

# استخراج معیار تسلیم مدل تجربی هوک - براون تعمیم یافته در فضای نامتغیرهای تنش: استخراج برخی روابط نظریه‌ی خمیری

حسن شرفی\* (استادیار)

یزدان شمس ملکی (دانشجوی دکتری)  
دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه رازی کرمانشاه

در این نوشتار، به استخراج تابع تسلیم مدل هوک - براون در فضای نامتغیرهای تنش پرداخته شده است. معیار مذکور از نوع تجربی است، که به منظور برآورد رفتار باربری سنگ‌ها تعریف شده است. رابطه‌ی اصلی مدل هوک - براون بر حسب تنش‌های اصلی و در فضای تنش سه‌بُعدی تعریف شده است. با تعریف تابع تسلیم مدل در فضای نامتغیرهای تنش، تابع مذکور مستقل از جهت و نیز دوران محورهاى تنش در عموم بارگذاری‌های استاتیکی می‌شود. با تعریفی که از زاویه‌ی لاد در برخی از نوشتارها آمده است، اصولاً نمی‌توان رابطه‌ی مابین تابع تسلیم مدل در فضای تنش‌های اصلی و در فضای نامتغیرهای تنش را استخراج کرد. عمده مشکل موجود در این زمینه به دلیل در نظر گرفتن اختلاف  $30^\circ$  درجه‌ی مابین زاویه‌ی لاد و زاویه‌ی به‌کار برده شده در تعریف مدل رفتاری است. پس از تعریف تابع تسلیم، تابع پتانسیل خمیری مدل نیز مورد بررسی قرار گرفته است. ماتریس‌های هسیان، که به کمک قواعد مشتق‌گیری زنجیری از نامتغیرهای تنش به دست آمده‌اند، در این پژوهش محاسبه شده‌اند. اصولاً هر مدل رفتاری دلخواهی که براساس تنش‌های اصلی بیان شود، می‌تواند مطابق روابط مبنایی موجود در این پژوهش، به فضای نامتغیرهای تنش منتقل شود. پس از این مرحله می‌توان با محاسبه‌ی ماتریس رفتاری کشسان خمیری قادر به برآورد رفتار تنش - کرنش کشسان خمیری مصالح به کمک آن مدل رفتاری دلخواه بود.

واژگان کلیدی: مدل هوک - براون، توابع تسلیم و پتانسیل، تنش‌های اصلی، نامتغیرهای تنش، تبدیل تنش، روابط تنش - کرنش، رفتار ارتجاعی - خمیری، ماتریس‌های هسیان، ماتریس رفتاری ارتجاعی خمیری.

مهندسی عمران شریف، پاییز ۱۳۹۵ (۱۳۹۵)  
دوری ۲ - ۳۲، شماره‌ی ۳/۲، ص. ۱۰۵-۹۵ (پادداشت فنی)

h\_sharafi@razi.ac.ir  
yazdan\_12507@yahoo.com

## ۱. مقدمه

مدل‌های پاتن<sup>[۱]</sup>، بارتون<sup>[۲]</sup>، بارتون - بندیس<sup>[۳]</sup> و مدل هوک - براون<sup>[۴-۷]</sup> اشاره کرد. مطالعات عددی و آزمایشگاهی فراوانی در حوزه‌های مختلف به کمک مدل هوک - براون انجام شده است؛ این مدل در ابتدا به منظور بررسی رفتار مقاومتی سنگ‌های بکر و پس از آن شکست ترد سنگ‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.<sup>[۵،۴]</sup> برخی پژوهشگران در پژوهشی در سال ۲۰۱۲<sup>[۸]</sup> به کمک مدل هوک - براون به پیش‌بینی گسیختگی سقف حفاری‌های زیرزمینی پرداخته‌اند، و مدل مذکور را به همراه تحلیل‌های کران بالا (UB)<sup>[۳]</sup> و کران پایین (LB)<sup>[۴]</sup> اجزاء محدود به کار برده‌اند. در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۱<sup>[۹]</sup> از مدل هوک - براون در کنار مدل‌های رفتاری دیگر برای برآورد رفتار کشسان خمیری از طریق مسیرهای تنش و سطوح تسلیم در تحلیل‌های اجزاء محدود استفاده شده است. پژوهشگران دیگری نیز در پژوهش خود در سال ۲۰۰۸<sup>[۱۰]</sup> به ارائه‌ی معادلات برای تحلیل اجزاء محدود به کمک مدل رفتاری هوک - براون اهتمام ورزیده‌اند. در پژوهش دیگری نیز در سال ۲۰۰۸<sup>[۱۱]</sup>

علم مکانیک سنگ در طول چند دهه‌ی اخیر، پیشرفت‌های چشم‌گیری کرده است. روابط و مدل‌های رفتاری به‌کار برده شده در آغاز برای توصیف ریاضی رفتار سنگ‌ها، عموماً همان مدل‌های استفاده شده برای بیان رفتار عمومی مصالح ژئومتریال از قبیل خاک و سنگ بوده‌اند. مدل ارتجاعی - خمیری کامل<sup>۱</sup> مطرح موهر - کولمب<sup>۲</sup>، یک مدل رفتاری است که به دفعات فراوان برای مدل‌سازی رفتار سنگ‌ها به‌کار برده شده است. مدل مذکور فقط براساس رفتار برشی بر مبنای تنش برشی در سطح گسیختگی تعریف شده است، که آن هم براساس تنش‌های نرمال بوده و به طور کامل برای مدل‌سازی رفتار واقعی سنگ و خاک تعریف نشده است. مدل‌های بهتری برای تعریف رفتار سنگ‌ها در نظر گرفته شده‌اند، که اثر وجود صفحات ناپوستگی و درزه‌ها در توده‌های سنگی را نیز در نظر می‌گیرند، از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۲/۲۸/۱۳۹۳، اصلاحیه ۱۱/۱۱/۱۳۹۳، پذیرش ۲۸/۱۱/۱۳۹۳.

بعدی قرار می‌گیرند، از این رو باید دانست که ارائه‌ی نوشتار هدف نیست، بلکه هدف گشودن گره‌ی مشکل‌ساز و رفع نیاز واقعی در زمینه‌ی خاص است. مفاهیم و اصول مطرح‌شده در این نوشتار به‌طور پیوسته نشان می‌دهد که چگونه با یک روند گام به گام ساده، می‌توان معادلاتی از یک مدل رفتاری به‌دست آورد، که بتوان آن‌ها را جهت تخمین رفتار مصالح در یک برنامه‌ی عددی مورد استفاده قرار داد. نرم‌افزارهای بسیاری وجود دارند، که به محاسبه‌ی بخش‌های مختلف ارائه‌شده در این نوشتار و یا حتی تمام مفاهیم آن می‌پردازند، اما استفاده از آن‌ها به نوعی پاک‌کردن صورت مسئله، طی همان مسیرهای قبلی و در تناقض با هدف اصلی این نوشتار است.

