

ارزیابی ارتعاش تیرها با استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر

رحمان جعفری (دانشجوی کارشناسی ارشد)

علی فرازنده* (دانشجوی کارشناسی ارشد)

علی نیکخو (استادیار)

دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه علم و فرهنگ تهران

فیاض رحیم‌زاده رفوئی (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی عمران شریف، (پاییز ۱۳۹۴)
دوره‌ی ۲ - ۳۱، شماره‌ی ۱/۳، ص. ۹۲-۸۳

در این نوشتار، معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش تیر با نظریه‌های اولر - برنولی، تیموشنکو و مرتبه - بالاتر تحت اثر جرم متحرک براساس اصل همپلتون به دست آمده است. به همین منظور، با استفاده از توابع شکل چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر و توابع مثلثاتی سازگار با شرایط مرزی، نسبت به تبدیل معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه‌ی زمان اقدام شده است. برای بررسی درستی نتایج، بسامدهای ارتعاش آزاد تیر با نظریه‌های مختلف برای شرایط مرزی ساده و گیردار حاصل از روش پیشنهادی با نتایج ارائه‌شده توسط سایر پژوهشگران مورد مقایسه قرار گرفته است. همچنین، پاسخ دینامیکی تیرها با نظریه‌های مختلف تحت اثر بارگذاری جرم متحرک به ازاء مقادیر متفاوت لاغری تیر پایه به دست آمده و با نتایج سایر مطالعات مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر، جرم متحرک، تیر اولر - برنولی، تیرهای با شکل پذیر برشی، پاسخ دینامیکی.

۱. مقدمه

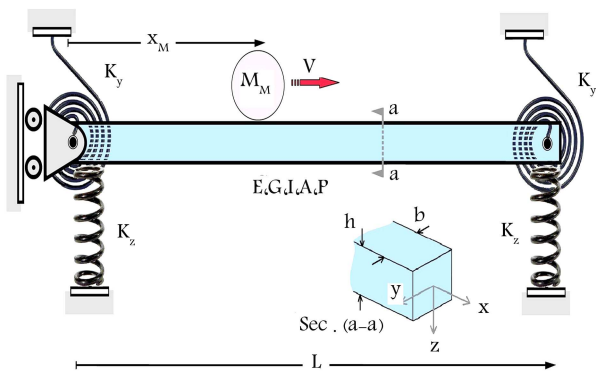
همواره یکی از مسائل مهم پیش روی مهندسان سازه، بررسی عملکرد ارتعاشی سیستم‌های سازه‌یی از جمله تیرهاست. اهمیت این مسئله در حرکت وسائط نقلیه‌یی چون اتومبیل‌ها و قطارها از روی پلی‌ها نمایان می‌شود؛ چراکه معمولاً در شبیه‌سازی رفتار یک سازه‌ی پل از مدل‌های گوناگون تیر با شرایط انتهایی مختلف استفاده می‌شود. مسئله‌ی مذکور از اواخر قرن ۱۹ تاکنون به صورت نظری و تجربی مورد بررسی و تجزیه و تحلیل بسیار قرار گرفته است.^[۱-۳] به عنوان یکی از ارزشمندترین و جامع‌ترین منابع در زمینه‌ی ارتعاش و رفتار دینامیکی تیرها می‌توان به کتاب فرایب،^[۴] اشاره کرد، که در آن با تأکید بر رفتار ارتعاشی و دینامیکی تیرهای یک و چند دهانه تحت اثر بارهای متحرک، به بررسی طیف گسترده‌یی از مسائل مکانیک جامدات پرداخته شده است.

به طور کلی، روش‌های به‌کار رفته در تحلیل رفتار دینامیکی تیرها به دو دسته‌ی تحلیلی/نیمه‌تحلیلی و عددی قابل تفکیک است. غالباً در مطالعات پژوهشگران، به‌منظور محاسبه‌ی بسامدهای طبیعی و شکل‌های مودی متناظر تیرها از روش‌های تحلیلی/نیمه‌تحلیلی شناخته‌شده‌یی چون گالرکین^۱ و رایلی - ریتز^۲ استفاده شده است. اصولاً این روش‌ها علی‌رغم سادگی و دقت بالا، محدودیت‌هایی در اعمال شرایط مرزی مختلف طبیعی و هندسی دارند. از طرفی، به‌کارگیری این روش‌ها در

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۵/۷، اصلاحیه ۱۳۹۲/۸/۲۰، پذیرش ۱۳۹۲/۱۰/۲۱.

تعیین رفتار دینامیکی تیرهای شکل‌پذیر برشی همواره با مشکل همراه بوده است. این نقصان تا حد زیادی با استفاده از شیوه‌های عددی برطرف شده است؛ اما در هر صورت، این روش‌ها نیز پیچیدگی‌های خاص خود را دارند و استفاده از آنها مستلزم صرف هزینه و زمان است. در این رابطه، در پژوهشی در سال ۱۹۸۹، با استفاده از یک روش عددی به نام DET^۳، به بررسی رفتار دینامیکی یک تیر اولر - برنولی^۴ با شرایط مختلف تکیه‌گاهی تحت اثر جرم متحرک پرداخته شده است.^[۵] البته در پژوهش مذکور، اثرات تغییرشکل برشی تیرها در نظر گرفته نشده است. پژوهشگران دیگری نیز با استفاده از روش عددی DQM^۵، به تحلیل ارتعاش آزاد و همچنین بررسی تغییرشکل‌ها و کمانش استاتیکی سازه‌های تیر و صفحه تحت شرایط مرزی مختلف پرداخته‌اند؛ اما به هر حال در کار ایشان، رفتار دینامیکی این سازه‌ها تحت بار خارجی بررسی نشده است.^[۶] در مطالعه‌ی دیگری نیز به‌منظور تعیین پارامترهای کلیدی حاکم بر پاسخ‌های دینامیکی تیرهای ساده‌ی اولر - برنولی تحت اثر بارهای متحرک، از یک روش تحلیلی استفاده شده است.^[۸] همچنین پژوهشگران دیگری با استفاده از روش DTM^۶، بسامدهای طبیعی و شکل‌های مودی تیر تیموشنکو^۷ را به صورت حل بسته‌ی سری ارائه کرده‌اند.^[۹] در مطالعه‌ی دیگری نیز با به‌کارگیری روش ADM^۸ به عنوان حل‌کننده‌ی قضیه‌ی مقدار - ویژه، مسائل ارتعاش آزاد تیرهای اولر - برنولی مختلف تحلیل و بررسی شده و بسامدهای طبیعی و شکل‌های مودی تیر با شرایط مرزی متفاوت به دست آمده است.^[۱۰] چندی بعد، برخی پژوهشگران



شکل ۱. شمای تیر تک‌دهانه‌ای ارتجاعی تحت بارگذاری جرم متحرک.

در معرض عبور جسمی متحرک با جرم M_M و سرعت ثابت V قرار گرفته است. تیر در یک انتها به صورت محوری مقید و در هر دو انتها، به فنزهای محوری و چرخشی با ثابت‌های K_y و K_z متصل شده است. به منظور تبیین معادلات حاکم بر ارتعاش تیرهای اولر - برنولی، تیموشنکو و مرتبه - بالاتر و همچنین استخراج ماتریس‌های دینامیکی، دستگاه مختصات xyz به مرکزیت انتهای سمت چپ تیر تعریف شده است. بر این اساس، محورهای x ، y و z به ترتیب موازی با راستای طولی تیر، پهنای تیر و شتاب جاذبه زمین در نظر گرفته شده‌اند. در ادامه، به منظور تعیین معادلات حاکم بر حرکت تیر تحت بارگذاری مدل جرم متحرک، از حالت کلی معادلات انرژی ارائه شده مطابق اصل همیلتون در مطالعه‌ی کیانی و همکاران،^[۱۸] برای نظریه‌های مختلف استفاده شده است. سپس در هر نظریه، ماتریس‌های جرم، میرایی، سختی و نیرو به صورت مجزا به دست آمده‌اند.

۱.۱.۲. نظریه‌ی تیر اولر - برنولی

ساده‌ترین نظریه در میان نظریه‌های تیر، نظریه‌ی اولر - برنولی است، چرا که در آن از اثرات برشی صرف نظر می‌شود. به عبارت دیگر، فرض بر این است که صفحه‌ی عمود بر محور طولی تیر، بعد از تغییرشکل تیر به صورت راست و قائم بر آن محور باقی می‌ماند.^[۱۹] به همین علت، یگانه مؤلفه‌ی مؤثر در تغییرشکل تیر، یک جابجایی در راستای قائم به صورت $w(x, t)$ است.

