاز تعادلی روی دماغه‌ی اجسام سرپخ^۲، با استفاده از روش‌های برازش شوک^۳ و تسخیر شوک^۴ شبیه‌سازی عددی شده و تأثیر شرط مرزی شوک بر دقت نتایج میدان حل مورد بررسی قرار گرفته است. حل عددی معادلات ناویر-استوکس لایه‌نازک^۵ (TLNS) توسط الگوریتم اختلاف محدود ضلعی و غیرتکراری بیم‌وارمینگ انجام و فرمول‌بندی مناسب برای اعمال شرط مرزی شوک در روش برازش شوک با اثرات گاز تعادلی ارائه شده است. خواص ترمودینامیکی و نیز خواص انتقالی هوا در شرایط تعادل شیمیایی با استفاده از منحنی‌های برازش‌شده‌ی سرینوسن و همکاران به‌دست آمده است. شبیه‌سازی عددی جریان ماوراء صوت با در نظر گرفتن اثرات گاز تعادلی بر یک نیم‌کره در عدد ماخ ۱۶/۸۹ انجام و نتایج مشخصات میدان جریان و موقعیت شوک با نتایج عددی قابل دسترس مقایسه شده است. محاسبات حاضر برای هر دو مدل گاز تعادلی و گاز ایده‌آل انجام شده و دقت نتایج مشخصات میدان جریان و شکل شوک برای هر دو روش تسخیر شوک و برازش شوک مورد ارزیابی قرار گرفته است. همچنین نقش عبارات میرایی عددی^۶ و تأثیر ابعاد شبکه‌ی محاسباتی بر دقت نتایج میدان حل بررسی شده است.

khejran@sharif.edu
rkamali@ae.sharif.edu

واژگان کلیدی: جریان ماوراء صوت، اجسام سرپخ، گاز تعادلی، روش برازش شوک.

مقدمه

ایده‌آل، خواص فیزیکی نظیر گرمای ویژه در حجم و فشار ثابت و نسبت گرمای ویژه ثابت‌اندا، اما در گاز تعادلی این خواص ثابت نیستند و از جداول یا از منحنی‌های برازش‌شده حاصل می‌شوند. تغییر مقدار خواص سیال حتی به‌میزان کم می‌تواند تأثیر زیادی در مشخصات جریان ایجاد کند.

اغلب الگوریتم‌های عددی برای محاسبه‌ی میدان‌های جریان ماوراء صوت حول اجسام سرپخ با اثرات گاز تعادلی براساس روش‌های حجم محدود و با استفاده از روش تسخیر شوک پایه‌ریزی شده‌اند.^{۱-۵} استفاده از الگوریتم‌های عددی برپایه‌ی حجم محدود به‌همراه روش تسخیر شوک در تحلیل جریان‌های ماوراء صوت، هرچند سبب سهولت حل عددی می‌شود، دقت مقادیر مشخصات جریان پشت شوک و در نتیجه نتایج میدان جریان، بستگی زیاد به نوع الگوریتم حل عددی به کار رفته و دقت آن خواهد داشت. این اثرات در جریان ماوراء صوت — به‌ویژه در ناحیه‌ی دماغه‌ی اجسام سرپخ — به‌دلیل وجود شوک کمانی بسیار قوی و تغییرات شدید شرایط جریان در عبور از شوک بسیار بیشتر است. در این شرایط، استفاده از الگوریتم‌های عددی مناسب با به‌کارگیری روش برازش شوک برای حل میدان جریان ماوراء صوت حول دماغه‌ی اجسام سرپخ از نظر دقت نتایج و تلاش محاسباتی

در طراحی اجسام پرنده‌ی ماوراء صوت که معمولاً دماغه‌ی سرپخ دارند، به‌دلیل وجود جریان‌های با سرعت بالا، استفاده از امکانات و ابزارهای آزمایشگاهی محدودیت‌های بسیاری دارد. وجود محدودیت در روش‌های تجربی از یک‌سو، و گسترش امکانات رایانه‌ی از سوی دیگر موجب افزایش استفاده از روش‌های عددی دقیق و مؤثر در تحلیل جریان‌های ماوراء صوت^۱ و نیز مطرح شدن تعیین دقیق میدان جریان ماوراء صوت و لزج حول اجسام با دماغه‌ی سرپخ^۲ (از نقطه‌نظر آئرو‌دینامیکی و نیز از نظر انتقال حرارت) به‌عنوان امری مهم و ارزشمند شده است.

بالا بودن درجه حرارت در جریان‌های ماوراء صوت موجب می‌شود که ذرات گاز دارای بیشترین درجه آزادی شوند. از این رو نمی‌توان از فرض گاز ایده‌آل در تحلیل جریان‌های با سرعت بسیار بالا استفاده کرد و رفتار سیال به گاز حقیقی تغییر می‌یابد. در میدان جریانی که نرخ واکنش‌های شیمیایی زیاد است، واکنش‌ها به‌صورت آبی انجام شده و پیش از آن که سیال به پایین‌دست جریان یابد، واکنش تکمیل شده است. چنین جریانی را «جریان در حال تعادل شیمیایی»^۳ می‌نامند. اختلاف عمده بین گاز تعادلی و گاز ایده‌آل در معادله‌ی حالت آنهاست. در گاز تعادلی، ارتباط فشار با دیگر متغیرها از جداول یا از منحنی‌های برازش‌شده به‌دست می‌آید. در فرض گاز

$$\bar{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (E + p)V - \eta_\tau p \end{bmatrix} \quad \bar{H} = (y^J)^{-1} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 \\ (E + p)^v \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}_\backslash = (JRe)^{-1} \begin{bmatrix} C_\gamma u_\eta + C_\gamma v_\eta - C_\delta \eta_x v \\ C_\gamma u_\eta + C_\gamma v_\eta - C_\delta \eta_y v \\ C_\delta T_\eta + (C_\gamma u + C_\gamma v) u_\eta + \\ ((C_\gamma u + C_\gamma v) v_\eta - C_\delta v (u \eta_x + v \eta_y)) \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}_\backslash = (yJRe)^{-1} \begin{bmatrix} \mu(\eta_y u_\eta + \eta_x v_\eta) \\ \gamma \mu v_\eta \eta_y - \gamma \mu \frac{v}{y} \\ C_\gamma T_\eta + \mu[\eta_y (u u_\eta + \frac{1}{2} v v_\eta)] \\ + \eta_x (u v_\eta - \frac{1}{2} v u_\eta) - \frac{\gamma}{2} \frac{u^2}{y} \end{bmatrix}$$

و مقادیر C_i و عدد رینولدز جریان چنین بیان می‌شوند:

$$C_\gamma = \mu \left(\frac{\gamma}{\mu} \eta_x^v + \eta_y^v \right), \quad C_\tau = \mu \left(\frac{1}{\mu} \eta_x \eta_y \right)$$

$$C_\tau = \mu \left(\eta_x^v + \frac{\gamma}{\mu} \eta_y^v \right), \quad C_\delta = \frac{\gamma_\infty k}{(\gamma_\infty - 1) Pr_\infty} (\eta_x^v + \eta_y^v)$$

$$C_\delta = \frac{\gamma}{\mu} \frac{\mu}{y}, \quad C_\gamma = \frac{\gamma_\infty k}{(\gamma_\infty - 1) Pr_\infty} \eta_y$$

$$Re = \frac{Re_\infty}{\sqrt{\gamma_\infty}} \frac{1}{M_\infty}, \quad Re_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty R_N}{\mu_\infty}$$

در روابط ارائه شده، سرعت‌های یادوردا U و V عبارت‌اند از:

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v \quad (3)$$

محاسبه‌ی متریک‌ها و ژاکوبین تبدیل طبق رابطه‌ی ۴ انجام می‌شود:

$$\xi_t = J(x_\eta y_\tau - y_\eta x_\tau), \quad \eta_t = J(y_\xi x_\tau - x_\xi y_\tau)$$

$$\xi_x = J y_\eta, \quad \xi_y = -J x_\eta, \quad \eta_x = J x_\xi, \quad \eta_y = -J y_\xi$$

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta \quad (4)$$

بی‌بعدسازی متغیرها نیز با استفاده از طول مرجع و شرایط جریان آزاد صورت گرفته است:

$$t = \frac{t^*}{R_N \sqrt{\gamma_\infty}} a_\infty, \quad x_i = \frac{x_i^*}{R_N}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{a_\infty} \sqrt{\gamma_\infty}$$

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty}, \quad p = \frac{p^*}{p_\infty}, \quad T = \frac{T^*}{T_\infty}, \quad E = \frac{E^*}{p_\infty}$$

$$e = \frac{e^*}{a_\infty^2} \gamma_\infty, \quad h = \frac{h^*}{a_\infty^2} \gamma_\infty, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_\infty}, \quad k = \frac{k^*}{k_\infty} \quad (5)$$

بسیار مؤثر و حائز اهمیت است و نتایج حاصل از حل به این روش، به‌عنوان نتایجی دقیق و معتبر، برای ارزیابی نتایج الگوریتم‌های عددی بر پایه‌ی روش تسخیر شوک قابل استفاده خواهد بود.