## ۲. معرفی مبانی و روابط معیار گسیختگی هوک - براون

معیار هوک - براون، معیاری تجربی (براساس نتایج تجربی آزمایش‌های سه‌محوری روی نمونه‌های سنگی در چند دهه‌ی متمادی) است، که اساساً بر روش سعی و خطا استوار است، که برای شکست سنگ‌های درزه‌دار و یا فاقد درزه (نمونه‌ی سنگ بکر) در بین سال‌های ۱۹۸۰ الی ۱۹۸۳ با توجه به شرایط مندرج در مراجع مختلف ارائه شده است.<sup>[۱۸-۲۱]</sup> بخش‌های مختلف مدل هوک - براون، که از دیدگاه نظریه‌ی خمیری قابل بررسی هستند، در ادامه به‌طور دقیق مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

### ۱.۲. معرفی مدل رفتاری هوک - براون در دستگاه تنش‌های اصلی

شکل اصلی و آغازین ارائه‌ی مدل هوک - براون، که به نحوی به ارائه‌ی رابطه‌ی مابین تنش‌های اصلی اول و سوم می‌پردازد، عمدتاً مشابه رابطه‌ی ۱ تعریف شده است:<sup>[۷-۲۱]</sup>

$$\sigma_{maj} = \sigma_{min} + \sqrt{m\sigma_{ci}\sigma_{min} + s\sigma_{ci}^2} \quad (۱)$$

که در آن،  $\sigma_{ci}$  مقاومت فشاری محصورنشده‌ی نمونه‌ی سنگ بکر،  $s$  پارامتری است که باید توسط مهندس مکانیک سنگ برآورد شود و براساس درجه‌ی شکستگی موجود در توده‌ی سنگی در محدوده‌ی  $0 \leq s \leq 17$  قرار دارد، با تعیین این دو پارامتر، مقاومت فشاری نامحصور توده‌ی سنگی برابر  $\sqrt{s\sigma_{ci}}$  خواهد بود. پارامتر  $m$  نیز نقشی مشابه زاویه‌ی اصطکاک داخلی  $\phi$  در مدل موهر - کولمب بازی می‌کند، که اگر بخواهیم تنش بزرگ‌تر ( $\sigma_{maj}$ ) و تنش کوچک‌تر ( $\sigma_{min}$ ) را به ترتیب معادل با تنش‌های اصلی  $\sigma_1$  و  $\sigma_3$  در نظر بگیریم، معیار تنش‌ی این مدل در فضای تنش‌های اصلی و براساس آزمایش‌های سه‌محوری روی نمونه‌ی سنگی به شکل معادله‌ی ۲ در می‌آید:<sup>[۷،۶]</sup>

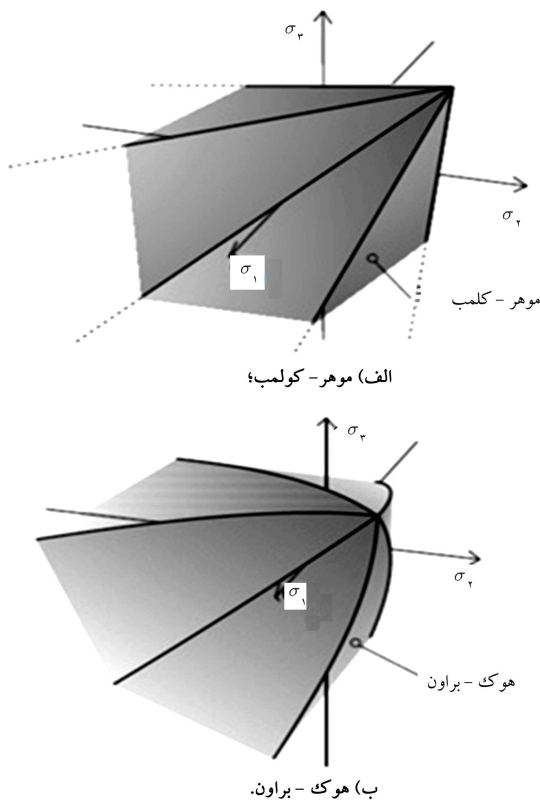
$$\sigma_1' = \sigma_3' + \sqrt{m\sigma_{ci}\sigma_3' + s\sigma_{ci}^2} \quad (۲)$$

که در آن رابطه و تمام روابط دیگر موجود در این پژوهش،  $\sigma_1'$  تنش مؤثر اصلی اول و  $\sigma_3'$  تنش مؤثر اصلی سوم است. شایان توجه است که در معادله‌ی مذکور از معیار گسیختگی مدل هوک - براون، فرجه‌ی رادیکال (پارامتر ثابت  $a$ ) برابر  $\frac{1}{3}$  است؛ که در معیار گسیختگی تعمیم‌یافته‌ی مدل هوک - براون، مقدار این پارامتر عددی ثابت نیست و چنانچه در معادلات پیش رو خواهیم دید،  $a$  در حالت تعمیم‌یافته‌ی مدل هوک - براون،<sup>[۷]</sup> تابعی از اندیس مقاومت زمین‌شناختی GSI خواهد بود. برای توده‌ی سنگ بکر (بدون درزه و ترک)،  $s = 17$  است.<sup>[۶]</sup>