از آنجایی که انرژی پتانسیل کل تیر (π_t) ، معادل مجموع انرژی جنبشی (π_k) ، انرژی ناشی از کرنش ارتجاعی (π_s) و انرژی پتانسیل ناشی از حرکت جسم متحرک (π_f) است، این عبارات به صورت روابط ۱ بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \pi_t &= \pi_k + \pi_s + \pi_f \\ \pi_k &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left[A(\dot{w})^2 + I(\dot{w}')^2 \right] dx \\ \pi_s &= -\frac{1}{2} \int_0^L EI(w'')^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[K_z w^2 + K_y (w')^2 \right] d\Gamma \\ \pi_f &= \int_0^L M_M \left[g - (\ddot{w} + 2V\dot{w}' + V^2 w'') \right]_{x=x_M} \\ &\quad \times w(x_M, t) \delta(x - x_M) H(L - x_M) dx \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن‌ها، x_M نشان دهنده‌ی مکان جسم در لحظه‌ی t است. Γ و δ به ترتیب بیان‌گر شرایط مرزی و تابع دلتای دیراک است. شتاب جاذبه‌ی زمین معادل $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ و مقادیر H با استفاده از رابطه‌ی ۲ تعریف می‌شود. همچنین مقادیر K_y و K_z برای شرایط گوناگون تکیه‌گاهی در جدول ۱ ارائه شده است:

با اصلاح این روش، ضمن ارائه‌ی یک روش تقریبی جدید به نام MADM^۹، موفق به حل مسائل ارتعاش آزاد تیرهای یکنواخت تیموشنکو شدند.^[۱۱] در مطالعه‌ی مشابه دیگری نیز با استفاده از روش VIM^{۱۰}، اقدام به حل قضیه‌ی مقدار - ویژه در مسئله‌ی ارتعاش آزاد تیر اولر - برنولی تحت شرایط انتهایی مختلف شده است.^[۱۲]

از سوی دیگر، در سال ۱۹۸۵ روشی نیمه تحلیلی بر مبنای توابع متعامد به نام چندجمله‌ی‌های متعامد مفسر (COPs)^{۱۱} برای تحلیل مسائل ارتعاش آزاد صفحه ارائه شده است.^[۱۳، ۱۴] در آن برخلاف روش‌های عددی، توابع شکل مسئله بعد از ارضاء شرایط مرزی هندسی و طبیعی تیر به دست آمده است. مضاف بر این، در آنجا به دقت، کارآمدی و سادگی روش ارائه شده اشاره شده است که نهایتاً این امر موجب کاهش حجم محاسبات و افزایش سرعت عملیات ریاضی شده است. پژوهشگر دیگری بر مبنای روش مذکور توانست بسامدهای طبیعی و شکل‌های مودی یک تیر طره‌ی یکنواخت تحت اثر مجموعه‌ی از بارها را به دست آورد و نشان دهد که با به‌کارگیری مجموعه‌ی دلخواه از چندجمله‌ی‌های ارضاء‌کننده‌ی شرایط مرزی به عنوان توابع شکل تیر، می‌توان محاسبات مربوط به بسامدهای طبیعی مرتبه‌های بالاتر را بدون هیچ مشکلی انجام داد.^[۱۵]

همچنین، از میان کارهای شاخص صورت‌گرفته در این زمینه می‌توان به مطالعه‌ی دیگری اشاره کرد که در آن با به‌کارگیری مجموعه‌ی از چندجمله‌ی‌های متعامد مفسر مرزی، توابع شکل جابه‌جایی و چرخشی صفحات شکل‌پذیر برشی تخمین زده شده و نشان داده شده است که سهولت در تولید چنین توابعی به شدت در کارایی محاسبات تأثیر می‌گذارد.^[۱۶] اخیراً در زمینه کاربرد چندجمله‌ی‌های متعامد مفسر در ارتعاش تیرها مطالعات موفق انجام شده است که به ذکر قابلیت‌های توابع متعامد پرداخته شده است.^[۱۷، ۱۸] نکته قابل توجه در مورد روش ذکر شده، محدودیت این روش در تحلیل تیرهای ضخیم و با تغییرشکل برشی است که در کلیه مطالعات اشاره شده و پژوهش‌های انجام شده توسط پژوهشگران، از بررسی آن صرف نظر شده است.

بر همین اساس، در این مطالعه، به منظور به‌کارگیری روش‌های ساده‌تر و جامع‌تر برای بررسی ارتعاش و رفتار دینامیکی تیرهای شکل‌پذیر برشی، از یک روش نیمه تحلیلی مبتنی بر چندجمله‌ی‌های متعامد مفسر و توابع مثلثاتی سازگار با شرایط مرزی استفاده شده است. در واقع با به‌کارگیری این روند می‌توان به دقت و سادگی روش‌های کاملاً تحلیلی و همچنین کاربردپذیری روش‌های صرفاً عددی دست یافت. در ادامه، ماتریس‌های دینامیکی و معادلات حاکم بر حرکت تیرهای اولر - برنولی، تیموشنکو و مرتبه - بالاتر^{۱۲} تحت بارگذاری مدل جرم متحرک با استفاده از اصل همیلتون^{۱۳} به دست آمده و سپس، نسبت به تبدیل معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی اقدام شده است. در آخر، پس از بررسی دقت و نرخ همگرایی روش ارائه شده در برآورد بسامدهای طبیعی تیر تحت نظریه‌ها و شرایط تکیه‌گاهی متداول، پاسخ دینامیکی تیرها در اثر بارگذاری یک جرم متحرک مورد مطالعه‌ی پارامتری قرار گرفته است.

۲. معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسئله

۱.۲. مدل‌سازی ریاضی

تیری یکنواخت و هموزن مطابق شکل ۱ به طول L با سطح مقطع A ، مدول ارتجاعی E ، مدول برشی G ، چگالی مقطع ρ و ممان اینرسی دوم مقطع I

جدول ۱. مقادیر K_y و K_z برای شرایط تکیه‌گاهی تیرها.

شرایط تکیه‌گاهی	انتهای گیردار	انتهای ساده
K_y	∞	∞
K_z	\circ	∞

$$\begin{aligned} \pi_k &= \frac{1}{\nu} \int_0^L \rho [A(\dot{w})^\nu + I(\dot{\theta})^\nu] dx \\ \pi_s &= -\frac{1}{\nu} \int_0^L [EI\theta'^\nu + K_s GA(w' - \theta)^\nu] dx \\ &\quad - \frac{1}{\nu} \int_\Gamma [K_z w^\nu + K_y \theta^\nu] d\Gamma \\ \pi_f &= \int_0^L M_M [g - (\ddot{w} + \nu V \dot{w}' + V^\nu w'')] \Big|_{x=x_M} \\ &\quad \times w(x_M, t) \delta(x - x_M) H(L - x_M) dx \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن‌ها، K_s ، ضریب اصلاح برشی مختص نظریه‌ی تیر تیموشنکو است. در تحلیل تیر تیموشنکو برای تعیین مقادیر مجهولات معادلات ۵، یعنی میدان جابه‌جایی و چرخشی w و θ ، از روابط ۶ استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) w_j(t) \\ \theta(x, t) &= \sum_{j=1}^N \psi_j(x) \theta_j(t) \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن‌ها، توابع شکل $\varphi_j(x)$ و $\psi_j(x)$ طبق روش ارائه‌شده در بخش ۲.۲. برای شرایط تکیه‌گاهی متفاوت و نظریه‌های مختلف قابل محاسبه‌اند. تعیین مقادیر $w_j(t)$ و $\theta_j(t)$ مستلزم حل معادله‌ی ۳ است، که روش محاسبه در بخش ۳.۲. توضیح داده شده است. در این معادله، ماتریس‌های دینامیکی تیر تیموشنکو به صورت مجموعه روابط ۷ بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{ww} & \mathbf{M}^{w\theta} \\ \mathbf{M}^{\theta w} & \mathbf{M}^{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{ww} & \mathbf{C}^{w\theta} \\ \mathbf{C}^{\theta w} & \mathbf{C}^{\theta\theta} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{ww} & \mathbf{K}^{w\theta} \\ \mathbf{K}^{\theta w} & \mathbf{K}^{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^w \\ \mathbf{f}^\theta \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_j = \begin{Bmatrix} w_j(t) \\ \theta_j(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن، زیر-ماتریس‌های غیر صفر به صورت مجموعه روابط ۸ تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}^{ww}]_{ij} &= \int_0^L \rho A \varphi_i \varphi_j dx + M_M \varphi_i(x_M) \varphi_j(x_M) H(L - x_M) \\ [\mathbf{M}^{\theta\theta}]_{ij} &= \int_0^L \rho I \psi_i \psi_j dx \\ [\mathbf{C}^{ww}]_{ij} &= \nu M_M V \varphi_i(x_M) \varphi_j'(x_M) H(L - x_M) \\ [\mathbf{K}^{ww}]_{ij} &= \int_0^L K_s GA \varphi_i' \varphi_j' dx \\ &\quad + M_M V^\nu \varphi_i(x_M) \varphi_j''(x_M) H(L - x_M) \\ [\mathbf{K}^{w\theta}]_{ij} &= - \int_0^L K_s GA \varphi_i' \psi_j dx \\ [\mathbf{K}^{\theta w}]_{ij} &= \int_0^L K_s GA \psi_i' \varphi_j dx \\ [\mathbf{K}^{\theta\theta}]_{ij} &= \int_0^L (K_s GA \psi_i \psi_j + EI \psi_i' \psi_j') dx \\ [\mathbf{f}^w]_j &= M_M g \varphi_j(x_M) H(L - x_M) \end{aligned} \quad (8)$$