در تحقیق حاضر، حل عددی جریان تقارن محوری، لُج و ماوراء صوت با اثرات گاز تعادلی رزی دماغه‌ی اجسام سریع با استفاده از روش‌های برازش شوک و تسخیر شوک انجام گرفته، و تأثیر نوع شرط مرزی شوک بر دقت نتایج میدان حل مورد بررسی قرار گرفته است. حل عددی معادلات ناویر-استوکس لایه‌نازک (TLNS) توسط الگوریتم اختلاف محدود بیم-وارمینگ [۶-۸] انجام شده و فرمول‌بندی مناسب برای اعمال شرط مرزی شوک در روش برازش شوک با اثرات گاز تعادلی ارائه شده است. الگوریتم بیم-وارمینگ یک روش ضمنی و غیرتکراری است و در مقایسه با اغلب روش‌های حجم محدود، که به‌صورت صریح اعمال می‌شوند، از نظر زمان حل مؤثرتر است. استفاده از این الگوریتم به‌همراه روش برازش شوک، یک حل یکنواخت و دقیق (دقت مرتبه دو) در کل میدان جریان ایجاد می‌کند و در نتیجه، مشخصات میدان جریان رزی سطح و همچنین پروفیل‌های متغیرهای جریان با دقت مناسب تعیین می‌شوند.

برای ارزیابی نتایج حل، شبیه‌سازی عددی جریان تقارن محوری و ماوراء صوت حول نیم‌کره در عدد ماخ ۱۶٫۸۹ انجام، و نتایج حاصل (شامل شکل شوک و مشخصات میدان جریان) با نتایج عددی قابل دسترس مقایسه شده است. پس از انجام محاسبات برای هر دو حالت مدل گاز تعادلی و گاز ایده‌آل، دقت نتایج درخصوص مشخصات میدان جریان و شکل شوک برای هر دو روش تسخیر شوک و برازش شوک مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین نقش عبارات میرایی عددی و تأثیر ابعاد شبکه‌ی محاسباتی رزی دقت نتایج میدان حل بررسی شده است.

معادلات حاکم

برای شبیه‌سازی میدان جریان تقارن محوری، لُج و ماوراء صوت حول اجسام سریع از معادلات ناویر-استوکس لایه‌نازک (TLNS) استفاده شده است. این معادلات از معادلات کامل ناویر-استوکس در مختصات عمومی منحنی‌الخط با حذف عبارات لُج و شار حرارتی در جهت جریان، و در مقایسه با عبارات متناظر در جهت عمودی حاصل می‌شوند. معادلات TLNS در مختصات محاسباتی (τ, ξ, η) و با استفاده از انتقال $t = \tau$ ، $\xi = \xi(x, y, t)$ ، $\eta = \eta(x, y, t)$ به‌فرم بقایی زیر ارائه می‌شوند:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} + \bar{H} = \frac{\partial \bar{S}_\backslash}{\partial \eta} + \bar{T}_\backslash \quad (6)$$

که در آن، بردار متغیرهای وابسته \bar{U} ، بردارهای غیرلُج \bar{F} ، \bar{G} و \bar{H} ، همچنین بردارهای لُج \bar{T}_\backslash و \bar{S}_\backslash عبارت‌اند از:

$$\bar{U} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad \bar{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (E + p)U - \xi_\tau p \end{bmatrix} \quad (7)$$

جدول ۱. نوع روش عددی و خطای آن.

T.E.	θ_2	θ_1	روش
$O[(\Delta\tau)^2]$	۰	۱	اویلر، ضمنی
$O[(\Delta\tau)^3]$	۰٫۵	۱	سه نقطه‌یی پس‌رو، ضمنی

که در آن، ماتریس‌های ژکوبین مربوط به بردارهای شار غیرلزج و لزج عبارت‌اند از:

$$A = \left[\frac{\partial F}{\partial U} \right], B = \left[\frac{\partial G}{\partial U} \right], K = \left[\frac{\partial H}{\partial U} \right]$$

$$M = \left[\frac{\partial S_1}{\partial U} - Q_\eta \right], Q = \left[\frac{\partial S_1}{\partial U_\eta} \right]$$

$$N_1 = \left[\frac{\partial T_1}{\partial U} - W_{1\eta} \right], W_1 = \left[\frac{\partial T_1}{\partial U_\eta} \right] \quad (10)$$

ضرایب θ_1 و θ_2 وابسته به نوع روش و میزان دقت، مطابق با مقادیر جدول ۱ انتخاب می‌شوند. در بررسی حاضر، روش اویلر ضمنی استفاده شده است. شکل نهایی معادله ۹ برای حل عددی در دو مرحله‌ی η - ثابت و ξ - ثابت و با استفاده از عبارات میرایی خطی چنین ارائه می‌شود:

$$[I + \Delta\tau A \xi^n - \xi_I (J^{-1} \nabla_\xi \Delta_\xi J)^n] \Delta \bar{U}^{n\eta} = RHS \quad (11)$$

$$RHS = -\Delta\tau [\bar{F}_\xi^n + \bar{G}_\eta^n + \bar{H}^n - (\bar{S}_1^\eta + \bar{T}_1^\eta)^n]$$

$$- \varepsilon_B (J^{-1} [(\nabla_\xi \Delta_\xi)^n + (\nabla_\eta \Delta_\eta)^n] (J \bar{U}))^n$$

$$[I + \Delta\tau (B - M)_\eta^n - Q_{\eta\eta}^n + K^n - (N_1 - W_{1\eta})^n]$$

$$- \varepsilon_I (J^{-1} (\nabla_\eta \Delta_\eta)^n) \Delta \bar{U}^{n\eta} = \Delta \bar{U}^{n\eta} \quad (12)$$

معادلات ۱۱ و ۱۲ معرف سیستم معادلات سه‌قطری بلوکی (هر بلوک به ابعاد 4×4) در هر یک از جهت‌های ξ و η هستند و با حل آنها در هر گام زمانی، بردار $\Delta \bar{U}^{n\eta}$ تعیین و در نتیجه بردار حل \bar{U}^{n+1} محاسبه می‌شود:

$$\bar{U}^{n+1} = \bar{U}^n + \Delta \bar{U}^{n\eta} \quad (13)$$

در مدل گاز تعادلی چون بردارهای شار لزج و غیرلزج تابعی از \bar{U} و $\gamma = \gamma(\rho, e)$ هستند، ماتریس‌های ژکوبین مربوط به این بردارها نیز باید اثرات تغییرات γ را در بر داشته باشند. برای مثال، ماتریس ژکوبین A مربوط به بردار شار غیرلزج \bar{F} چنین بیان می‌شود: [۱۳]

$$A = \left[\frac{\partial F}{\partial U} \right]_\gamma + J \left[\frac{\partial F}{\partial \gamma} \right]_{\bar{U}}$$

$$\left\{ \rho_\infty \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \rho^*} \right]_{e^*} \left[\frac{\partial \rho}{\partial U} \right] + \frac{a_\infty^2}{\gamma_\infty} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial e^*} \right]_{\rho^*} \left[\frac{\partial e}{\partial U} \right] \right\} \quad (14)$$

برای گاز تعادلی، مشتقات $[\partial_\gamma / \partial \rho^*]_{e^*}$ و $[\partial_\gamma / \partial e^*]_{\rho^*}$ مستقیماً از منحنی‌های برازش شده $\gamma = \gamma(\rho, e)$ محاسبه می‌شوند.