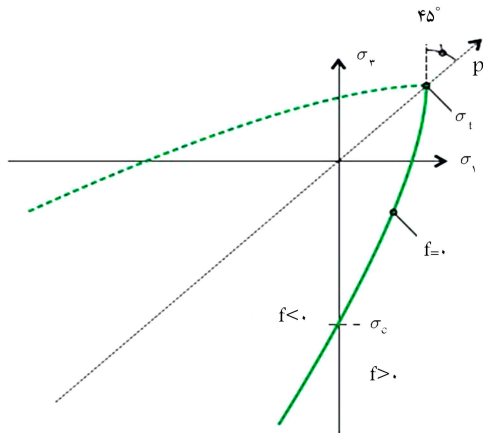
به بررسی مدل مذکور با لحاظ‌کردن فاکتورگیری مقاومت مصالح ذاتی پرداخته شده است. همچنین پژوهشگران دیگری (۲۰۰۶)،<sup>[۱۱]</sup> از شکل تعمیم‌یافته‌ی مدل هوک - براون به کمک راه‌حل‌های تحلیل حدی، برای برآورد ظرفیت باربری توده‌های سنگی استفاده کرده‌اند. در پژوهش دیگری (۲۰۰۶) نیز به برآورد پارامترهای معادل بین دو مدل هوک - براون و موهر - کولمب در تحلیل تونل‌های متقارن نگه‌داری‌شده در سنگ‌های خمیری یا شکننده پرداخته شده است.<sup>[۱۳]</sup> برخی پژوهشگران نیز (۲۰۰۰)،<sup>[۱۴]</sup> ظرفیت باربری نهایی توده‌های سنگی را براساس معیار هوک - براون اصلاح‌شده مورد محاسبه قرار داده‌اند. این پژوهش به دنبال اثبات توابع تسلیم و پتانسیل مدل هوک - براون در فضای نامتغیرهای تنش به منظور هموارسازی مسیر تحلیل‌های عددی تنش - کرنش به کمک این مدل است. همچنین مجموعه ماتریس‌های هسیان به منظور تعریف رابطه‌ی تنش - کرنش کشسان‌خمیری هر مدل رفتاری دلخواه مورد محاسبه قرار گرفته است. دیگر هدف عمده‌ی این پژوهش مروری دقیق بر مفاهیم نظریه‌ی خمیری در حوزه‌ی علم مهندسی ژئوتکنیک است، چرا که مطالب و منابع بسیار اندکی به این مهم پرداخته‌اند،<sup>[۱۵-۱۷]</sup> و هنوز هم مجهولات بسیاری در این خصوص به شکل ناشناخته باقی مانده است. در یک بیان کلی می‌توان گفت هدف از این پژوهش ایجاد پیوندی مستقیم بین مفاهیم ارتجاعی - خمیری در علم مقاومت مصالح و مدل‌های رفتاری تعریف مصالح سنگی و خاکی در علم مکانیک خاک است. این نوشتار به دنبال ایجاد نوآوری، اثبات یا تغییر مفاهیم خاصی نیست، هدف عمده‌ی این نوشتار بررسی ریزساختار یک مدل رفتاری بر پایه‌ی روابطی عمومی و ایجاد مبنایی برای استفاده از مدل جهت برآورد میزان تنش - کرنش در کدها و برنامه‌های قابل ایجاد است. متأسفانه در داخل کشور تاکنون توسط دانشگاه‌های بزرگ، برنامه‌ها و کدهای عددی ایجاد شده‌اند، که به جهت انجام برخی پروژه‌ها یا انجام مطالعات در حوزه‌ی تحولات تکمیلی بوده است، اما به جرأت می‌توان گفت که هیچ‌یک از نرم‌افزارهای داخلی مذکور در اختیار عموم پژوهشگران قرار نگرفته است. باید دانست که گام نخست در ایجاد یک برنامه یا نرم‌افزار در حوزه‌ی مهندسی ژئوتکنیک و محیط‌های پیوسته، شناخت مدل‌های ریاضی بیان رفتار مصالح با عنوان مدل‌های رفتاری است. یک نرم‌افزار محاسبات عددی به کمک گروهی از کارشناسان حوزه‌ی ژئوتکنیک و علوم رایانه (علوم نرم‌افزاری) در ۳ گام ایجاد می‌شود، که عبارت‌اند از:

۱. ایجاد انسجام و تسلط بر روابط ریاضی برای بیان مدل‌های رفتاری مختلف و درج مدل‌های رفتاری مختلف به کمک یک زبان برنامه‌نویسی در نرم‌افزار و هماهنگ‌کردن معادلات مدل‌های رفتاری با برنامه‌ی یک روش عددی جهت محاسبه؛
۲. ایجاد یک واسط گرافیکی کاربر که روند مدل‌سازی، تحلیل و ارائه‌ی نتایج مدل عددی برنامه‌نویسی‌شده را به شکل گرافیکی نمایش دهد؛
۳. صحت‌سنجی و کالیبره‌کردن نتایج نرم‌افزار (برنامه) با معادلات اثبات‌شده و نتایج عملی - آزمایشی ثبت‌شده از پدیده‌های ژئوتکنیکی واقعی.

این نوشتار تلاشی ناچیز در راستای تحقق بخشی از گام اول است. اصولاً ارائه‌ی مقالات نوآورانه به کمک نرم‌افزارهای حاصل تلاش دیگران و یا حتی مواد و تجهیزات منتج از مطالعات چندین ساله‌ی دیگر پژوهشگران، صرف‌نظر از اصول اخلاقی نشر، چندان کار ارزشمندی نخواهد بود. ایجاد کدها و برنامه‌های نرم‌افزاری فراگیر در داخل کشور، هر چند کار دشواری به‌نظر می‌آید، اما شدنی و گامی بسیار ارزشمند در راستای تعالی علوم مهندسی ژئوتکنیک خواهد بود. هر ساله در کشور شاهد ارائه‌ی مقالات فراوانی هستیم که به جرأت می‌توان گفت که بخش کوچکی از آن‌ها مورد استفاده‌ی



شکل ۱. نمودار تابع تسلیم مدل‌های رفتاری (در فضای تنش‌های اصلی  $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ )<sup>[۱۰]</sup>.



شکل ۲. تصویر دو بُعدی تابع تسلیم مدل هوک - براون به همراه نمایش محور تنش هیدرواستاتیک  $p$ <sup>[۱۰]</sup>.

۸) است، که این انحناء و خمیدگی در شکل ۱، در مقایسه با گوشه‌های مستقیم مدل موهر - کولمب به نمایش در آمده است، رابطه‌ی مذکور در شرایط  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (بدون اندیس پرایم)، یعنی تنش‌های مؤثر که کشش مثبت فرض شده، نوشته شده است و بدین ترتیب دلالت بر بزرگ‌ترین تنش فشاری در بین این ۳ تنش می‌کند. در رأس این تصویر دو بُعدی از تابع تسلیم (شکل ۲)، رابطه‌ی تنش‌ی اصلی برابر  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_t$  برقرار است، که در این رابطه تنش،  $\sigma_t$  مقاومت کششی دو محوری نمونه‌ی سنگ است.<sup>[۱۰]</sup>

در تصویر دو بُعدی تابع تسلیم مدل (شکل ۲)، که براساس روابط و توضیحات

معیار گسیختگی این مدل در فضای تنش‌های اصلی، بسته به اینکه کدام یک از تنش‌های اصلی اول یا سوم در داخل پراوتز به توان پارامتر  $a$  برسد، به ۲ حالت قابل بیان است، که در بیشتر مقالات موجود به این اختلاف اشاره نشده است:

حالت ۱. اگر تنش اصلی  $\sigma'_1$  به توان  $a$  برسد (یعنی داخل عبارت درون پراوتز قرار بگیرد):<sup>[۷،۶]</sup>

$$\sigma'_1 = \sigma'_t + \sigma_{ci} \left( s + m_b \frac{\sigma'_t}{\sigma_{ci}} \right)^a \quad (3)$$

حالت ۲. اگر تنش اصلی  $\sigma'_3$  به توان  $a$  برسد (یعنی داخل عبارت درون پراوتز قرار بگیرد):<sup>[۱۰]</sup>

$$\sigma'_3 = \sigma'_t + \sigma_{ci} \left( s - m_b \frac{\sigma'_3}{\sigma_{ci}} \right)^a \quad (4)$$