$$H(x) = \begin{cases} \circ & x < \circ \\ \circ, \delta & x = \circ \\ 1 & x > \circ \end{cases} \quad (2)$$

نکته قابل ذکر در مورد کلیه معادلات ارائه شده در این پژوهش این است که منظور از $'$ و $''$ به ترتیب مشتق اول و مشتق دوم توابع نسبت به x و منظور از $\dot{}$ و $\ddot{}$ به ترتیب مشتق اول و مشتق دوم توابع نسبت به t یا زمان است.

تنها پارامتر مجهول روابط ۱، یعنی $w(x, t)$ ، با استفاده از رابطه‌ی $w(x, t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) w_j(t)$ بسط داده می‌شود که در آن تابع تغییرشکل مود زام است، که مطابق روش ارائه‌شده در بخش ۲.۲. قابل محاسبه است. N تعداد توابع شکل لازم برای تحلیل تیر است. همچنین در این رابطه، برای به دست آوردن مقادیر $w_j(t)$ نیاز به حل معادله‌ی دیفرانسیلی در رابطه‌ی ۳ است، که روند حل در بخش ۳.۲. شرح داده شده است:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3)$$

که در آن، عبارات متناظر با ماتریس‌های جرم (\mathbf{M})، میرایی القایی (\mathbf{C})، سختی (\mathbf{K}) و نیرو (\mathbf{f}) به صورت مجموعه روابط ۴ است:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]_{ij} &= \int_0^L \rho (A \varphi_i \varphi_j + I \varphi_i' \varphi_j') dx \\ &\quad + M_M \varphi_i(x_M) \varphi_j(x_M) H(L - x_M) \\ [\mathbf{C}]_{ij} &= \nu M_M V \varphi_i(x_M) \varphi_j'(x_M) H(L - x_M) \\ [\mathbf{K}]_{ij} &= \int_0^L EI \varphi_i'' \varphi_j'' dx \\ &\quad + M_M V^\nu \varphi_i(x_M) \varphi_j''(x_M) H(L - x_M) \\ [\mathbf{f}]_j &= M_M g \varphi_j(x_M) H(L - x_M) \\ [\mathbf{x}]_j &= w_j(t) \end{aligned} \quad (4)$$

۲.۱.۲. نظریه‌ی تیر تیموشنکو

در تحلیل تیر تیموشنکو برخلاف نظریه‌ی تیر اولر - برنولی، تغییرشکل‌های ناشی از کرنش برشی و اینرسی دورانی در نظر گرفته می‌شود. به عبارتی، بعد از تغییرشکل تیر، فرض عمودبودن صفحه‌ی جابه‌جایی بر محور طولی تیر دیگر رعایت نمی‌شود؛ اما این صفحه هم‌چنان به صورت راست و بدون اعوجاج می‌ماند.^[۲۰] از این رو، تغییرشکل تیر به صورت یک میدان جابه‌جایی در راستای قائم مانند $w(x, t)$ و یک میدان چرخشی به شکل $\theta(x, t)$ لحاظ می‌شود. برای استخراج ماتریس‌های دینامیکی،

۳.۱.۲. نظریه‌ی تیر برشی مرتبه - بالاتر

در این نظریه، اغلب محدودیت‌های مربوط به فرضیات نظریه‌ی تیر اولر - برنولی برطرف شده است. به عبارت دیگر، بعد از تغییر شکل تیر، صفحه‌ی جابه‌جایی دچار اعوجاج می‌شود و دیگر قائم بر محور طولی تیر نیست. در تحلیل تیر برشی مرتبه - بالاتر، تغییرات ناشی از کرنش برشی و اینرسی دورانی با دقت بالاتری نسبت به نظریه‌ی تیموشنکو اعمال می‌شود. به همین علت، جابه‌جایی محوری تیر با توابع مرتبه‌ی سوم یا پنجم و جابه‌جایی جانبی با توابع مرتبه‌ی دوم یا سوم بیان می‌شود.^[۲۱] در این نظریه، تغییر شکل تیر نیز شامل یک میدان جابه‌جایی در راستای قائم به شکل $w(x, t)$ و یک میدان چرخشی به صورت $\Psi(x, t)$ است. در اینجا نیز به منظور دستیابی به ماتریس‌های دینامیکی، از معادلات انرژی به دست آمده در مجموعه روابط ۹ استفاده شده است:

$$\begin{aligned} \pi_k &= \int_0^L \left[I_x \dot{w}' + I_r \dot{\Psi}' - \gamma \alpha I_r \dot{\Psi} (\dot{\Psi} + \dot{w}') \right. \\ &\quad \left. + \alpha' I_r (\dot{\Psi} + \dot{w}')^2 \right] dx \\ \pi_s &= - \int_0^L \left[J_r \Psi'' - \gamma \alpha J_r \Psi' (\Psi' + w'') \right. \\ &\quad \left. + \alpha' J_r (\Psi' + w'')^2 + k(\Psi + w')^2 \right] dx \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left[K_z w' + K_y \Psi' \right] d\Gamma \\ \pi_f &= \int_0^L M_M \left[g - (\ddot{w} + \gamma V \dot{w}' + V' w'') \right]_{x=x_M} \\ &\quad \times w(x_M, t) \delta(x - x_M) H(L - x_M) dx \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن $\alpha = 4/3h^2$ و h ضخامت مقطع تیر است. مضاف بر این از مجموعه روابط ۱۰ نیز استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} k &= \int_A G (1 - \gamma \alpha z^2) dA \\ I_n &= \int_A \rho z^n dA; \quad n = 0, 2, 4, 6 \\ J_n &= \int_A E z^n dA; \quad n = 2, 4, 6 \end{aligned} \quad (10)$$