عبارات میرایی خطی و غیرخطی

در روابط ۱۱ و ۱۲، عبارات میرایی صریح مرتبه‌ی چهار برای میراکردن نوسانات با فرکانس‌های بالا، و عبارات میرایی ضمنی مرتبه‌ی دو برای افزایش محدوده‌ی

برای تکمیل سیستم معادلات، روابط مابین سایر متغیرها برای گاز ایده‌آل یا گاز تعادلی به شکل بی‌بعد زیر ارائه می‌شوند:

$$p = \rho e (\gamma - 1), E = \rho [e + \frac{1}{\gamma} (u^2 + v^2)], \gamma = \frac{h}{e} \quad (6)$$

برای گاز ایده‌آل، نسبت گرمای ویژه $\gamma = \gamma_\infty$ ثابت فرض شده و علاوه بر روابط ۶، رابطه‌ی گاز کامل در شکل بی‌بعد $p = \rho T$ نیز صادق است. همچنین، ضریب لزجت μ و ضریب هدایت حرارتی k (در شکل بی‌بعد $\mu = k$) با استفاده از رابطه‌ی سادرلند محاسبه می‌شود. از آنجا که یکی از مشخصه‌های جریان ماوراء صوت، بالا بودن درجه حرارت است و این امر موجب تغییر رفتار سیال به رفتار گاز حقیقی می‌شود، روابط بین متغیرهای ترمودینامیکی و روابط مورد نیاز برای محاسبه‌ی خواص انتقالی گاز حقیقی با روابط گاز ایده‌آل تفاوت دارد.

در این بررسی، هوا در شرایط تعادل شیمیایی فرض شده و برای تعیین خواص ترمودینامیکی، از منحنی‌های برازش شده توسط سرنوسن و همکاران [۱۴] استفاده می‌شود. این منحنی‌ها، رابطه‌ی برای محاسبه‌ی خواص ترمودینامیکی برحسب دو متغیر مستقل‌اند:

$$\gamma = \gamma(\rho^*, e^*), \quad a^* = a^*(\rho^*, e^*)$$

$$p^* = p^*(\rho^*, e^*), \quad T^* = T^*(\rho^*, e^*)$$

$$T^* = T^*(\rho^*, p^*), \quad h^* = h^*(\rho^*, p^*) \quad (7)$$

منحنی‌های مذکور تا درجه حرارت 2500 K و نسبت چگالی $\frac{\rho^*}{\rho_0^*}$ بین 10^{-7} تا 10^3 معتبرند. برای محاسبه‌ی خواص انتقالی نیز از منحنی‌های برازش شده دیگری استفاده شده است. [۱۵]

در برازش این منحنی‌ها، ضریب لزجت μ^* و ضریب هدایت حرارتی k^* به صورت تابعی برحسب انرژی داخلی و چگالی سیال ارائه شده‌اند:

$$k^* = k^*(\rho^*, e^*), \quad \mu^* = \mu^*(\rho^*, e^*) \quad (8)$$

این منحنی‌ها تا درجه حرارت 1500 K و نسبت چگالی $\frac{\rho^*}{\rho_0^*}$ بین 10^{-5} تا 10^1 اعتبار دارند.

الگوریتم حل عددی

در تحقیق حاضر، حل عددی معادلات ناویر-استوکس لایه‌نازک (TLNS) برای تعیین جریان ماوراء صوت حول دماغه‌ی اجسام سریع با اثرات گاز تعادلی توسط الگوریتم اختلاف محدود ضمنی و غیرتکراری بیم-وارمینگ انجام شده است. [۱۶-۱۸] شکل مناسب برای حل عددی معادلات TLNS توسط الگوریتم بیم-وارمینگ به دست می‌آید:

$$\left[I + \frac{\theta_1 \Delta\tau}{1 + \theta_2} A \xi^n \right] \times \Delta \bar{U}^n$$

$$\left[I + \frac{\theta_1 \Delta\tau}{1 + \theta_2} [(B - M)_\eta^n - Q_{\eta\eta}^n + K^n + (N_1 - W_{1\eta})^n] \right]$$

$$= \frac{\Delta\tau}{1 + \theta_2} [-\bar{F}_\xi + (-\bar{G}_\eta + \bar{S}_1^\eta)_\eta - \bar{H}^n + \bar{T}_1^\eta]$$

$$+ \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \Delta \bar{U}^{n-1} + O \left[(\theta_1 - \frac{1}{\gamma} - \theta_2) \Delta\tau^2, \Delta\tau^3 \right] \quad (9)$$

ذکر است روابط شوک مورد نیاز در روش برازش شوک باید با در نظر گرفتن اثرات گاز تعادلی به دست آیند. برای این منظور، فرمول‌بندی مناسب برای اعمال شرط مرزی شوک در روش برازش شوک با اثرات گاز تعادلی ارائه شده است.

روش برازش شوک

در این روش، موج شوک به منزله‌ی یک سطح نایبسته در نظر گرفته می‌شود. در این حالت شکل موج شوک به‌عنوان قسمتی از حل، با استفاده از روابط شوک مایل و میدان جریان داخل تعیین می‌شود. برای محاسبه‌ی متغیرهای جریان در مرز داخلی شوک، روابط رانکین-هوگنویوت^۸ کافی نیست و معادله‌ی دیگری که موج شوک را با میدان جریان داخل مرتبط سازد لازم است. معادله‌ی سازگاری مورد نظر با ترکیب معادلات انرژی، مومنتوم و پیوستگی با در نظر گرفتن اثرات گاز تعادلی برای محاسبه‌ی فشار پشت مرز شوک ($p = p_r$) ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{p}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \right) + U \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right) + V \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right) \right] - U \frac{\partial p}{\partial \xi} - V \frac{\partial p}{\partial \eta} - \gamma p \left[\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{y} \right] \quad (20)$$

مقدار چگالی پشت مرز شوک (ρ_r) نیز به‌صورت ضمنی از رابطه‌ی ۲۱ محاسبه می‌شود:

$$h_r = h_1 + \frac{p_r - 1}{\gamma} \left(1 + \frac{1}{\rho_r} \right) \quad (21)$$

که در آن، $h = h(\rho, p)$ از منحنی‌های برازش‌شده به‌دست می‌آید. سرعت موج شوک q_n با داشتن مؤلفه‌ی عمودی سرعت جریان آزاد (u_{n1}) از طریق معادله‌ی ۲۲ تعیین می‌شود:

$$q_{n1} = \sqrt{\gamma_{\infty} M_{n1}^2 - u_{n1}^2} \quad (22)$$

که در آن، M_{n1} معرف عدد ماخ عمودی نسبت به شوک بوده و از روابط رانکین-هوگنویوت با معلوم‌بودن فشار و چگالی پشت مرز شوک محاسبه می‌شود:

$$M_{n1} = \left[\frac{\rho_r (p_r - 1)}{\gamma_{\infty} (\rho_r - 1)} \right]^{1/2} \quad (23)$$

مؤلفه‌های سرعت پشت مرز شوک (u_2, v_2) نیز با توجه به سرعت شوک و شیب شوک در هر نقطه از شوک محاسبه می‌شوند.

روش تسخیر شوک

در روش تسخیر شوک، مرز بیرونی به‌عنوان مرز جریان آزاد فرض می‌شود و موقعیت شوک نیز با حل معادلات حاکم تسخیر می‌شود. با توجه به قوی‌بودن شوک کمانی به‌دلیل بالای عدد ماخ و وجود اثرات غیرخطی، برای پایداری حل عددی از عبارات میرایی غیرخطی استفاده شده است. در مطالعه‌ی حاضر، نقش عبارات میرایی غیرخطی و تأثیر ابعاد شبکه‌ی محاسباتی روی نتایج میدان حل بررسی شده است.