چنانچه در تعریف ذکر شده‌ی رابطه‌ی گسیختگی مدل هوک - براون مشاهده می‌شود، اثری از تنش میانه‌ی  $\sigma'_2$  در رابطه‌ی تنش‌ی این معیار مشاهده نمی‌شود. در رابطه‌های ۳ و ۴ همواره فرض بر این است که:  $\sigma'_1 \geq \sigma'_2 \geq \sigma'_3$ . در روابط مذکور پارامترها عبارت‌اند از:  $a$ ،  $s$ ،  $m_b$  که از طریق روابط ریاضی ۵ الی ۷ تعریف می‌شوند:<sup>[۱۰]</sup>

-- رابطه‌ی تعریف پارامتر اول مدل (پارامتر  $m_b$ ):

$$m_b = m_i e^{(GSI-100)/(28-14D)} \quad (5)$$

-- رابطه‌ی تعریف پارامتر دوم مدل (پارامتر  $s$ ):

$$s = e^{(GSI-100)/(9-3D)} \quad (6)$$

-- رابطه‌ی تعریف پارامتر سوم مدل (پارامتر  $a$ ):

$$a = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} (e^{-GSI/15} - e^{-20/3}) \quad (7)$$

که در آن‌ها،  $D$  شاخص دست‌خوردگی سنگ است، که در محدوده عددی  $0 \leq D \leq 17$  قرار دارد و برای سنگ دست‌نخورده این شاخص برابر با صفر است،  $GSI$  اندیس مقاومت زمین‌شناختی سنگ است، که براساس آزمایش‌های صحرایی به دست می‌آید و به شاخص‌های مقاومتی از سنگ مانند:  $RSR$  (روش بیناوسکی)<sup>[۱۹]</sup>،  $RMR$  (روش ویکهام)<sup>[۲۰]</sup> یا  $Q$  (روش بارتون)<sup>[۲۱]</sup> -- در مکانیک سنگ -- وابسته است و نیز شاخص  $100 \leq GSI \leq 10$ ، که کران بالای آن برای سنگ فاقد درزه (سنگ بکر) و کران پایین آن برای سنگ خیلی ضعیف (یعنی توده‌سنگ پُراز درزه) است،  $\sigma_{ci}$  مقاومت فشاری تک‌محوری مصالح سنگ بکر که از آزمایش تک‌محوری به دست می‌آید.<sup>[۱۸]</sup>

### ۳. معیار (تابع) تسلیم مدل هوک - براون در فضای

#### سه بُعدی تنش‌های اصلی

تابع تسلیم این مدل به صورت رابطه‌ی ۸ در دستگاه تنش‌های اصلی بیان می‌شود:<sup>[۱۰]</sup>

$$f = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_{ci} \left( s - m_b \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^a = 0 \quad (8)$$

مطابق شکل مذکور، مرزهای کناری (گوشه‌های) تابع تسلیم در فضای دو بُعدی تنش‌ها به صورت یک منحنی خمیده‌ی توانی (با توجه به توان  $a$  در تابع تسلیم رابطه‌ی

زاویه تغییر کند، به مراتب جای بحث بیشتری دارد. زاویه ی لاد در اغلب مراجع به شکل روابط ۱۵ الی ۱۷ تعریف شده است:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left( -\frac{\sqrt{3} J_r}{2 J_r^{2/3}} \right) \Rightarrow \quad (15)$$

$$\sin 3\theta = -\frac{\sqrt{3} J_r}{2 \sqrt{J_r^2}} \quad (16)$$

$$\theta = \theta^* + \frac{\pi}{6} \quad (17)$$

که در آن‌ها، نیز  $J_r$  نامتغیر (مستقل) تنشی انحرافی سوم است.

#### ۱.۴. استخراج شکل درست زاویه ی لاد یعنی نامتغیر تنشی زاویه یی $\theta$

رابطه ی اساسی و درست تعریف زاویه ی لاد، که در بیشتر مقالات و کتاب‌ها به اشتباه ذکر شده است، به فرم مجموعه روابط ۱۸ الی ۲۰ است: [۱۷، ۱۶]

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2 \frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{\sigma'_x - \sigma'_z} - 1 \right) \right] \quad (18)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{3} \det s}{J_r} \right) \quad (19)$$

$$\det s = \begin{vmatrix} \sigma'_x - p' & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma'_y - p' & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma'_z - p' \end{vmatrix} \quad (20)$$

و مشتق زاویه ی لاد نسبت به مؤلفه های تنش دکارتی از روابط ۲۱ الی ۲۳ به دست می‌آید:

$$\left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma'} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta J_r} \left[ \begin{array}{c} \frac{\det s}{J_r} \left\{ \frac{\partial J}{\partial \sigma'} \right\} \\ - \left\{ \frac{\partial (\det s)}{\partial \sigma'} \right\} \end{array} \right] \quad (21)$$

$$J = \left\{ \frac{1}{6} \left[ (\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + \sigma'_x - \sigma'_z \right]^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

$$\left\{ \frac{\partial J}{\partial \sigma'} \right\} = \frac{1}{2J} \left\{ \sigma'_x - p', \sigma'_y - p', \sigma'_z - p', 2\tau_{xy}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{yz} \right\}^t \quad (23)$$

لازم به ذکر است که حرف  $t$  در این پژوهش به معنای ترانهاده ی بردار یا ماتریس (تعویض جای درایه های سطرها و ستون‌ها) است.

باید توجه کرد که در محاسبه ی مشتقات تنش، چه در حالت تنش های کل  $\sigma$ ، و چه در حالت تنش های مؤثر  $\sigma'$ ، همواره مقادیر برابر هم هستند. [۱۶]

#### ۵. استخراج رابطه ی تابع تسلیم مدل هوک - براون در

##### فضای نامتغیرهای تنشی - انحرافی - زاویه یی

$$(J_r, J_3, \theta, \theta^*)$$

استخراج تابع تسلیم مدل هوک - براون (یا هر مدل دلخواه دیگری) بر حسب نامتغیرهای تنش به کمک تابع تسلیم مدل در فضای تنش های اصلی  $(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$  صورت

ذکر شده ترسیم شده است، محور گذرنده از رأس شکل (محور  $p$ )، محور تنش های هیدرواستاتیک است، که معادله ی آن به صورت رابطه ی ۹ است:

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \quad (9)$$

توجه شود که در تصویر دو بُعدی در شکل ۲، منحنی خط چین ترسیم شده مربوط به شرایطی است که  $\sigma_1 > \sigma_3$  است. [۱۰]