همچنین، w و Ψ به صورت روابط ۱۱ قابل تجزیه هستند:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) w_j(t) \\ \Psi(x, t) &= \sum_{j=1}^N \psi_j(x) \Psi_j(t) \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن‌ها، توابع شکل $\varphi_j(x)$ و $\psi_j(x)$ مطابق روش ارائه شده در بخش ۲.۲ به دست می‌آیند. $w_j(t)$ و $\Psi_j(t)$ از حل معادله‌ی دیفرانسیل ۳ به دست می‌آیند، که روش حل در بخش ۳.۲ به تفصیل بیان شده است. از طرفی، ماتریس‌های دینامیکی معادله‌ی ۳ در تیر مرتبه - بالاتر به صورت مجموعه روابط ۱۲ تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{ww} & \mathbf{M}^{w\Psi} \\ \mathbf{M}^{\Psi w} & \mathbf{M}^{\Psi\Psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{ww} & \mathbf{C}^{w\Psi} \\ \mathbf{C}^{\Psi w} & \mathbf{C}^{\Psi\Psi} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{ww} & \mathbf{K}^{w\Psi} \\ \mathbf{K}^{\Psi w} & \mathbf{K}^{\Psi\Psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^w \\ \mathbf{f}^{\Psi} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_j = \begin{Bmatrix} w_j(t) \\ \Psi_j(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن‌ها، زیر - ماتریس‌های غیر صفر دینامیکی به صورت مجموعه روابط ۱۳ استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}^{ww}]_{ij} &= \int_0^L (I_x \varphi_i \varphi_j + \alpha' I_r \varphi_i' \varphi_j') dx \\ &\quad + M_M \varphi_i(x_M) \varphi_j(x_M) H(L - x_M) \\ [\mathbf{M}^{w\Psi}]_{ij} &= \int_0^L (\alpha' I_r \varphi_i - \alpha I_r) \varphi_i' \psi_j dx \\ [\mathbf{M}^{\Psi w}]_{ij} &= - \int_0^L (\alpha' I_r \varphi_i - \alpha I_r) \psi_i' \varphi_j dx \\ [\mathbf{M}^{\Psi\Psi}]_{ij} &= \int_0^L (I_r - \gamma \alpha I_r + \alpha' I_r) \psi_i \psi_j dx \\ [\mathbf{C}^{ww}]_{ij} &= \gamma M_M V \varphi_i(x_M) \varphi_j'(x_M) H(L - x_M) \\ [\mathbf{K}^{ww}]_{ij} &= \int_0^L (k \varphi_i' \varphi_j' + \alpha' J_r \varphi_i'' \varphi_j'') dx \\ &\quad + M_M V^2 \varphi_i(x_M) \varphi_j''(x_M) H(L - x_M) \\ [\mathbf{K}^{w\Psi}]_{ij} &= \int_0^L [k \varphi_i' \psi_j + (\alpha' J_r - \alpha J_r) \varphi_i'' \psi_j'] dx \\ [\mathbf{K}^{\Psi w}]_{ij} &= - \int_0^L [k \psi_i' \varphi_j + (\alpha' J_r - \alpha J_r) \psi_i'' \varphi_j'] dx \\ [\mathbf{K}^{\Psi\Psi}]_{ij} &= \int_0^L [(J_r - \gamma \alpha J_r + \alpha' J_r) \psi_i' \psi_j' + k \psi_i \psi_j] dx \\ [\mathbf{f}^w]_j &= M_M g \varphi_j(x_M) H(L - x_M) \end{aligned} \quad (13)$$

۲.۲. تعیین توابع شکل

در این بخش، برای تعیین توابع شکل مسئله از روشی مبتنی بر چندجمله‌ی‌های متعامد مفسر استفاده شده است.^[۲۱] طبق این روش، برای تعیین توابع شکل $\varphi_j(x)$ و $\psi_j(x)$ در تیرهای اولر - برنولی، تیموشنکو و مرتبه - بالاتر، باید یک تابع شکل اولیه‌ی ارضاءکننده‌ی شرایط مرزی هندسی و طبیعی تیر به صورت $\varphi_1(x)$ و $\psi_1(x)$ حدس زد. در جدول ۲، توابع شکل $\varphi_1(x)$ و $\psi_1(x)$ برای تیرهای مذکور و تحت شرایط تکیه‌گاهی متداول ساده - ساده، گیردار - گیردار - ساده ارائه شده است. در جدول مذکور، توابع شکل جابه‌جایی $\varphi_1(x)$ ، به صورت تابع چندجمله‌ی‌یی از مرتبه‌ی چهار و توابع شکل چرخشی $\psi_1(x)$ ، به صورت تابع مثلثاتی سازگار با شرایط مرزی هستند. بر مبنای روش چندجمله‌ی‌های متعامد مفسر، حصول جواب دقیق مسئله از طریق افزایش تعداد توابع شکل تیر صورت می‌گیرد. در اینجا، این کار با روند گِرم - اشمیت^{۱۴} انجام گرفته است. براساس این روش، توابع شکل مرتبه - بالاتر تیر مطابق روابط ۱۴ و ۱۵ تولید می‌شود:^[۲۱]

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= (x - B_2) \varphi_1(x) \\ \varphi_N(x) &= (x - B_N) \varphi_{N-1}(x) - C_N \varphi_{N-2}(x) \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن، N تعداد چندجمله‌ی‌های لازم برای ایجاد دقت مورد نیاز در جواب مسئله است. همچنین:

$$\begin{aligned} B_N &= \frac{\int_0^L x [\varphi_{N-1}(x)]' W(x) dx}{\int_0^L [\varphi_{N-1}(x)]' W(x) dx} \\ C_N &= \frac{\int_0^L x \varphi_{N-1}(x) \varphi_{N-2}(x) W(x) dx}{\int_0^L [\varphi_{N-2}(x)]' W(x) dx} \end{aligned} \quad (15)$$

جدول ۲. توابع شکل $\varphi_1(x)$ و $\psi_1(x)$ تیرهای اولر - برنولی و شکل پذیر برشی (تیموشنکو و مرتبه - بالاتر) تحت شرایط تکیه‌گاهی مختلف.

ساده - گیردار	گیردار - گیردار	ساده - ساده
$\varphi_1 = \frac{1.1517}{\sqrt{L}} \left[1.5 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2.5 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right]$ $\psi_1 = \sqrt{\frac{x}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$	$\varphi_1 = \frac{2.051}{\sqrt{L}} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right]$ $\psi_1 = \sqrt{\frac{x}{L}} \sin\left(\frac{1.5\pi x}{L}\right)$	$\varphi_1 = \frac{1.75 \times 0.81}{\sqrt{L}} \left[\left(\frac{x}{L}\right) - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right]$ $\psi_1 = \sqrt{\frac{x}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

و جای‌گذاری آن‌ها در معادله‌ی ۲۰، رابطه‌ی ۲۲ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{X}(t_0) \quad (22)$$

و برای محاسبه‌ی $\mathbf{U}(t)$ از ماتریس انتقالی Φ (رابطه‌ی ۲۳) استفاده می‌شود:

$$\Phi(t, \tau) \approx \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(\tau) \quad (23)$$

و در نتیجه رابطه‌ی ۲۴ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, \tau) \mathbf{X}(\tau) \quad (24)$$

با استفاده از حل تقریبی ارائه‌شده در منبع^[۲۳] مقدار Φ توسط یک ماتریس نمایی (رابطه‌ی ۲۵) جای‌گذاری می‌شود:

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = e^{\mathbf{A}(t_k) \Delta(t_k)} \quad (25)$$

که در آن، $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ یک گام زمانی کوچک در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، معادله‌ی ۱۸ با فرض موجود بودن $\mathbf{A}^{-1}(t_k)$ به رابطه‌ی ۲۶ تبدیل می‌شود:

$$\mathbf{X}(t_{k+1}) = \mathbf{A}_1(t_k) \mathbf{X}(t_k) + \mathbf{F}_1(t_k) \quad (26)$$

به طوری که $\mathbf{A}_1(t_k)$ و $\mathbf{F}_1(t_k)$ از رابطه‌ی ۲۷ محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{A}_1(t_k) \cong e^{\mathbf{A}(t_k) \Delta(t_k)}$$

$$\mathbf{F}_1(t_k) \cong [\mathbf{A}_1(t_k) - \mathbf{I}] \mathbf{A}^{-1}(t_k) \mathbf{F}(t_k) \quad (27)$$

نهایتاً با حل عددی معادله‌ی ۲۶، می‌توان مقدار $\mathbf{X}(t)$ را در هر لحظه‌ی از زمان به‌دست آورد. در واقع، یافتن این مقدار منجر به تعیین $\mathbf{x}(t)$ یا همان مجهول اصلی ذکرشده در بخش ۱.۲.۱.۲ ($w_j(t)$ ، $\Psi_j(t)$ و $\theta_j(t)$) می‌شود.