نتایج و بحث

برای ارزیابی نتایج، جریان‌لزوج و ماوراء صوت روی یک نیم‌کره به شعاع $0.25m$ در عدد ماخ $16/89$ مورد تحلیل قرار گرفته است. حل عددی میدان جریان ماوراء

پایداری اضافه شده‌اند. به‌طور معمول، ضرایب میرایی صریح و ضمنی به‌ترتیب معادل $\varepsilon_I = \varepsilon_{EB}$ و $\varepsilon_E = \Delta \tau$ انتخاب می‌شوند. عبارات میرایی خطی اضافه‌شده در این معادلات، برای تحلیل جریان ماوراء صوت حول دماغه‌ی اجسام سریع با استفاده از روش برازش شوک مناسب‌اند و در استفاده از روش تسخیر شوک، این عبارات به‌دلیل اثرات غیرخطی ناشی از وجود شوک در میدان حل - به‌ویژه در اعداد ماخ بالا و به‌دلیل ناپایداری حل عددی - مناسب نیستند. در این حالت، هنگام استفاده از روش تسخیر شوک از عبارات میرایی غیرخطی استفاده می‌شود:

$$D_E = D_{E\xi} + D_{E\eta} \quad (15)$$

که در آن، $D_{E\eta}$ و $D_{E\xi}$ معرف عبارات میرایی غیرخطی در جهت‌های ξ و η هستند. برای نمونه:

$$D_{E\xi} = \nabla_{\xi} (\sigma_{i+1,j} J_{i+1,j}^{-1} + \sigma_{i,j} J_j^{-1}) - (\varepsilon_{i,j}^{(2)} \Delta_{\xi} U_{i,j} - \varepsilon_{i,j}^{(1)} \Delta_{\xi} \nabla_{\xi} \Delta_{\xi} U_{i,j}) \quad (16)$$

که در آن، ضرایب $\varepsilon_{i,j}^{(1)}$ و $\varepsilon_{i,j}^{(2)}$ به‌ترتیب معرف ضرایب میرایی غیرخطی مرتبه‌ی دو و مرتبه‌ی چهار هستند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j}^{(1)} &= \kappa_r \Delta t \max(v_{i+1,j}, v_{i,j}, v_{i-1,j}) \\ \varepsilon_{i,j}^{(2)} &= \max(0, \kappa_r \Delta t - \varepsilon_{i,j}^{(1)}) \\ v_{i,j} &= \frac{|p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|}{|p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|} \\ \sigma_{i,j} &= |U| + a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \end{aligned} \quad (17)$$

بر اساس تحلیل پایداری عددی، مقادیر پارامترها در روابط ۱۷ عبارت‌اند از: $\kappa_r = 0.25$ و $\kappa_r = 0.1$.

شرایط مرزی

شرط مرزی دیواره

برای جریان لزج با توجه به شرط عدم لغزش، مقادیر سرعت مرزی سطح برابر صفر ($u = v = 0$) هستند. با این پیش‌فرض که شیب فشار عمود بر سطح جسم برابر صفر است، برای شرط مرزی فشار می‌توان از معادله‌ی ۱۸ استفاده کرد:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2}} \{ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_{\xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_{\eta} \} = 0 \quad (18)$$

برای شرط مرزی درجه حرارت هنگامی که شرط دیواره‌ی آدیاباتیک برقرار باشد، آنگاه:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2}} \{ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) T_{\xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) T_{\eta} \} = 0 \quad (19)$$

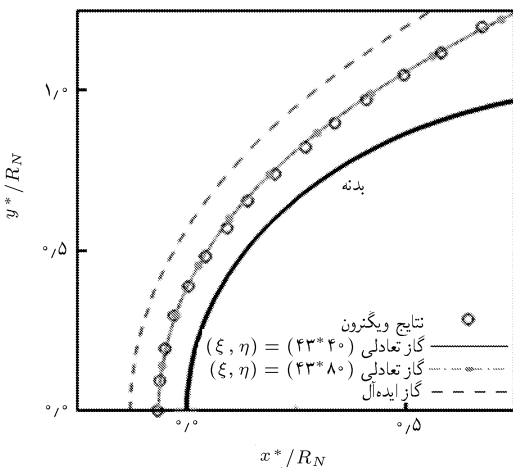
چگالی مرزی سطح نیز به‌صورت ضمنی با استفاده از منحنی‌های برازش‌شده $T = T(\rho, p)$ محاسبه می‌شود.

شرط مرزی شوک

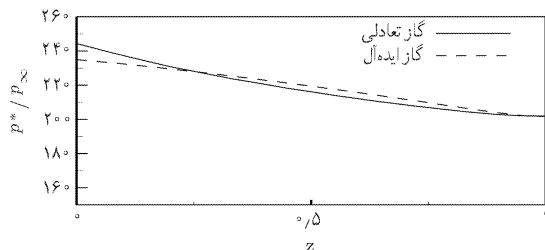
در مطالعه‌ی حاضر، دو روش برازش شوک و تسخیر شوک برای حل جریان ماوراء صوت حول دماغه‌ی اجسام سریع با اثرات گاز تعادلی استفاده شده است. شایان

مقایسه شده است و تطابق خوبی بین این دو حل برقرار است. طبق نتایج حاصل، موقعیت شوک مدل‌های گاز تعادلی و گاز ایده‌آل متفاوت‌اند. در حقیقت، از آنجا که در جریان ماوراء صوت با در نظر گرفتن مدل گاز تعادلی و در درجه حرارت‌های بالا، تجزیه‌ی شیمیایی مولکول‌های گاز رخ می‌دهد، درجه حرارت‌های حاصل از مدل گاز تعادلی نسبت به مدل گاز ایده‌آل پایین‌تر است و در نتیجه، به دلیل تغییرات کم متغیر فشار ناشی از اثرات گاز تعادلی، چگالی سیال پشت مرز شوک برای جریان با اثرات گاز تعادلی بیشتر می‌شود و لایه‌ی شوک نسبت به حالت گاز ایده‌آل کاهش می‌یابد.^[۱۵]

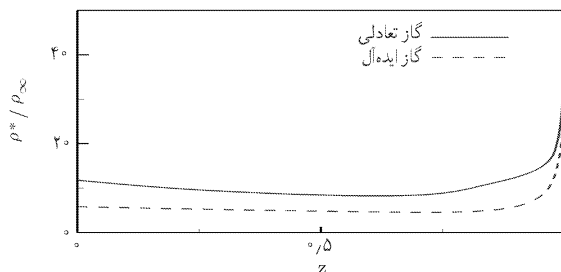
در شکل‌های ۳ تا ۵، برای بررسی دقیق‌تر میدان حل، توزیع متغیرهای فشار، چگالی و درجه حرارت در راستای زویه ۴۰ درجه از خط تقارن که جریان در آنجا مافوق صوت است برای مدل‌های گاز تعادلی و گاز ایده‌آل مقایسه شده‌اند. در



شکل ۲. مقایسه موقعیت شوک حول نیم‌کره حاصل از روش برازش شوک.



شکل ۳. مقایسه توزیع فشار در راستای زویه ۴۰ درجه حاصل از روش برازش شوک.



شکل ۴. مقایسه توزیع چگالی در راستای زویه ۴۰ درجه حاصل از روش برازش شوک.

صوت توسط دوروش تسخیر شوک و برازش شوک انجام شده و تأثیر نوع شرط مرزی شوک بر دقت مشخصات میدان جریان - به‌ویژه مشخصات سطح - و همچنین موقعیت شوک کمائی بررسی شده است. محاسبات انجام‌شده برای هر دو حالت جریان گاز ایده‌آل و گاز تعادلی بوده و تأثیر گاز تعادلی بر مشخصات میدان جریان مطالعه شده است. شایان ذکر است دقت و اعتبار الگوریتم حاضر با استفاده از روش برازش شوک برای حل جریان ماوراء صوت با اثرات گاز تعادلی روی اجسام سریخ برای شرایط مختلف جریان آزاد در مقایسه با اطلاعات عددی و تجربی معتبر نشان داده شده است.^[۱۶] در تحقیق حاضر، نتایج روش برازش شوک برای ارزیابی نتایج روش تسخیر شوک مورد استفاده واقع می‌شوند.