#### ۴. تابع تسلیم مدل هوک - براون در فضای نامتغیرهای

##### تنش

تابع تسلیم این مدل در فضای نامتغیرهای تنشی به شکل رابطه ی ۱۰ (براساس تابع تسلیم بیان شده در بخش قبل در فضای تنش های اصلی) بیان می‌شود: [۱۰]

$$f = \left( 2\sqrt{J_r} \cos \theta^* \right)^{1/a} - s \sigma_{ci}^{1/a} + m_b \sqrt{J_r} \sigma_{ci}^{(1/a)-1} \left( \cos \theta^* - \frac{\sin \theta^*}{\sqrt{3}} \right) + m_b p \sigma_{ci}^{(1/a)-1} = 0 \quad (10)$$

که رابطه ی مذکور را می‌توان با جایگذاری  $p = \frac{I_1}{3}$  به شکل رابطه ی ۱۱ نیز نوشت:

$$f = \left( 2\sqrt{J_r} \cos \theta^* \right)^{1/a} - s \sigma_{ci}^{1/a} + m_b \sqrt{J_r} \sigma_{ci}^{(1/a)-1} \left( \cos \theta^* - \frac{\sin \theta^*}{\sqrt{3}} \right) + m_b \frac{I_1}{3} \sigma_{ci}^{(1/a)-1} = 0 \quad (11)$$

که در آن، تمامی پارامترها قبلاً تعریف شده اند. همچنین،  $I_1$  نامتغیر اول تنشی (در فضای تنش های اصلی و برابر  $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ )،  $\theta^* = \theta - \frac{\pi}{6}$  شکلی از زاویه ی لاد  $\theta$  به فرم دوم، و  $\theta^*$  نامتغیر تنشی انحرافی دوم، که خود یک نامتغیر تنشی بر حسب رابطه های ۱۲ الی ۱۴ است:

$$\cos(3\theta) = \frac{\sqrt{3} J_r}{2 \sqrt{J_r^2}} \quad (12)$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad (13)$$

$$\theta = \theta_{OH} + \frac{\pi}{6} \quad (14)$$

باید تأکید بسیاری شود که  $\theta_{OH}$ ، زاویه ی نامتغیر تنشی است که در کتاب کاربرد نظریه ی خمیری در روش اجزاء محدود، [۱۵] معرفی و در تعدادی از کتب و مقالات مرتبط به نظریه ی خمیری نیز به اشتباه زاویه ی لاد  $\theta$  به جای زاویه ی محاسباتی  $\theta_{OH} = \theta^*$  در کلیه ی روابط ذکر شده است، که به اختلاف ۳۰ درجه یی بین تعریف این دو پارامتر توجه چندانی نشده است، که این اختلاف خود نقش بزرگ و اساسی در اثبات روابط تسلیم مدل‌ها بر حسب نامتغیرهای تنش (چنان‌که بعداً مشاهده خواهد شد) ایفا می‌کند. مدل‌های رفتاری بر پایه ی روابط ریاضی ایجاد شده اند و در ریاضیات گاهی یک ضریب و یا رابطه ی میانی ناهماهنگ، هفته‌ها و حتی ماه‌ها روند حل یک مسئله را با چالش روبرو می‌سازد، می‌توان مبدأ (صفر) زاویه ی لاد را در مکان‌های متفاوت روی صفحه ی انحرافی تعریف کرد، اما باید توجه کرد که حتی تغییر علامت زاویه ی لاد به معنی تغییر شرایط واقعی مثلاً در یک آزمایش سه محوری کششی به فشاری و یا بر عکس است؛ با این تفسیر اگر مقدار

پس از حذف جمله‌ی مشترک  $I_1/3$  از دو عبارت اول طرف دوم رابطه‌ی ۲۹، رابطه‌ی ۳۰ به دست می‌آید:

$$f = \sigma_1 - \sigma_r - \sigma_{ci} \left( s - m_b \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^a$$

$$= \left( \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \left( \cos \theta - \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right)$$

$$- \sigma_{ci} \left( s - \frac{m_b}{\sigma_{ci}} \left( \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{I_1}{3} \right) \right)^a = 0 \quad (30)$$

سپس با استفاده از بسط مثلثاتی عبارت داخل پرانتز رابطه‌ی اول طرف دوم (طرف چپ) رابطه‌ی ۳۰، ساده‌سازی صورت می‌گیرد (رابطه‌ی ۳۱):

$$\cos \theta - \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \theta - \left( \cos \theta \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$(31)$$

از طرفی بنابر روابط مثلثاتی، روابط ۳۲ و ۳۳ را خواهیم داشت:

$$\cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left( \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2} \quad (32)$$

$$\sin \left( \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = +\cos \left( \frac{\pi}{6} \right) = +\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (33)$$

حال با جایگذاری مقادیر مذکور در رابطه‌ی ۳۱، رابطه‌ی ۳۴ به دست می‌آید:

$$\cos \theta - \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \theta - \left( \cos \theta \left( -\frac{1}{2} \right) - \sin \theta \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{3}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta = \sqrt{3} \cos \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \cos \theta^*$$

$$(34)$$

با جایگذاری نتیجه‌ی ساده‌شده در رابطه‌ی ۳۴، از بسط در رابطه‌ی اول از طرف راست تابع تسلیم بیشین شماره‌ی ۳۰، رابطه‌ی ۳۵ به دست می‌آید:

$$f = 2\sqrt{J_r} \cos \theta^* - \sigma_{ci} \left( s - \frac{m_b}{\sigma_{ci}} \left( \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{I_1}{3} \right) \right)^a = 0$$

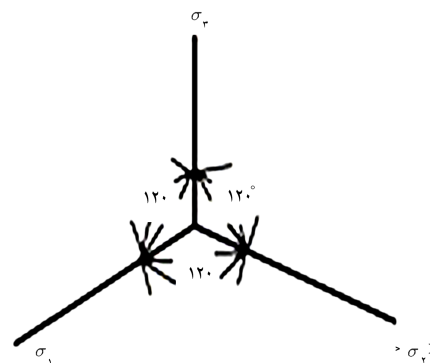
$$(35)$$

حال طرفین تابع تسلیم در رابطه‌ی ۳۵ را به توان  $\left( \frac{1}{a} \right)$  می‌رسانیم (رابطه‌ی ۳۶):

$$f = \left( 2\sqrt{J_r} \cos \theta^* \right)^{\frac{1}{a}} - \left( \sigma_{ci} \right)^{\frac{1}{a}} \left( s - \frac{m_b}{\sigma_{ci}} \left( \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{I_1}{3} \right) \right) = 0$$

$$(36)$$

توجه شود که در رابطه‌ی ۳۶ بنابر روابط بیشین، هم  $\theta$  و هم  $\theta^*$  وجود دارد؛ لذا رابطه‌ی ۳۷ به دست می‌آید:



شکل ۳. نام‌گذاری محورهای تنش اصلی برای رسم هر مدل رفتاری دلخواه به همراه زوایای بین محورهای تنش اصلی. [۱۷]

می‌گیرد. برای استخراج تابع تسلیم پیش‌گفته (معادله‌ی ۱۱)، برحسب نامتغیرهای تنش از رابطه‌ی کلیدی تبدیل تنش‌ها بین دو فضای تنش‌های اصلی و نامتغیرهای تنشی به شکل رابطه‌ی ۲۴ استفاده شده است.