۳. مطالعات پارامتری

۳.۱. مثال ۱

در این مثال، یک تیر دو سر ساده و یک تیر دو سر گیردار تک‌دهانه‌ی یکنواخت به‌منظور بررسی دقت و کارایی روش ارائه‌شده در محاسبه‌ی بسامدهای طبیعی تیرها (ω) در نظر گرفته شده است. بر این اساس، ابتدا نرخ همگرایی روش حاضر در تعیین بسامدهای بدون بُعد (λ_n) تیرهای اولر - برنولی، تیموشنکو و مرتبه - بالاتر تحت شرایط تکیه‌گاهی مذکور و نسبت ارتفاع به طول دهانه‌ی تیر مساوی ۱/۰۷ ($h/L = 0.7$)، مورد آزمایش قرار گرفته و سپس به‌منظور صحت‌سنجی نتایج، بسامدهای بدون بُعد تیر تیموشنکو به ازاء نسبت‌های مختلف ارتفاع به طول دهانه‌ی تیر، با مقادیر متناظر در منبع^[۲۴]، که بر مبنای یک روش نیمه‌تحلیلی به نام روش شبه‌طیفی به‌دست آمده است، مقایسه شده‌اند. برای محاسبه‌ی بسامدهای بدون بُعد

که در آن، $W(x)$ یک تابع وزن است. این تذکر لازم است که توابع چندجمله‌ی تولیدشده توسط این روند متعامد هستند (رابطه‌ی ۱۶):

$$\int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) W(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{if } i \neq j \\ \neq 0 & \text{if } i = j \end{cases} \quad (16)$$

نکته‌ی حائز اهمیت در ساخت توابع شکل مرتبه - بالاتر تابع $\psi_1(x)$ ، این است که برای به‌کارگیری روند گرم - اشمیمت، ابتدا لازم است بسط مک‌لورن این توابع به‌دست آید (شش جمله‌ی اول کافی است)، سپس با استفاده از روابط ۱۴ و ۱۵، توابع شکل مرتبه - بالاتر $\psi_N(x)$ همانند توابع $\varphi_N(x)$ تولید شود.

۳.۲. حل معادلات دیفرانسیل در حوزه‌ی زمان

همان‌طور که در بخش ۱.۲.۱.۲ ذکر شد، برای یافتن میدان‌های جابه‌جایی و چرخشی تیر در حوزه‌ی زمان، نیاز به حل معادله‌ی دیفرانسیل حرکت است. اگر معادله‌ی کلی حرکت به‌صورت رابطه‌ی ۱۷ فرض شود:

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (17)$$

آن‌گاه برای سهولت حل، آن را به فضای حالت انتقال می‌دهند و سپس معادله به‌صورت رابطه‌ی ۱۸ بازنویسی می‌شود:^[۲۲]

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t) \quad (18)$$

که در آن، $\mathbf{A}(t)$ ، $\mathbf{X}(t)$ و $\mathbf{F}(t)$ از روابط ۱۹ به‌دست می‌آیند:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (19)$$

در حقیقت با تعیین مقدار بردار حالت $\mathbf{X}(t)$ ، می‌توان به دامنه‌ی تغییرشکل تیر و همچنین سرعت متناظر با آن دست یافت. در زیر، توضیحات تکمیلی در رابطه با نحوه‌ی به‌دست‌آمدن $\mathbf{X}(t)$ ارائه شده است. اگر $\mathbf{X}(t)$ به‌صورت رابطه‌ی ۲۰ باشد:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(t_0) \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(\tau) [\mathbf{F}(\tau)] \right\} d\tau \quad (20)$$

آن‌گاه، $\mathbf{U}(t)$ یک ماتریس تبدیل بنیادی است و با استفاده از رابطه ۲۱:

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{U}(t_0) = \mathbf{I}_{2N}. \quad (21)$$

جدول ۵. آزمون همگرایی پنج λ_n اول - تیر دوسرگیردار مرتبه بالاتر.

λ_n	تعداد توابع شکل				
	۱۵	۱۳	۱۰	۷	۵
$(\lambda_n)_1$	۴,۷۲۹	۴,۷۲۹	۴,۷۲۹	۴,۷۲۹	۴,۷۲۹
$(\lambda_n)_2$	۷,۸۴۹	۷,۸۴۹	۷,۸۴۹	۷,۸۴۹	۷,۸۷۳
$(\lambda_n)_3$	۱۰,۹۸۷	۱۰,۹۸۶	۱۰,۹۸۷	۱۰,۹۹۱	۱۱,۱۶۰
$(\lambda_n)_4$	۱۴,۱۱۹	۱۴,۱۱۹	۱۴,۱۲۰	۱۴,۲۴۸	۱۵,۶۹۶
$(\lambda_n)_5$	۱۷,۲۵۰	۱۷,۲۴۸	۱۷,۲۵۷	۱۸,۴۱۰	۵۲,۲۹۹

جدول ۶. آزمون همگرایی پنج λ_n اول - تیر دوسر ساده اولر - برنولی.

λ_n	تعداد توابع شکل				
	۱۵	۱۳	۱۰	۷	۵
$(\lambda_n)_1$	۳,۱۴۲	۳,۱۴۲	۳,۱۴۲	۳,۱۴۲	۳,۱۴۲
$(\lambda_n)_2$	۶,۲۸۳	۶,۲۸۳	۶,۲۸۳	۶,۲۸۳	۶,۲۸۵
$(\lambda_n)_3$	۹,۴۲۳	۹,۴۲۳	۹,۴۲۳	۹,۴۲۳	۹,۴۵۷
$(\lambda_n)_4$	۱۲,۵۶۲	۱۲,۵۶۲	۱۲,۵۶۲	۱۲,۷۱۶	۱۵,۶۳۱
$(\lambda_n)_5$	۱۵,۷۰۰	۱۵,۷۰۰	۱۵,۷۱۹	۱۶,۱۳۲	۲۱,۳۰۶

جدول ۷. آزمون همگرایی پنج λ_n اول - تیر دوسر ساده تیموشنکو.

λ_n	تعداد توابع شکل				
	۱۵	۱۳	۱۰	۷	۵
$(\lambda_n)_1$	۳,۱۴۱	۳,۱۴۱	۳,۱۴۱	۳,۱۴۱	۳,۱۴۱
$(\lambda_n)_2$	۶,۲۸۲	۶,۲۸۲	۶,۲۸۲	۶,۲۸۲	۶,۲۹۱
$(\lambda_n)_3$	۹,۴۲۱	۹,۴۲۱	۹,۴۲۱	۹,۴۲۲	۹,۵۵۰
$(\lambda_n)_4$	۱۲,۵۵۸	۱۲,۵۵۸	۱۲,۵۵۸	۱۳,۲۱۷	۳۶,۹۵۳
$(\lambda_n)_5$	۱۵,۶۹۰	۱۵,۶۹۰	۱۵,۷۳۶	۱۷,۶۹۳	۴۷,۶۳۵

جدول ۸. آزمون همگرایی پنج λ_n اول - تیر دوسر ساده مرتبه بالاتر.

λ_n	تعداد توابع شکل				
	۱۵	۱۳	۱۰	۷	۵
$(\lambda_n)_1$	۳,۱۴۱	۳,۱۴۱	۳,۱۴۱	۳,۱۴۱	۳,۱۴۱
$(\lambda_n)_2$	۶,۲۸۳	۶,۲۸۳	۶,۲۸۳	۶,۲۸۲	۶,۲۹۰
$(\lambda_n)_3$	۹,۴۲۴	۹,۴۲۴	۹,۴۲۴	۹,۴۲۳	۹,۵۳۱
$(\lambda_n)_4$	۱۲,۵۶۴	۱۲,۵۶۴	۱۲,۵۶۴	۱۳,۱۱۳	۳۴,۹۷۹
$(\lambda_n)_5$	۱۵,۶۰۰	۱۵,۶۰۰	۱۵,۷۶۰	۱۷,۳۹۱	۴۵,۰۸۲

نتایج حاصل از به‌کارگیری ۳۵ تابع شکل چبیشیف^{۱۵} در روش شبه‌طیفی،^[۲۴] تحت شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده و دو سرگیردار به‌ترتیب در جدول‌های ۹ و ۱۰ ارائه شده است. همان‌گونه که مشخص است، این نتایج، علی‌رغم به‌کارگیری تعداد توابع شکل کمتر در مقابل روش شبه‌طیفی، تطابق قابل قبولی با نتایج مطالعه‌ی مذکور،^[۲۴] دارد.

۲.۳. مثال ۲.