جریان ماوراء صوت حول نیم‌کره

جریان ماوراء صوت حول نیم‌کره مورد نظر، مطابق با شرایط پرواز در ارتفاع ۲۵۰۰۰۰ فوت و با سرعت ۱۰۰۰۰ ft/s است. شرایط مسئله شامل شرایط جریان آزاد و شرایط دیواره عبارت است از:

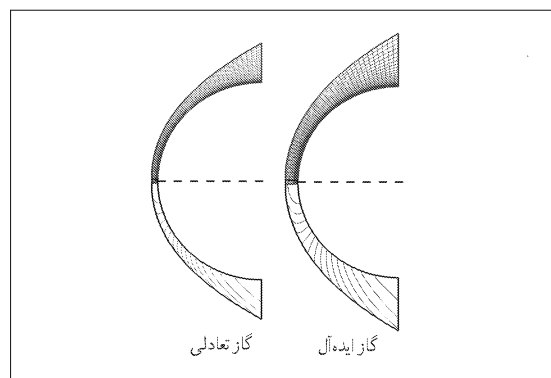
$$M_\infty = ۱۶٫۸۹, \quad Re_\infty = ۷۴۶۵٫۴۴,$$

$$p_\infty = ۲٫۰۸۹۴۹۵ \text{ Pa}, \quad T_\infty = ۱۸۲٫۳۳۳ \text{ K},$$

$$\rho_\infty = ۳٫۹۹۳۱۵۶ \times ۱۰^{-۵} \text{ kg/m}^3, \quad T_w^* = ۱۰۰۰ \text{ K}$$

در شکل ۱، شبکه‌ی نهایی و خطوط هم‌تراز فشار حاصل از جریان لزج حول نیم‌کره با استفاده از روش برازش شوک برای مدل‌های گاز ایده‌آل و گاز تعادلی آورده شده است. برای تولید شبکه از یک شبکه‌ی جبری با تجمع مناسب نقاط شبکه‌ی مجاور سطح برای حل دقیق میدان جریان لزج استفاده شده است. نتایج حل در روش برازش شوک به‌ازء ابعاد شبکه برابر با (۴۳، ۴۰) در جهت‌های (xi, eta) ارائه شده و برای بررسی استقلال حل به شبکه، محاسبات برای شبکه‌ی (۴۳، ۸۰) نیز انجام شده است. تمامی محاسبات حاضر با ضریب کشیدگی شبکه برابر با $\beta = ۱٫۲۵$ صورت گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که شبکه‌ی (۴۳، ۴۰) برای محاسبات دقیق جریان لزج و ماوراء صوت حول نیم‌کره مورد نظر در روش برازش شوک کافی بوده و افزایش ابعاد شبکه تأثیر چندانی بر دقت نتایج حل (شکل شوک و سایر مشخصات میدان جریان) نخواهد داشت (شکل ۲).

در شکل ۲، نتایج حاضر برای شکل شوک حول نیم‌کره‌ی حاصل از حل جریان لزج برای مدل گاز تعادلی با نتایج ویگنرون^[۱۷] (بر اساس حل به روش برازش شوک)



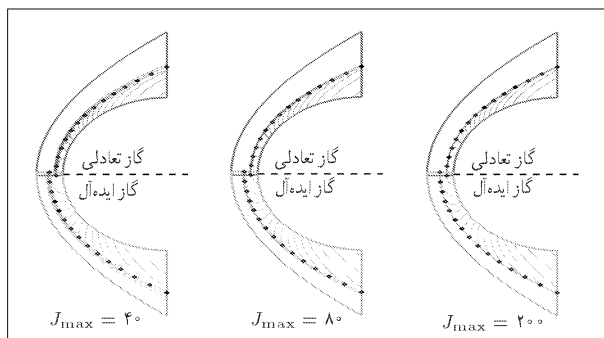
شکل ۱. شبکه نهایی و خطوط هم‌تراز فشار حول نیم‌کره حاصل از روش برازش شوک.

اگرچه اختلاف نتایج در مجاور ناحیه‌ی سکون بیشتر به نظر می‌رسد، روند تغییرات فشار سطح نشان می‌دهد که در زوایای بیشتر از 40° درجه، تطابق نسبی روبه کاهش و اختلاف در حال افزایش است.

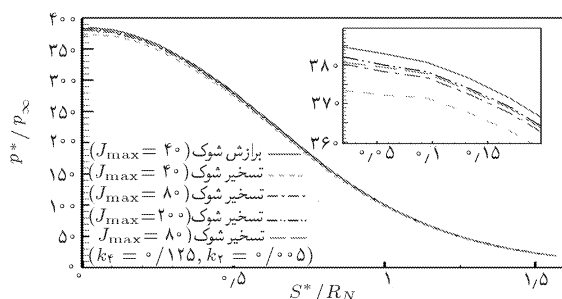
تأثیر نوع شرط مرزی شوک

با به‌کارگیری روش برآزش شوک، حل دقیق میدان جریان گاز تعادلی یا گاز ایده‌آل در مجاور مرز شوک و در میدان حل به‌دست خواهد آمد. اگرچه استفاده از روش تسخیر شوک موجب راحتی اعمال شرط مرزی می‌شود، مشخصات میدان حل حاصل از روش تسخیر شوک تا حد زیادی به نوع الگوریتم عددی و ابعاد شبکه بستگی خواهد داشت. در این بخش، نتایج میدان جریان ماوراء صوت روی نیم‌کره مورد نظر با استفاده از روش تسخیر شوک و برای مدل‌های گاز ایده‌آل و گاز تعادلی با نتایج حاصل از روش برآزش شوک مقایسه و ارزیابی می‌شود.

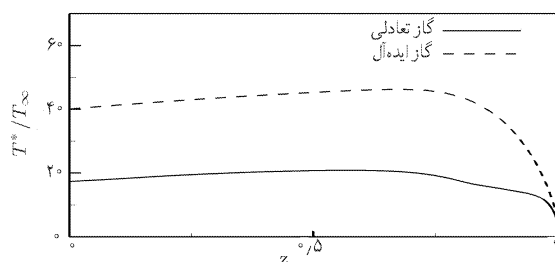
در شکل ۷ تأثیر ابعاد شبکه بر شکل شوک و خطوط هم‌تراز فشار حول نیم‌کره مورد نظر حاصل از روش تسخیر شوک ارائه شده است. محاسبات برای هر دو حالت گاز تعادلی و گاز ایده‌آل انجام و نتایج شکل شوک حاصل از روش تسخیر شوک به‌ازاء ابعاد مختلف شبکه در جهت عمود بر سطح برابر با $J_{max} = 40, 80, 200$ با نتایج روش برآزش شوک به‌ازاء $J_{max} = 40$ (که با نقاط توپر در شکل‌ها مشخص شده) مقایسه شده است. طبق شکل، با افزایش تعداد نقاط شبکه در جهت عمود بر سطح، نتایج حاصل از روش تسخیر شوک به نتایج دقیق روش برآزش شوک نزدیک می‌شود. کاهش ابعاد شبکه در روش برآزش شوک نسبت به روش تسخیر شوک برای حل دقیق میدان حل از نظر تلاش محاسباتی بسیار حائز اهمیت است. مطابق



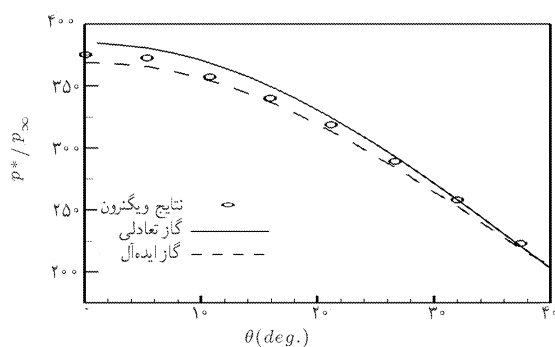
شکل ۷. تأثیر ابعاد شبکه روی شکل شوک و خطوط هم‌تراز فشار حاصل از روش تسخیر شوک برای مدل‌های گاز تعادلی و گاز ایده‌آل حول نیم‌کره (نقاط توپر معرف موقعیت شوک به روش برآزش شوک هستند).



شکل ۸. مقایسه توزیع فشار سطح نیم‌کره برای گاز تعادلی حاصل از حل‌های برآزش شوک و تسخیر شوک.



شکل ۵. مقایسه توزیع درجه حرارت در راستای زویه 40° درجه حاصل از روش برآزش شوک.



شکل ۶. مقایسه توزیع فشار روی سطح نیم‌کره حاصل از روش برآزش شوک.

این نمودارها، z فاصله‌ی بی‌بعد نقاط شبکه از شوک است. نتایج نشان می‌دهد که درجه حرارت و چگالی به مدل گاز استفاده شده به شدت وابسته‌اند! همچنین رفتار گاز تعادلی، درجه حرارت میدان جریان را به مقدار قابل توجهی کاهش و چگالی میدان را افزایش می‌دهد. اگرچه، فشار تغییرات زیادی ندارد. در حقیقت متغیر فشار چندان متأثر از معادله‌ی انرژی نیست و مطابق معادله‌ی مومنتوم، بیشتر از میدان سرعت تأثیر می‌پذیرد و در نتیجه، تأثیر گاز تعادلی نیز که منجر به تغییر نسبت گرمای ویژه در میدان جریان می‌شود بر متغیر فشار که یک متغیر «مکانیکی» است تأثیر اندکی داشته و مطابق معادله‌ی انرژی، بر درجه حرارت و چگالی میدان جریان بسیار تأثیر خواهد داشت.