رابطه‌ی کلیدی تبدیل بین تنش‌های اصلی و نامتغیرهای تنشی در فضای سه‌بعدی تنش (شکل ۳)، به شکل برداری رابطه‌ی ۲۴ بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

در اینجا (رابطه‌ی میانجی تنشی مذکور) نیز از رابطه‌ی ۲۵ به دست می‌آید:

$$\theta = \theta^* + \frac{\pi}{6} = \theta_{OH} + \frac{\pi}{6} \quad (25)$$

حال مطابق رابطه‌ی برداری ارائه‌شده مابین تنش‌های اصلی و نامتغیرهای تنشی، تابع تسلیم مدل هوک - براون از فضای تنش‌های اصلی به فضای نامتغیرهای تنش بازنویسی شده است (رابطه‌ی ۲۶):

$$f = \sigma_1 - \sigma_r - \sigma_{ci} \left( s - m_b \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^a = 0 \quad (26)$$

لذا طبق رابطه‌ی تبدیل برداری این دو فضا، رابطه‌ی ۲۷ را خواهیم داشت:

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{I_1}{3} \quad (27)$$

و نیز برای تنش اصلی سوم (sigma\_r) رابطه‌ی ۲۸ را خواهیم داشت:

$$\sigma_r = \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{I_1}{3} \quad (28)$$

سپس روابط معادل ۲۷ و ۲۸، در تابع تسلیم فوق از مدل هوک - براون جایگزین شده است (رابطه‌ی ۲۹):

$$f = \sigma_1 - \sigma_r - \sigma_{ci} \left( s - m_b \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^a = \left( \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{I_1}{3} \right)$$

$$- \left( \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{I_1}{3} \right)$$

$$- \sigma_{ci} \left( s - \frac{m_b}{\sigma_{ci}} \left( \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{I_1}{3} \right) \right)^a = 0 \quad (29)$$

به دست آید: [۱۰]

$$g = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_{ci} \left( s_g - m_g \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^{a_g} \quad (43)$$

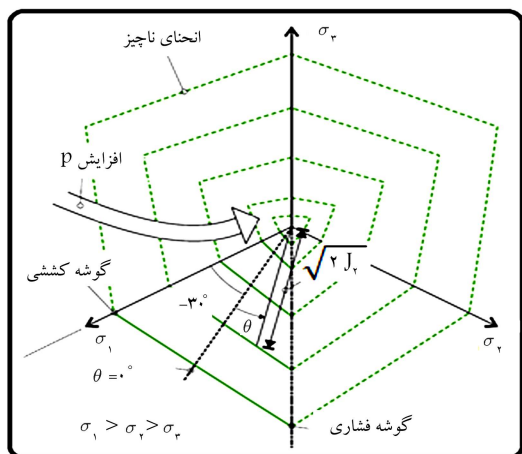
## ۷. استخراج تابع پتانسیل مدل هوک - براون در فضای

### نامتغیرهای تنش

یکی از شکل‌های پذیرفته شده‌ی تابع پتانسیل خمیری مدل هوک - براون معادله‌ی ارائه شده‌ی ۴۴ است. در معادله‌ی مذکور، تابع پتانسیل مدل هوک - براون براساس نامتغیرهای تنش و نامتغیرهای تنش - تفاضلی ارائه شده است. برای به دست آوردن مشتق‌های تنش مرتبه‌ی دوم تابع مذکور، به منظور محاسبه‌ی ماتریس رفتاری کشتان خمیری مدل، نیاز به محاسبه‌ی ماتریس‌های مربعی هسیان است، که در ادامه به آن اشاره شده است.

$$g(\sigma)_{HB} = -\frac{m'}{3} I_1 + \frac{3}{\sigma_{ci}} J_2 + \frac{\sqrt{3} m'}{2} \sqrt{J_2} \quad (44)$$

که در آن،  $m'$  پارامتر اتساع نمونه در حین رخداد جریان خمیری است. برای اثبات رابطه‌ی مذکور نیز به سادگی، در تابع پتانسیل خمیری معادل‌های  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  بر حسب نامتغیرهای تنش جایگزین و عبارات حاصله ساده شده است. تعریف این تابع (تابع پتانسیل) برای حالت و زمانی است که بخواهیم نرم‌شوندگی (حین رخداد رفتار ارتجاعی خمیری) در نظر گرفته شود، برای بیشتر موارد مدل هوک - براون در شرایط ارتجاعی خمیری کامل به کار برده می‌شود و شرایط سخت‌شوندگی نیز ندارد. در اصل جریان خمیری این مدل از نوع سازگار و تابع پتانسیل خمیری برابر با تابع تسلیم فرض می‌شود، مگر در مواردی که لازم باشد نرم‌شوندگی در حین گسیختگی نیز در نظر گرفته شود. رابطه‌ی هندسی بین نامتغیرهای تنش تفاضلی و تنش برای ترسیم سه بعدی تابع تسلیم مدل در فضای تنش‌های اصلی به صورت شکل ۴ ترسیم شده است.



شکل ۴. مقاطع عرضی مختلف مدل هوک - براون در صفحه‌ی تنش اکتاهدرال (معیار تسلیم ثانویه‌ی مدل توسط خط چین نمایش داده شده است (یعنی شرایط تنش)، تفاسیر هندسی زاویه‌ی لاد و نامتغیر تنش انحرافی دوم نیز نمایش داده شده است). [۱۰]

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \left( \cos \theta - \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right) \\ &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \left( \frac{3}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \\ &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \left( \frac{(\sqrt{3})^2}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \\ &= 2\sqrt{J_2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right) \\ &= 2\sqrt{J_2} \left( \cos \frac{\pi}{6} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{6} \sin \theta \right) \\ &= 2\sqrt{J_2} \left( \cos \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta^* \quad (37) \end{aligned}$$