در این مثال به بررسی و تحلیل رفتار دینامیکی تیرهای اولر - برنولی، تیموشنکو و مرتبه - بالاتر تحت اثر یک جرم متحرک پرداخته شده است. از این رو، تیری تک‌دهانه، به طول ۱۰ متر، با مقطع مستطیلی شکل به ابعاد $h = 0.1$ m و $b = r\sqrt{12}$ (۱) r

تیر، ابتدا نیاز به تعیین بسامدهای طبیعی تیر است که در این راستا می‌توان از رابطه‌ی $x(t) = \bar{x} \cdot e^{i\omega t}$ استفاده کرد. به این منظور، با جای‌گذاری این رابطه در معادله‌ی ۳ و همچنین با فرض ارتعاش آزاد تیر بدون میرایی، معادله‌ی مقدار - ویژه‌ی ۲۸ حاصل شده است:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \bar{x} = 0 \quad (28)$$

با حل معادله‌ی ۲۸ از طریق روش‌های مرسوم، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر به‌دست خواهند آمد، که مقادیر ویژه بیان‌گر بسامدهای طبیعی سازه هستند و بردارهای ویژه، معرف مودهای ارتعاش آزاد متناظر بسامدهای طبیعی هستند. در نهایت، با جای‌گذاری بسامدهای طبیعی به‌دست‌آمده در رابطه‌ی ۲۹، مقادیر بسامد بدون بُعد متناظر با λ آمین مود ارتعاشی تیر به‌دست می‌آید:

$$(\lambda_n)_i = \left(\omega_i L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} \right)^{1/2} \quad (29)$$

دیگر فرضیات مورد نیاز برای حل معادله‌ی ۳۰ عبارت است از: $m = \rho b h$ و $G = 77.9 \times 10^{10} \text{ N.m}^{-2}$ ، $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$ که در آن $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ و b عرض مقطع است که می‌تواند برابر هر مقدار دلخواهی باشد. همچنین در اینجا، ضریب اصلاح برشی تیر تیموشنکو (K_s) برای مقطع مستطیلی برابر 0.833 فرض می‌شود.

در جدول‌های ۳ تا ۵، نتایج مربوط به ۵ بسامد بدون بُعد اول تیرهای اولر - برنولی، تیموشنکو و مرتبه - بالاتر تحت شرایط تکیه‌گاهی گیردار - گیردار برای تعداد توابع شکل مختلف ارائه شده است. همچنین، این نتایج برای شرایط تکیه‌گاهی ساده - ساده در جدول‌های ۶ تا ۸ به‌دست آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سرعت همگرایی نتایج به‌دست‌آمده طبق روش ارائه شده در مطالعه حاضر مطلوب است؛ زیرا با استفاده از ۱۳ تابع شکل، همگرایی لازم (تا سه رقم اعشار) به‌دست آمده است.

مضاف بر این، نتایج به‌دست‌آمده توسط ۱۳ تابع شکل برای ۵ بسامد بدون بُعد اول تیر تیموشنکو با نسبت‌های متفاوت ارتفاع به طول دهانه‌ی تیر، جهت مقایسه با

جدول ۳. آزمون همگرایی پنج λ_n اول - تیر دو سرگیردار اولر - برنولی.

λ_n	تعداد توابع شکل				
	۱۵	۱۳	۱۰	۷	۵
$(\lambda_n)_1$	۴,۷۳۰	۴,۷۳۰	۴,۷۳۰	۴,۷۳۰	۴,۷۳۰
$(\lambda_n)_2$	۷,۸۵۲	۷,۸۵۲	۷,۸۵۲	۷,۸۵۲	۷,۸۵۴
$(\lambda_n)_3$	۱۰,۹۹۳	۱۰,۹۹۳	۱۰,۹۹۳	۱۰,۹۹۳	۱۱,۰۰۴
$(\lambda_n)_4$	۱۴,۱۳۲	۱۴,۱۳۲	۱۴,۱۳۲	۱۴,۱۷۷	۱۴,۸۹۱
$(\lambda_n)_5$	۱۷,۲۶۹	۱۷,۲۶۹	۱۷,۲۷۴	۱۷,۴۰۴	۱۷,۷۹۰

جدول ۴. آزمون همگرایی پنج λ_n اول - تیر دوسرگیردار تیموشنکو.

λ_n	تعداد توابع شکل				
	۱۵	۱۳	۱۰	۷	۵
$(\lambda_n)_1$	۴,۷۲۹	۴,۷۲۹	۴,۷۲۹	۴,۷۲۹	۴,۷۲۹
$(\lambda_n)_2$	۷,۸۴۹	۷,۸۴۹	۷,۸۴۹	۷,۸۴۹	۷,۸۶۴
$(\lambda_n)_3$	۱۰,۹۸۵	۱۰,۹۸۵	۱۰,۹۸۵	۱۰,۹۸۹	۱۱,۱۵۸
$(\lambda_n)_4$	۱۴,۱۱۷	۱۴,۱۱۷	۱۴,۱۱۷	۱۴,۲۶۴	۱۵,۸۸۵
$(\lambda_n)_5$	۱۷,۲۴۴	۱۷,۲۴۴	۱۷,۲۵۴	۱۸,۴۰۵	۵۵,۲۹۸

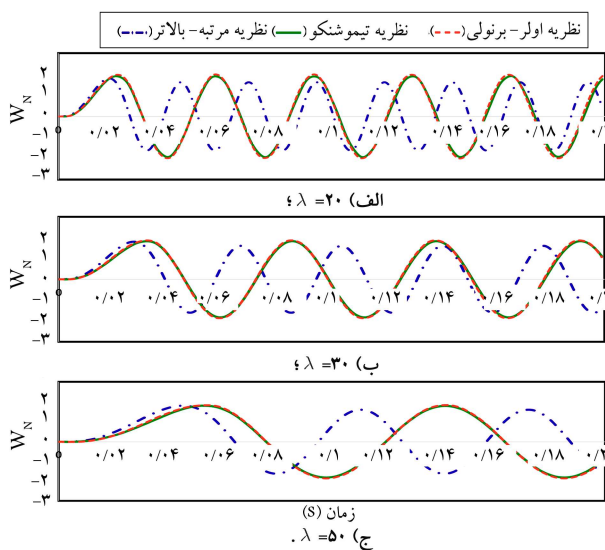
جدول ۹. مقایسه‌ی ۵ بسامد بدون بُعد اول تیر دو سر ساده‌ی تیموشنکو برای مقادیر مختلف h/L .

h/L								λ_n
۰٫۱		۰٫۰۵		۰٫۰۱		۰٫۰۰۵		
مطالعه‌ی حاضر	LS	مطالعه‌ی حاضر	LS	مطالعه‌ی حاضر	LS	مطالعه‌ی حاضر	LS*	
۳٫۱۲۸	۳٫۱۱۶	۳٫۱۳۸	۳٫۱۳۵	۳٫۱۴۱	۳٫۱۴۱	۳٫۱۴۲	۳٫۱۴۲	$(\lambda_n)_1$
۶٫۱۷۴	۶٫۰۹۱	۶٫۲۵۶	۶٫۲۳۱	۶٫۲۸۲	۶٫۲۸۱	۶٫۲۸۳	۶٫۲۸۳	$(\lambda_n)_2$
۹٫۰۵۹	۸٫۸۴۱	۹٫۳۳۲	۹٫۲۵۵	۹٫۴۲۱	۹٫۴۱۸	۹٫۴۲۴	۹٫۴۲۳	$(\lambda_n)_3$
۱۱٫۷۲۴	۱۱٫۳۴۳	۱۲٫۳۴۹	۱۲٫۱۸۱	۱۲٫۵۵۸	۱۲٫۵۴۹	۱۲٫۵۶۴	۱۲٫۵۶۲	$(\lambda_n)_4$
۱۴٫۱۴۱	۱۳٫۶۱۳	۱۵٫۲۸۲	۱۴٫۹۹۳	۱۵٫۶۹۰	۱۵٫۶۷۵	۱۵٫۷۰۴	۱۵٫۷۰۰	$(\lambda_n)_5$

* Lee & Schultz (LS) [۲۴]

جدول ۱۰. مقایسه‌ی ۵ بسامد بدون بُعد اول تیر دو سر گیردار تیموشنکو برای مقادیر مختلف h/L .

h/L								λ_n
۰٫۱		۰٫۰۵		۰٫۰۱		۰٫۰۰۵		
مطالعه‌ی حاضر	LS	مطالعه‌ی حاضر	LS	مطالعه‌ی حاضر	LS	مطالعه‌ی حاضر	LS	
۴٫۵۹۹	۴٫۵۸۰	۴٫۶۹۶	۴٫۶۹۰	۴٫۷۲۹	۴٫۷۲۸	۴٫۷۳۰	۴٫۷۳۰	$(\lambda_n)_1$
۷٫۴۲۹	۷٫۳۳۱	۷٫۷۳۸	۷٫۷۰۴	۷٫۸۴۸	۷٫۸۴۷	۷٫۸۵۲	۷٫۸۵۲	$(\lambda_n)_2$
۱۰٫۰۷۶	۹٫۸۵۶	۱۰٫۷۳۴	۱۰٫۶۴۰	۱۰٫۹۸۵	۱۰٫۹۸۰	۱۰٫۹۹۳	۱۰٫۹۹۲	$(\lambda_n)_3$
۱۲٫۵۱۱	۱۲٫۱۴۵	۱۳٫۶۵۰	۱۳٫۴۶۱	۱۴٫۱۱۷	۱۴٫۱۰۶	۱۴٫۱۳۲	۱۴٫۱۲۹	$(\lambda_n)_4$
۱۴٫۷۳۱	۱۴٫۲۳۲	۱۶٫۴۷۰	۱۶٫۱۵۹	۱۷٫۲۴۴	۱۷٫۲۲۵	۱۷٫۲۷۰	۱۷٫۲۶۵	$(\lambda_n)_5$



شکل ۲. تاریخچه‌ی زمانی جابجایی نرمال شده وسط دهانه‌ی تیر دو سر ساده تحت بارگذاری جرم متحرک به ازا $V_n = ۰٫۵$ و $M_n = ۰٫۱۵$.