در شکل ۶ توزیع فشار حاصل از حل با اثرات گاز تعادلی روی سطح نیم‌کره برحسب زویه از خط تقارن نشان داده شده که در مقایسه با نتایج ویگنرون (شامل نسبی برخورددار است. اگرچه شکل، موقعیت شوک و مشخصات جریان (شامل چگالی و درجه حرارت) به مدل گاز به کار رفته بستگی زیادی دارند، توزیع فشار میدان به‌ویژه مقادیر فشار روی سطح درمورد مدل‌های گاز تعادلی و گاز ایده‌آل اختلاف چندانی ندارند. در نتیجه، رفتار گاز تعادلی تأثیر زیادی بر نیروهای فشاری نخواهد داشت.

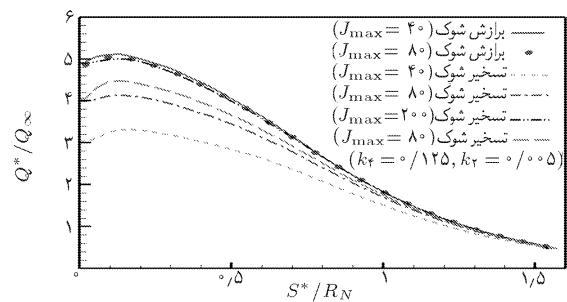
اختلاف مشاهده‌شده بین نتایج حاضر و نتایج ویگنرون ممکن است به علت تفاوت در الگوریتم به‌کار رفته و نحوه‌ی حل معادلات حاکم باشد. ویگنرون برای حل معادلات ناویر-استوکس از مختصات منحنی الخط متعامد و الگوریتم اختلاف محدود و صریح مک‌کورمک استفاده کرده است. نتایج حاضر از حل معادلات ناویر-استوکس لایه‌نازک (FLNS) در مختصات منحنی الخط غیرمتعامد و با استفاده از الگوریتم بیهم وارمینگ به دست آمده است. نتایج ویگنرون فقط در ناحیه‌ی نزدیک به دماغه که در آن استفاده از مختصات منحنی الخط متعامد مجاز است — معتبر است. نتایج حاضر به‌دلیل استفاده از مختصات منحنی الخط، در کل میدان حل معتبرند و حل جریان حول اجسام طویل با دماغه‌ی سرپنج نیز امکان‌پذیر است.

شکل، ضخامت لایه‌ی شوک^۹ حاصل از روش تسخیر شوک برای حالت گاز تعادلی نسبت به حالت گاز ایده‌آل کم‌تر است. در شکل‌های ۸ و ۹، مقایسه‌ی توزیع فشار و شار حرارتی سطح نیم‌کره حاصل از مدل گاز تعادلی برای دو روش تسخیر شوک و برازش شوک ارائه شده است. نتایج مورد نظر به‌ازء ابعاد مختلف شبکه برای هر دو روش (برازش و تسخیر شوک) به‌همراه تأثیر اندازه‌ی عبارات میرایی عددی در حل به روش تسخیر شوک آمده است. مطابق شکل ۸، توزیع فشار روی سطح نیم‌کره که از روش تسخیر شوک به‌دست آمده به ابعاد شبکه وابستگی اندکی دارد و با افزایش ابعاد شبکه، نتایج روش تسخیر شوک به نتایج دقیق روش برازش شوک میل می‌کند. مطابق شکل ۹، توزیع شار حرارتی سطح نیم‌کره که از حل به روش تسخیر شوک به دست آمده، به ابعاد شبکه بسیار حساس است و با افزایش ابعاد شبکه به $J_{max} = 200$ ، نتایج حل به نتایج حاصل از روش برازش شوک به‌ازء $J_{max} = 40$ نزدیک می‌شود و نتایج توزیع شار حرارتی سطح حاصل از روش برازش شوک به‌ازء ابعاد شبکه $J_{max} = 40$ و $J_{max} = 80$ است.

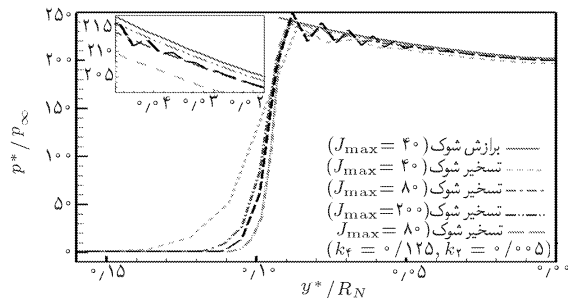
در شکل‌های ۸ تا ۱۱ تأثیر اندازه‌ی عبارات میرایی عددی بر توزیع فشار و شار حرارتی سطح حاصل از روش تسخیر شوک به‌ازء ابعاد شبکه‌ی $J_{max} = 80$ نیز بررسی شده است. با کاهش اندازه‌ی عبارات میرایی عددی ($k_1 = 0.125$ ، $k_2 = 0.05$) نسبت به مقادیر حدی ($k_1 = 0.25$ ، $k_2 = 0.1$)، نتایج حل به روش تسخیر شوک به نتایج دقیق روش برازش شوک نزدیک‌تر می‌شود. این اثر در روش تسخیر شوک ناشی از نقش اندازه‌ی عبارات میرایی عددی در ناحیه‌ی شوک برای شبکه نسبتاً درشت است که در این حالت، الگوریتم عددی مورد استفاده با دقت مرتبه‌ی دوم مرکزی، سبب پخش حل در ناحیه‌ی شوک در تعداد نقاط شبکه بیشتر می‌شود و موقعیت و قدرت شوک به‌دقت حاصل نمی‌شود. مطابق شکل، با کاهش عبارات میرایی عددی یا افزایش تعداد نقاط شبکه، اثر مورد نظر کاهش می‌یابد و ناپوستگی شوک در تعداد نقاط کم‌تر ولی با دقت بیشتر حاصل می‌شود. این اثر در نتایج مشخصات میدان حل (شکل‌های ۱۲ تا ۱۷) بهتر قابل مشاهده است.

در شکل‌های ۸ و ۹، مقایسه‌ی توزیع فشار و شار حرارتی سطح نیم‌کره حاصل از مدل گاز تعادلی برای دو روش تسخیر شوک و برازش شوک ارائه شده است. نتایج مورد نظر به‌ازء ابعاد مختلف شبکه برای هر دو روش (برازش و تسخیر شوک) به‌همراه تأثیر اندازه‌ی عبارات میرایی عددی در حل به روش تسخیر شوک آمده است. مطابق شکل ۸، توزیع فشار روی سطح نیم‌کره که از روش تسخیر شوک به‌دست آمده به ابعاد شبکه وابستگی اندکی دارد و با افزایش ابعاد شبکه، نتایج روش تسخیر شوک به نتایج دقیق روش برازش شوک میل می‌کند. مطابق شکل ۹، توزیع شار حرارتی سطح نیم‌کره که از حل به روش تسخیر شوک به دست آمده، به ابعاد شبکه بسیار حساس است و با افزایش ابعاد شبکه به $J_{max} = 200$ ، نتایج حل به نتایج حاصل از روش برازش شوک به‌ازء $J_{max} = 40$ نزدیک می‌شود و نتایج توزیع شار حرارتی سطح حاصل از روش برازش شوک به‌ازء ابعاد شبکه $J_{max} = 40$ و $J_{max} = 80$ است.