پس از بسط رابطه‌ی حاصله‌ی ۳۷، رابطه‌های ۳۸ الی ۴۱ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f &= \left( 2\sqrt{J_2} \cos \theta^* \right)^{\frac{1}{a}} - (\sigma_{ci})^{\frac{1}{a}} s - (\sigma_{ci})^{\frac{1}{a}-1} m_b \frac{I_1}{3} \\ &+ m_b (\sigma_{ci})^{\frac{1}{a}-1} \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \theta = 0 \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \left( \theta^* + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \theta^* \cos \frac{\pi}{6} - \sin \theta^* \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta^* - \frac{1}{2} \sin \theta^* \Rightarrow in : f \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \left( 2\sqrt{J_2} \cos \theta^* \right)^{\frac{1}{a}} - (\sigma_{ci})^{\frac{1}{a}} s - (\sigma_{ci})^{\frac{1}{a}-1} m_b \frac{I_1}{3} \\ &+ m_b (\sigma_{ci})^{\frac{1}{a}-1} \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta^* - \frac{1}{2} \sin \theta^* \right) = 0 \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \left( 2\sqrt{J_2} \cos \theta^* \right)^{\frac{1}{a}} - (\sigma_{ci})^{\frac{1}{a}} s + (\sigma_{ci})^{\frac{1}{a}-1} m_b \frac{I_1}{3} \\ &+ m_b (\sigma_{ci})^{\frac{1}{a}-1} \sqrt{J_2} \left( \cos \theta^* - \frac{\sin \theta^*}{\sqrt{3}} \right) = 0 \quad (41) \end{aligned}$$

که مطابق محاسبات انجام شده، در نهایت سعی شده است تابع تسلیم مدل هوک - براون به شکل رابطه‌ی ۴۲ بر حسب نامتغیرهای تنش (از تابع تسلیم در فضای تنش اصلی) استخراج شود: [۱۰]

$$\begin{aligned} f &= \left( 2\sqrt{J_2} \cos \theta^* \right)^{1/a} - s \sigma_{ci}^{1/a} \\ &+ m_b \sqrt{J_2} \sigma_{ci}^{(1/a)-1} \left( \cos \theta^* - \frac{\sin \theta^*}{\sqrt{3}} \right) + m_b \frac{I_1}{3} \sigma_{ci}^{(1/a)-1} = 0 \quad (42) \end{aligned}$$

لذا، تابع تسلیم مدل هوک - براون، مطابق محاسبات انجام شده، مطابق معادله‌ی ۴۲ خواهد بود. [۱۰]

## ۶. تابع پتانسیل خمیری مدل هوک - براون

در صورت رخداد جریان خمیری ناسازگار و در شرایط عدم تعامد (نرمالیته) برای مدل هوک - براون می‌توان تابع پتانسیل خمیری (پلاستیک) را در نظر گرفت. برای به دست آوردن تابع پتانسیل خمیری مدل هوک - براون در تابع تسلیم پیش‌گفته‌ی  $f$ ، باید پارامترهای  $a$ ،  $m_b$  و  $s$  با مقادیر متناظر خود در حالت پتانسیل خمیری یعنی  $a_g$ ،  $m_g$  و  $s_g$  جایگزین شوند، تا تابع پتانسیل خمیری این مدل به شرح رابطه‌ی ۴۳

۲.۸. محاسبه‌ی مشتقات مرتبه‌ی اول نامتغیرهای تنش ( $I_1, I_2, I_3$ ) و نامتغیرهای تنش انحرافی (تفاضلی) ( $\sqrt{J_2}, J_3, \theta$ ) در این بخش مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول نامتغیرهای تنش و نامتغیرهای تنش - تفاضلی ارائه شده است (روابط ۵۶ الی ۵۸):

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \left( \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial I_1}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial I_1}{\partial \tau_{xz}}, \frac{\partial I_1}{\partial \tau_{yz}} \right)^t \quad (56)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma} = \left( \sigma_y + \sigma_z, \sigma_x + \sigma_z, \sigma_x + \sigma_y, -2\tau_{xy}, -2\tau_{xz}, -2\tau_{yz} \right)^t \left( \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial I_2}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial I_2}{\partial \tau_{xz}}, \frac{\partial I_2}{\partial \tau_{yz}} \right)^t \quad (57)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \sigma} = \left( \sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2, \sigma_x \sigma_z - \tau_{xz}^2, \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2, -2\sigma_z \tau_{xy} + 2\tau_{xz} \tau_{yz}, -2\sigma_y \tau_{xz} + 2\tau_{xy} \tau_{yz}, -2\sigma_x \tau_{yz} + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \right)^t \left( \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial I_3}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial I_3}{\partial \tau_{xz}}, \frac{\partial I_3}{\partial \tau_{yz}} \right)^t \quad (58)$$

و مشتقات مرتبه‌ی اول نامتغیرهای تنش انحرافی به کمک قواعد مشتق‌گیری زنجیری، به شکل مجموعه روابط ۵۹ الی ۶۱ بیان شده‌اند:

$$\frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} = \frac{1}{6\sqrt{J_2}} \left( 3 \frac{\partial I_2}{\partial \sigma} + 2I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \right) \quad (59)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = \frac{1}{9} \left( 9 \frac{\partial I_2}{\partial \sigma} + 3I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \sigma} + 3I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + 2I_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \right) \quad (60)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{-\sqrt{3}}{4 \sin(\theta) \sqrt{J_2^3}} \left( 2J_2 \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} - 3J_2 \frac{\partial J_1}{\partial \sigma} \right) \quad (61)$$

## ۹. محاسبات تنش - کرنش کشسان خمیری مدل

برای استخراج رابطه‌ی کشسان خمیری (ارتجاعی - خمیری) بین نمو تنش  $\Delta \sigma$  و نمو کرنش  $\Delta \varepsilon$ ، نیاز به تعریف ماتریس رفتاری کشسان خمیری  $[D^{\varepsilon p}]$  است. می‌دانیم که در فضای سه‌بعدی تنش‌های دکارتی، به‌طور کلی ۳ تنش نرمال و ۳ تنش برشی داریم، بنابراین ماتریس رفتاری ارتجاعی - خمیری در حالت کلی برای اینکه بتواند در بردار ۶ مؤلفه‌ی تنش ضرب شود، باید ماتریسی مربعی و  $6 \times 6$  باشد. از طرفی نمو کرنش کل  $\{\Delta \varepsilon\}$  برابر حاصل جمع نمو کرنش ارتجاعی  $\{\Delta \varepsilon^e\}$  و نمو کرنش خمیری  $\{\Delta \varepsilon^p\}$  است (روابط ۶۲ الی ۶۸).<sup>[۱۷، ۱۶]</sup>

$$\{\Delta \sigma\} = [D^{\varepsilon p}]_{6 \times 6} \{\Delta \varepsilon\} \quad (62)$$

$$\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \varepsilon^e\} + \{\Delta \varepsilon^p\} \quad (63)$$

## ۸. معرفی نامتغیرهای تنش و نامتغیرهای تنش - تفاضلی (برشی یا انحرافی)

### ۱.۸. رابطه‌ی بین تنش‌های تفاضلی و تنش‌های دکارتی

در این بخش نامتغیرهای تنش ( $I$ ) و نامتغیرهای تنش - تفاضلی (انحرافی یا برشی) ( $J$ ) و معادله‌های مشخصه‌ی حاکم بر آن‌ها معرفی شده است. در بخش‌های بعدی، مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم (ماتریس‌های هسیان) نامتغیرهای ذکر شده نیز ارائه شده‌اند. رابطه‌ی شماره‌ی ۴۵ تنش حجمی میانگین موثر بر حسب نامتغیر تنش‌ی اول  $I_1$  و رابطه‌ی ۴۶ نامتغیرهای تنش‌ی متداول  $p$  و  $q$  در حالت تنش‌های موثر را نمایش می‌دهد.