مطابق شکل‌های ۲ و ۳، با افزایش مقدار لاغری تیر، تغییرشکل نقطه‌ی وسط دهانه‌ی تیرها خصوصاً تیر دو سر گیردار کاهش می‌یابد. نکته‌ی جالب توجه در تیر اولر - برنولی این است که مطابق انتظار، پاسخ‌ها با افزایش لاغری تغییر چندانی نداشته‌اند، زیرا همان‌گونه که اشاره شد، اثرات ناشی از برش در مقطع تیر لحاظ نمی‌شود. از طرفی، با مقایسه میان پاسخ‌های پیشینه‌ی نظریه‌های مختلف مشاهده می‌شود که با افزایش لاغری، مقادیر پیشینه‌ی جابه‌جایی نرمال شده وسط دهانه‌ی تیرها (W_{max}^N) به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند. علت این امر ناشی از کم‌رنگ شدن

شعاع ژیراسیون مقطع حول تار خنثی است). در نظر گرفته شده است. مقادیر E ، G ، ρ و K_s مشابه مقادیر متناظر در مثال ۱ فرض شده است. از طرفی، پارامترهای مربوط به مشخصات جرم متحرک به صورت نرمال شده و بدون بُعد تعریف شده است. به این صورت که جرم و سرعت نرمال شده‌ی جسم به صورت نسبتی ثابت از جرم و سرعت واقعی جسم به جرم کل و سرعت بحرانی سیستم بیان می‌شود؛ به عبارت دیگر، $M_n = M_M / \rho A L$ و $V_n = V / V'$ که در آن‌ها: V_n و M_n به ترتیب معادل جرم نرمال شده و سرعت نرمال شده هستند. همچنین، سرعت بحرانی V' دارای مقدار ثابتی است که طبق رابطه‌ی ۳۰ محاسبه می‌شود: [۱۹]

$$V' = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (30)$$

در اینجا، به منظور بیان رفتار دینامیکی تیرها، نمودارهای تاریخچه‌ی زمانی تغییرشکل تیرها در اثر عبور جرم متحرک با $M_n = ۰٫۱۵$ و $V_n = ۰٫۵$ مورد بررسی قرار گرفته است. از این رو، به عنوان در نظر گرفتن بحرانی‌ترین حالت ممکن در تغییرشکل تیرها، نمودارهای جابه‌جایی نرمال شده‌ی وسط دهانه‌ی (W^N) تیرهای دو سر ساده و دو سر گیردار برحسب زمان برای نظریه‌های مختلف و به ازا لاغری‌های ($\lambda = L/r$) متفاوت تیر، به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ ارائه شده است. در شکل‌های مذکور، W^N به صورت رابطه‌ی ۳۱ تعریف و بدون بُعد می‌شود:

$$W^N = \frac{W^{dyn}}{W_{max}^{st}} \quad (31)$$

که در آن، W^{dyn} جابجایی دینامیکی وسط دهانه‌ی تیر در اثر عبور جرم متحرک و W_{max}^{st} پیشینه‌ی جابجایی استاتیکی تیر اولر - برنولی بر اثر بار متمرکز $M_M g$ در محل وسط دهانه‌ی تیر است، که این مقادیر برای تیرهای دو سر ساده و دو سر گیردار به ترتیب برابر $M_M g L^2 / 48EI$ و $M_M g L^2 / 192EI$ هستند.

جدول ۱۱. مقایسه‌ی مقادیر بیشینه‌ی جابجایی نرمال‌شده‌ی (W_{max}^N) وسط دهانه‌ی تیر دو سر ساده به ازاء لاغری‌های متفاوت.

$\lambda = L/r$	اولر - برنولی			تیموشنکو			مرتبه - بالاتر		
	مطالعه‌ی حاضر (%)	اختلاف (%)	RKPM [۱۹]	مطالعه‌ی حاضر (%)	اختلاف (%)	RKPM	مطالعه‌ی حاضر (%)	اختلاف (%)	RKPM
۲۰	۱,۷۹۵	۰,۲۸	۱,۹۲۵	۱,۹۰۹	۰,۸۳	۱,۹۲۵	۱,۹۸۸	۳,۲۷	۱,۹۲۵
۳۰	۱,۷۹۵	۰,۲۸	۱,۸۵۵	۱,۸۲۹	۱,۴۰	۱,۸۵۵	۱,۸۶۹	۰,۴۸	۱,۸۶۰
۵۰	۱,۷۹۵	۰,۳۹	۱,۸۱۵	۱,۸۰۲	۰,۷۲	۱,۸۱۵	۱,۸۲۹	۰,۴۸	۱,۸۲۰

جدول ۱۲. مقایسه‌ی مقادیر بیشینه‌ی جابجایی نرمال‌شده‌ی (W_{max}^N) وسط دهانه‌ی تیر دو سر گیردار به ازاء لاغری‌های متفاوت.

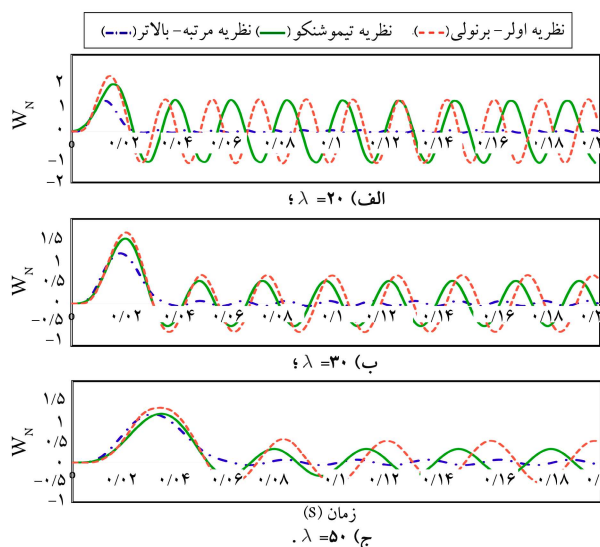
$\lambda = L/r$	اولر - برنولی			تیموشنکو			مرتبه - بالاتر		
	مطالعه‌ی حاضر (%)	اختلاف (%)	RKPM [۱۹]	مطالعه‌ی حاضر (%)	اختلاف (%)	RKPM	مطالعه‌ی حاضر (%)	اختلاف (%)	RKPM
۲۰	۱,۱۹۰	۰,۱۷	۱,۸۲۵	۱,۸۳۲	۰,۳۸	۱,۸۲۵	۲,۱۵۵	۰,۷۰	۲,۱۴۰
۳۰	۱,۱۹۰	۰,۳۴	۱,۵۱۰	۱,۵۳۰	۱,۳۲	۱,۵۱۰	۱,۶۷۴	۰,۰۶	۱,۶۷۵
۵۰	۱,۱۸۵	۰,۰۸	۱,۳۴۰	۱,۲۹۴	۳,۴۳	۱,۳۴۰	۱,۴۰۲	۱,۶۱	۱,۴۲۵

اولر - برنولی، تیموشنکو و مرتبه - بالاتر تحت شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده و دو سر گیردار با نتایج متناظر به دست آمده از روش عددی و شناخته شده‌ی بدون المان RKPM [۱۹]، ۱۶ به ترتیب در جدول‌های ۱۱ و ۱۲ ارائه شده است.