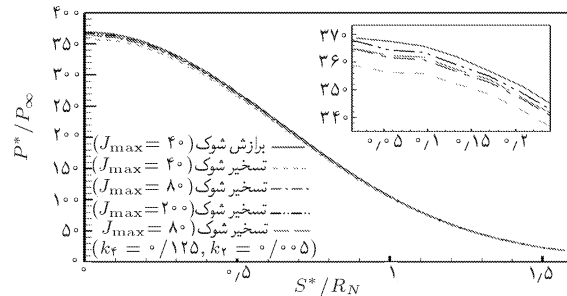
در شکل‌های ۸ تا ۱۱ تأثیر اندازه‌ی عبارات میرایی عددی بر توزیع فشار و شار حرارتی سطح حاصل از روش تسخیر شوک به‌ازء ابعاد شبکه‌ی $J_{max} = 80$ نیز بررسی شده است. با کاهش اندازه‌ی عبارات میرایی عددی ($k_1 = 0.125$ ، $k_2 = 0.05$) نسبت به مقادیر حدی ($k_1 = 0.25$ ، $k_2 = 0.1$)، نتایج حل به روش تسخیر شوک به نتایج دقیق روش برازش شوک نزدیک‌تر می‌شود. این اثر در روش تسخیر شوک ناشی از نقش اندازه‌ی عبارات میرایی عددی در ناحیه‌ی شوک برای شبکه نسبتاً درشت است که در این حالت، الگوریتم عددی مورد استفاده با دقت مرتبه‌ی دوم مرکزی، سبب پخش حل در ناحیه‌ی شوک در تعداد نقاط شبکه بیشتر می‌شود و موقعیت و قدرت شوک به‌دقت حاصل نمی‌شود. مطابق شکل، با کاهش عبارات میرایی عددی یا افزایش تعداد نقاط شبکه، اثر مورد نظر کاهش می‌یابد و ناپوستگی شوک در تعداد نقاط کم‌تر ولی با دقت بیشتر حاصل می‌شود. این اثر در نتایج مشخصات میدان حل (شکل‌های ۱۲ تا ۱۷) بهتر قابل مشاهده است.



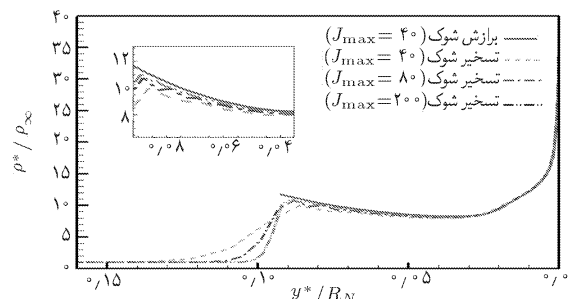
شکل ۹. مقایسه توزیع شار حرارتی سطح نیم‌کره برای گاز تعادلی حاصل از حل‌های برازش شوک و تسخیر شوک.



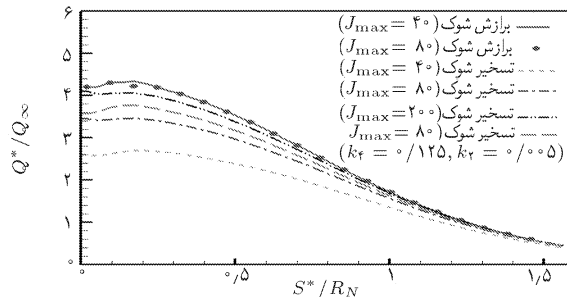
شکل ۱۲. مقایسه توزیع فشار در راستای زویه ۴۰ درجه برای گاز تعادلی حاصل از روش برازش شوک و تسخیر شوک.



شکل ۱۰. مقایسه توزیع فشار سطح نیم‌کره برای گاز ایده‌آل حاصل از حل‌های برازش شوک و تسخیر شوک.



شکل ۱۳. مقایسه توزیع چگالی در راستای زویه ۴۰ درجه برای گاز تعادلی حاصل از روش برازش شوک و تسخیر شوک.



شکل ۱۱. مقایسه توزیع شار حرارتی سطح نیم‌کره برای گاز ایده‌آل حاصل از حل‌های برازش شوک و تسخیر شوک.

در شکل‌های ۱۲ تا ۱۴ توزیع فشار، چگالی و درجه حرارت در جهت عمود بر سطح نیم‌کره و در راستای 40° درجه از خط سکون حاصل از حل مدل گاز تعادلی و برای دو روش تسخیر شوک و برازش شوک ارائه شده است. مشاهده می‌شود که نتایج حل شامل موقعیت شوک و مشخصات میدان برای روش تسخیر شوک با افزایش ابعاد شبکه به $J_{max} = 200$ به نتایج روش برازش شوک به‌آزاء $J_{max} = 40$ نزدیک می‌شود که معرف دقت نتایج روش برازش شوک با ابعاد شبکه‌ی کم‌تر و مؤثر بودن این روش در مقایسه با روش تسخیر شوک است.

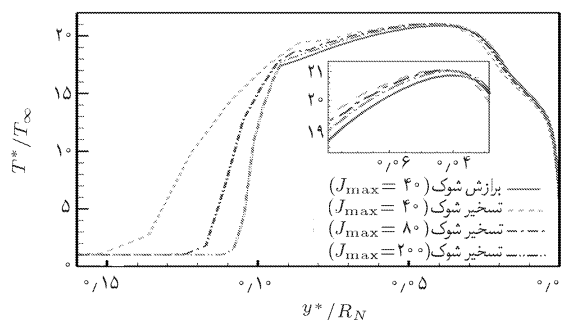
در شکل‌های ۱۵ تا ۱۷ نیز توزیع فشار، چگالی و درجه حرارت در جهت عمود بر سطح نیم‌کره و در راستای 40° درجه از خط سکون برای مدل گاز ایده‌آل و برای دو روش تسخیر شوک و برازش شوک ارائه شده است. روند نتایج مدل گاز ایده‌آل مشابه با روند نتایج مدل گاز تعادلی است، به‌طوری که با افزایش ابعاد شبکه حل به روش تسخیر شوک، نتایج حل به سمت نتایج دقیق‌تر روش برازش شوک میل می‌کند. کاهش درجه حرارت میدان حل گاز تعادلی و در نتیجه افزایش چگالی و کاهش ضخامت لایه‌ی شوک نسبت به مدل گاز ایده‌آل و نیز تغییرات کم میدان فشار در دو مدل گاز مشخص است.

مطابق شکل‌های ۱۲ و ۱۵، با کاهش اندازه‌ی عبارات میرایی عددی در روش تسخیر شوک، موقعیت شوک و پروفیل فشار به نتایج حل روش برازش شوک نزدیک می‌شود. با این وجود به‌دلیل کاهش عبارات میرایی عددی نسبت به مقادیر حدی، نوسانات حل در مجاور ناحیه‌ی شوک ناشی از اثرات پراکندگی حل عددی به‌ویژه در مدل گاز تعادلی (به‌دلیل کاهش ضخامت لایه‌ی شوک و فشردگی بیشتر شبکه‌ی مجاور ناحیه‌ی شوک) افزایش می‌یابد.

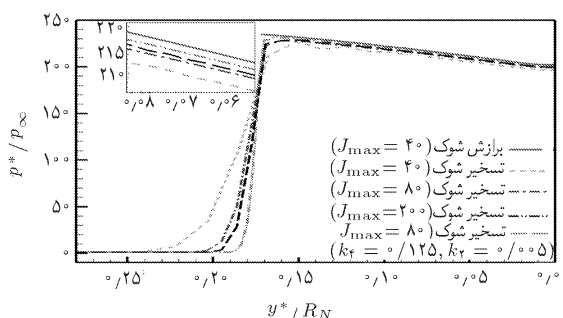
نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، شبیه‌سازی عددی جریان تقارن محوری، لزج و ماوراء صوت با اثرات گاز تعادلی روی دماغه‌ی اجسام سریش با استفاده از روش‌های برازش شوک و تسخیر شوک انجام شد و تأثیر نوع شرط مرزی شوک روی دقت نتایج میدان حل مورد بررسی قرار گرفت. حل عددی معادلات ناویر-استوکس لایه‌نازک (TILNS) توسط الگوریتم اختلاف محدود ضمنی و غیرتکراری بیم - وارمینگ انجام، و فرمول‌بندی مناسب برای اعمال شرط مرزی شوک در روش برازش شوک با اثرات گاز تعادلی ارائه شد. نتایج حاصل از روش برازش شوک - در مقایسه با روش تسخیر شوک - از حیث دقت و تلاش محاسباتی در جریان گاز تعادلی مورد ارزیابی قرار گرفت و نقش پارامترهای عددی مختلف (نظیر ابعاد شبکه و اندازه‌ی عبارات میرایی عددی) که تأثیر به‌سزایی در عملکرد و دقت الگوریتم‌های عددی بر مبنای روش تسخیر شوک دارند بررسی شد.

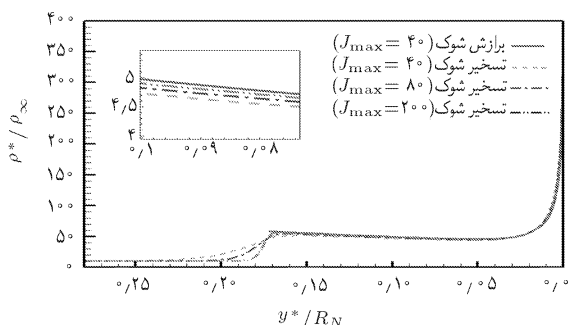
نتایج میدان جریان ماوراء صوت حول دماغه‌ی اجسام سریش نشان می‌دهد که موقعیت شوک و مشخصات میدان حل - به‌ویژه مشخصات سطح نظیر شار حرارتی حاصل از روش تسخیر شوک - به ابعاد شبکه‌ی محاسباتی بسیار حساس بوده و برای دستیابی به حل دقیق میدان جریان توسط روش تسخیر شوک، تعداد نقاط شبکه‌ی حل نسبت به روش برازش شوک به‌مراتب بیشتر است. این حساسیت در جریان ماوراء صوت با مدل گاز تعادلی بیشتر از مدل گاز ایده‌آل است. در حقیقت، در مدل گاز تعادلی به‌دلیل کاهش درجه حرارت میدان جریان و تغییرات کم متغیر فشار نسبت به نتایج مدل گاز ایده‌آل، چگالی میدان حاصل از مدل گاز تعادلی نسبت به مدل گاز ایده‌آل بیشتر است. این امر سبب کاهش ضخامت لایه‌ی شوک و در نتیجه کاهش ضخامت لایه‌ی مرزی در مقایسه با نتایج مدل گاز ایده‌آل



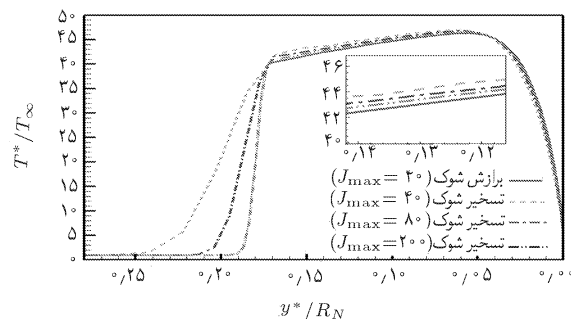
شکل ۱۴. مقایسه توزیع درجه حرارت در راستای زاویه 40° درجه برای گاز تعادلی حاصل از روش برازش شوک و تسخیر شوک.



شکل ۱۵. مقایسه توزیع فشار در راستای زاویه 40° درجه برای گاز ایده‌آل حاصل از روش برازش شوک و تسخیر شوک.



شکل ۱۶. مقایسه توزیع چگالی در راستای زاویه 40° درجه برای گاز ایده‌آل حاصل از روش برازش شوک و تسخیر شوک.



شکل ۱۷. مقایسه توزیع درجه حرارت در راستای زاویه 40° درجه برای گاز ایده‌آل حاصل از روش برازش شوک و تسخیر شوک.

p : فشار استاتیک
 e : انرژی داخلی بر واحد جرم
 k : ضریب هدایت حرارتی
 h : آنتالپی استاتیک
 γ : نسبت گرمای ویژه
 x, y : مختصات دکارتی
 A, B, K : ماتریس‌های ژکوبین بردارهای شار غیرلزج
 M, Q, N, W : ماتریس‌های ژکوبین بردارهای شار لزج
 t, τ : زمان
 u, v : مؤلفه‌های سرعت در مختصات کارتزین
 Re : عدد رینولدز
 μ : ضریب لزجت
 ξ, η : مختصات عمومی منحنی‌الخط
 U, V : مؤلفه‌های یادوردای سرعت

زیرنویس / بالانویس

∞ : شرایط جریان آزاد
 * : مقادیر با بعد

می‌شود و از این روش جریان گاز تعادلی به ابعاد شبکه برای دسترسی به حل دقیق مشخصات میدان جریان، به‌ویژه مقادیر روی سطح نظیر شار حرارتی، حساس‌تر است.

مطالعه‌ی حاضر نشان می‌دهد که استفاده از الگوریتم‌های عددی به‌همراه روش برازش شوک برای حل میدان جریان ماوراء صوت حول دماغه‌ی اجسام سریع به‌ویژه با اثرات گاز تعادلی، از نظر دقت نتایج و تلاش محاسباتی به‌دلیل کاهش ابعاد شبکه در مقایسه با روش تسخیر شوک بسیار مؤثر است. نتایج حاصل از روش برازش شوک به‌عنوان نتایج معتبر و دقیق برای ارزیابی و عملکرد نتایج الگوریتم‌های عددی بر پایه‌ی روش تسخیر شوک قابل استفاده خواهند بود.

فهرست علائم

a : سرعت صوت
 E : انرژی کل بر واحد حجم
 M : عدد ماخ
 Pr : عدد پرانتل
 RN : شعاع پخ دماغه
 T : درجه حرارت
 ρ : چگالی

پانویس

1. hypersonic flow
2. blunt body
3. shock fitting
4. shock capturing
5. thin-layer Navier-stokes
6. numerical dissipation
7. chemical equilibrium flow
8. Rankine-Hugoniot
9. shock layer

منابع

1. Montagne, J.L.; Yee, H.C.; Klopfer, G.H. and Vinokur, M. "Hypersonic blunt body computations including real gas effects", NASA TM-100074 (1988).
2. Wood, W.A. and Eberhardt, S. "Dual-code solution strategy for chemically-reacting hypersonic flows", AIAA Paper, 95-0158 (1995).
3. Wood, W.A.; Thompson, R.A. and Eberhardt, S. "Dual-code solution strategy for hypersonic flows", *Journal of Spacecraft and Rockets*, **33**(3), pp. 449-451 (Dec. 1995).
4. Ahmadikia, H. and Shirani, A., "Hypersonic flow over geometries with chemical reaction," 4th conference of Iranian Aerospace society, Iran, (2002).

5. Mirzaee, M., Khaleghi, H., and Karimian, S.M.H, "Up-wind method for numerical solution of three-dimensional parabolized navier-stokes including real gas effects", 6th Conference of Fluid Dynamics, Iran, (1998).
6. Beam, R.M. and Warming R.F. "An implicit factored scheme for the compressible navier-stokes equations", *AIAA Journal*, **16**(4), pp. 393-402 (1978).
7. Esfahanian, V. "Computation and stability analysis of laminar flow over a blunted cone in hypersonic flow", Ph.D. Thesis, The Ohio State University, Columbus, Ohio (March 1991).
8. Hejranfar, K.; Esfahanian, V. and Kamali-Moghadam, R. "Computation of hypersonic axisymmetric flows of equilibrium gas over blunt bodies", *13th Annual Conference of the Computational Fluid Dynamics*, Computational Fluid Dynamics Society of Canada (2005).
9. Hsieh, T. "Heat transfer calculation for hypersonic flow over blunt noses using an unsteady implicit scheme", *In Proceedings of the Second Notational Symposium on the Numerical Methods in Heat Transfer*, Hemisphere, Washington D.C., pp. 375-401(1982).
10. Hejranfar, K., Esfahanian, V. and Kamali Moghadam, R., "Numerical solution of equilibrium hypersonic axisymmetric flows over blunt noses", 9th Conference of Fluid Dynamics, Iran, (2005).

11. Srinivasan, S.; Tannehill, J.C. and Weilmuenster, K.J. "Simplified curve fits for the thermodynamic properties of equilibrium air", NASA RP-1-313 (1986).
12. Srinivasan, S.; Tannehill, J.C. and Weilmuenster, K.J., "Simplified curve fits for the transport properties of equilibrium air", NASA RP-1181 (1987).
13. Tannehill, J.C.; Ivalts, J.O. and Lawrence, S.L. "An up-wind parabolized navier-stokes code for real gas flows", AIAA Paper, 88-0713 (1988).
14. Vigneron, Y.C. "Hypersonic viscous flow of equilibrium air around a blunt body", M.S. Thesis, the Iowa State University, Iowa (1976).
15. Anderson, J.D. "Hypersonic and high temperature gas dynamics", MacGraw-Hill Book Company (1989).