همان‌گونه که از نتایج جدول‌های ۱۱ و ۱۲ مشخص است، بیشینه‌ی پاسخ‌های به دست آمده در این مطالعه هم‌خوانی قابل توجهی با نتایج حاصل از روش عددی RKPM دارد. مطابق این جدول‌ها، درصد اختلاف میان نتایج مطالعه‌ی حاضر و نتایج حاصل از روش RKPM معادل مقداری کمتر از ۴٪ است، که این موضوع بیانگر دقت روش حاضر در تعیین پاسخ‌های دینامیکی تیرها تحت اثر جرم متحرک است. از سوی دیگر، نکته‌ی شایان ذکر در تحلیل دینامیکی تیرها با استفاده از این روش این است که با به کارگیری تعداد محدود تابع شکل می‌توان به پاسخ مطلوب رسید. به طوری که نتایج ارائه شده در جدول‌های ۱۱ و ۱۲، فقط با استفاده از ۳ تابع شکل به دست آمده‌اند. این مسئله، خود دلیلی بر کارایی و سادگی روش پیشنهادی است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مطالعه از یک روش نیمه تحلیلی برای بررسی ارتعاش و رفتار دینامیکی تیرهای مختلف استفاده شده است. از این رو، معادلات حاکم بر ارتعاش تیرهای اولر - برنولی، تیموشنکو و مرتبه - بالاتر تحت اثر جرم متحرک بر مبنای اصل همبستگی به دست آمده است. سپس به منظور تجزیه‌ی مکانی و زمانی معادلات، به ترتیب از یک روش ساده و کارآمد به نام چندجمله‌ی‌های متعامد مفسر و یک روش عددی قدرتمند در فضای حالت به نام ماتریس نمایی استفاده شده است. با بررسی و مقایسه‌ی نتایج به دست آمده برای بسامدهای بدون بعد ارتعاش آزاد تیر در هر ۳ نظریه با نتایج مشابه ارائه شده توسط دیگر پژوهشگران ملاحظه شده است که روش حاضر، سرعت



شکل ۳. تاریخچه زمانی جابجایی نرمال‌شده وسط دهانه تیر دو سر گیردار تحت بارگذاری جرم متحرک به ازاء $V_m = 0.5$ و $M_m = 0.15$.

اثرات کرنش برشی در تیرهای شکل‌پذیر برشی (تیموشنکو و مرتبه - بالاتر) است چرا که با افزایش لاغری تیر و فرض ثابت بودن طول تیر، شعاع ژیراسیون کاهش یافته و به تبع آن، ارتفاع تیر کوچک‌تر شده است. از همین رو ملاحظه می‌شود که بیشترین انطباق میان پاسخ‌های بیشینه‌ی نظریه‌های مختلف در $\lambda = 50$ رخ داده است (شکل‌های ۲ ج و ۳ ج).

علاوه بر این، به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از تحلیل دینامیکی تیرهای مورد بررسی تحت بارگذاری جرم متحرک، مقایسه‌ی مقادیر مربوط به W_{max}^N تیرهای

هم‌خوانی قابل توجهی دارد. در نهایت می‌توان گفت، روش پیشنهادی در این مطالعه، روشی ساده و دقیق، در عین حال جامع، برای ارزیابی ارتعاش و رفتار دینامیکی تیرهای مختلف تحت شرایط مرزی گوناگون و بارگذاری خارجی متفاوت است.

بالای همگرایی و دقت مناسب دارد. همچنین از بررسی نمودارهای تاریخیچه‌ی زمانی و بیشینه‌ی پاسخ‌های دینامیکی تیر مشخص شده است که این نتایج با نتایج مشابه حاصل از مطالعه دیگر پژوهشگران، علی‌رغم استفاده از تعداد کم توابع شکل،

پانویس‌ها

1. Galerkin
2. Rayleigh-Ritz
3. discrete element technique (DET)
4. Euler-Bernoulli beam
5. differential quadrature method (DQM)
6. differential transforms method (DTM)
7. Timoshenko beam
8. adomian decomposition method (ADM)
9. modified adomian decomposition method (MADM)
10. variational iteration method (VIM)
11. characteristic orthogonal polynomials (COPs)
12. higher-order beam
13. Hamilton principle
14. Gram-Schmidt
15. Chebyshev polynomials
16. reproducing kernel particle method (RKPM)

منابع (References)

1. Chatterjee, P.K., Datta, T.K. and Surana, C.S. "Vibration of continuous bridges under moving vehicles", *Journal of Sound and Vibration*, **169**(2), pp. 619-632 (1994).
2. Bilello, C., Bergman, L.A. and Kuchma, D. "Experimental investigation of a small-scale bridge model under a moving mass", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **130**(5), pp. 799-804 (2004).
3. Ouyang, H. "Moving load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview)", *Mech. Syst. Signal Process*, **25**(6), pp. 2039-2060 (2011).
4. Frýba, L., *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*, Thomas Telford, London (1999).
5. Akin, J.E. and Mofid, M. "Numerical solution for response of beams with moving mass", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **115**(1), pp. 120-131 (1989).
6. Wang, X. and Bert, C.W. "A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analyses of beams and plates", *Journal of Sound and Vibration*, **162**(3), pp. 566-572 (1993).
7. Wang, X., Bert, C.W. and Striz, A.G. "Differential quadrature analysis of deflection, buckling, and free vibration of beams and rectangular plates", *Computers & Structures*, **48**(3), pp. 473-479 (1993).
8. Yang, Y.B., Yau, J.D. and Hsu, L.C. "Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds", *Eng. Struct.*, **19**(11), pp. 936-944 (1997).

9. Chen, C.K. and Ho, S.H. "Transverse vibration of rotating twisted Timoshenko beams under axial loading using differential transform", *International Journal of Mechanical Sciences*, **41**(11), pp. 1339-1356 (1999).
10. Lai, H.L., Hsu, J.C. and Chen, C.K. "An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of Euler-Bernoulli beam by using the Adomian Decomposition Method", *Computers and Mathematics with Applications*, **56**(12), pp. 3204-3220 (2008).
11. Hsu, J.C., Lai, H.Y. and Chen, C.K. "An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of Timoshenko beams by using the Adomian Decomposition Method", *Journal of Sound and Vibration*, **325**(1-2), pp. 451-470 (2009).
12. Liu, Y. and Gurrum, C.S. "The use of he's variational iteration method for obtaining the free vibration of an Euler-Beam beam", *Mathematical and Computer Modelling*, **50**(11-12), pp. 1545-1552 (2009).
13. Bhat, R.B. "Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, **102**(4), pp. 493-499 (1985).
14. Bhat, R.B. "Plate deflections using orthogonal polynomials", *J. Eng. Mech., ASCE*, **111**(11), pp. 1301-1309 (1985).
15. Bhat, R.B. "Transverse vibrations of a rotating uniform cantilever beam with tip mass as predicted by using beam characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, **105**(2), pp. 199-210 (1986).
16. Liew, K.M., Hung, K.C. and Lim, M.K. "Vibration of mindlin plates using boundary characteristic orthogonal polynomials", *Journal of Sound and Vibration*, **182**(1), pp. 77-90 (1995).
17. Ahmadi, M. and Nikkhoo, A. "Utilization of characteristic polynomials in vibration analysis of non-uniform beams under a moving mass excitation", *Applied Mathematical Modelling* **38**(7-8), pp. 1-11 (2013).
18. Hassanabadi, M.E., Nikkhoo, A., Amiri, J.V. and Mehri, B. "A new orthonormal polynomial series expansion method in vibration analysis of thin beams with non-uniform thickness", *Applied Mathematical Modelling*, **37**(18-19), pp. 8543-8556 (2013).
19. Kiani, K., Nikkhoo, A. and Mehri, B. "Prediction capabilities of classical and shear deformable beam theories excited by a moving mass", *Journal of Sound and Vibration*, **320**(3), pp. 632-648 (2009).

20. Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee, K.H., *Shear Deformable Beams and Plates*, Elsevier Science Ltd, Oxford (2000).
21. Chakraverty, S., *Vibration of plates*, CRC Press/Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL (2009).
22. Nikkhoo, A., Rofooei, F.R. and Shadnam, M.R. "Dynamic behavior and modal control of beams under moving mass", *Journal of Sound and Vibration*, **306**(3-5), pp. 712-724 (2007).
23. Brogan, W.L., *Modern Control Theory*, Prentice-Hall, New Jersey (1991).
24. Lee, J. and Schultz, W.W. "Eigenvalue analysis of timoshenko beams and axisymmetric mindlin plates by the pseudospectral method", *Journal of Sound and Vibration*, **269**(3-5), pp. 609-621 (2004).