$$\bar{\sigma} = \sigma - p = \sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \sigma - \frac{I_1}{3} \quad (45)$$

$$p' = p - u \quad q' = q = (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (46)$$

نامتغیرهای تنش‌ی دکارتی ( $I_i$ ) (روابط ۴۷ و ۴۸):

$$I_1 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \equiv I_1 \quad (47)$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \quad (48)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \equiv \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (48)$$

معادله‌ی مشخصه در دستگاه تنش‌های دکارتی سه‌بعدی (رابطه‌ی ۴۹):

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (49)$$

نامتغیرهای تنش‌ی دکارتی تفاضلی  $J_i$  (انحرافی، برشی) (روابط ۵۰ الی ۵۲):

$$J_1 = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z = 0, \quad (50)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2 \right] \quad (51)$$

$$J_3 = \frac{1}{27} \left[ 2(\sigma_x^3 + \sigma_y^3 + \sigma_z^3) - 3(\sigma_x \sigma_y^2 + \sigma_x \sigma_z^2 + \sigma_y \sigma_x^2 + \sigma_y \sigma_z^2 + \sigma_z \sigma_x^2 + \sigma_z \sigma_y^2) + 12\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 9\tau_{xy}^2 (\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z) + 9\tau_{yz}^2 (\sigma_y + \sigma_z - 2\sigma_x) + 9\tau_{zx}^2 (\sigma_x + \sigma_z - 2\sigma_y) + 54\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \right] \quad (52)$$

و معادله‌ی مشخصه براساس تنش‌های تفاضلی و نامتغیرهای تنش - تفاضلی (انحرافی) (رابطه‌ی ۵۳):

$$\bar{\sigma}^3 - J_2 \bar{\sigma} - J_3 = 0, \quad (53)$$

و رابطه‌ی مابین نامتغیرهای تنش‌ی و نامتغیرهای تنش - تفاضلی می‌تواند به صورت روابط ۵۴ و ۵۵ در نظر گرفته شود:<sup>[۱۷]</sup>

$$J_2 = \frac{I_2}{3} - I_1^2 \quad (54)$$

$$J_3 = I_3 - \frac{I_1 I_2}{3} + \frac{2I_1^3}{27} = I_3 + \frac{I_1 J_2}{3} - \frac{I_1^3}{27} \quad (55)$$

### ۱۰. محاسبه‌ی ماتریس کشسان خمیری $D^{ep}$ برای مدل

#### هوک - براون

برای محاسبه‌ی ماتریس رفتار کشسان خمیری مدل هوک - براون، باید وضعیت نرم‌شوندگی/سخت‌شوندگی این مدل و نوع جریان خمیری آن (جریان سازگار یا ناسازگار) مشخص شود. برای محاسبه‌ی ماتریس  $D^{ep}$ ، مطابق با شرایط مدل هوک - براون، که رفتار خمیری کامل را بررسی می‌کند، با فرض رفتار فاقد سخت‌شوندگی و فرض قانون جریان سازگار رابطه‌ی محاسبه‌ی این ماتریس (منظور ماتریس  $D^{ep}$ ) به شکل رابطه‌ی ۷۵ ساده خواهد شد:<sup>[۱۶]</sup>

$$\underline{D}^{ep} = \underline{D}^e - \frac{D^e (\partial g / \partial \sigma) (\partial f / \partial \sigma)^t D^e}{-(\partial f / \partial \varepsilon^p)^t \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) + (\partial f / \partial \sigma)^t \underline{D}^e (\partial g / \partial \sigma)} \quad (75)$$

که در آن،  $g$  تابع پتانسیل خمیری مدل و  $f$  تابع تسلیم مدل است. در رابطه‌ی مذکور، با فرض جریان خمیری کامل (فاقد نرم‌شوندگی یا سخت‌شوندگی)، چون در این حالت سخت‌شوندگی  $k = cte$  ثابت و  $\partial \varepsilon^p = \partial k$  فرض می‌شود، پس  $(\partial f / \partial \varepsilon^p)^t = 0$  و با فرض قانون جریان همراه (جریان سازگار)،  $b = \partial g / \partial \sigma = \partial f / \partial \sigma = a$  می‌شود، که با جایگذاری روابط ذکرشده در رابطه‌ی ۷۵، رابطه‌ی ۷۶ به دست می‌آید:

$$\underline{D}^{ep} = \underline{D}^e - \frac{\underline{D}^e (\partial f / \partial \sigma) (\partial f / \partial \sigma)^t \underline{D}^e}{+(\partial f / \partial \sigma)^t \underline{D}^e (\partial f / \partial \sigma)} = \underline{D}^e - \frac{\underline{D}^e a a^t \underline{D}^e}{a^t \underline{D}^e a} \quad (76)$$

پس طبق رابطه‌ی ۷۶، برای محاسبه‌ی ماتریس  $D^{ep}$  فقط کافی است که  $a = \partial f / \partial \sigma$  برای مدل هوک - براون محاسبه شود، که مطابق رابطه‌ی ۷۷،  $a = \partial f / \partial \sigma$  برداری با ۶ مؤلفه است:

$$a^t = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{zy}} \right\}_{1 \times 6} \quad (77)$$

و محاسبه‌ی مقدار بردار  $a$  بر حسب تابع تسلیم مدل، به شرح رابطه‌ی ۷۸ صورت می‌گیرد:<sup>[۱۶]</sup>

$$a = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \theta^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial \sigma} = \sum \hat{C}_i \hat{a}_i \quad (78)$$

$$\theta^* = F(\sqrt{J_2}, J_2) \quad (78)$$

و با جایگذاری معادل فوق از  $\frac{\partial \theta^*}{\partial \sigma}$  در رابطه‌ی  $a$  و فاکتورگیری از روابط مذکور، روابط ۷۹ الی ۸۱ به دست می‌آید:<sup>[۱۶]</sup>

$$a = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \theta^*} \left( \frac{\partial \theta^*}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \theta^*}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} \right) \quad (79)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \sigma} = \frac{\partial \theta^*}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \theta^*}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} \quad (80)$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma}}_{\hat{C}_1} + \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial \sqrt{J_2}} \right) \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma}}_{\hat{C}_2} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \theta^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma}}_{\hat{C}_3} \quad (81)$$

$$\{\Delta \sigma^e\} = [D^e]_{6 \times 6} \{\Delta \varepsilon^e\} \quad (64)$$

$$[D^e]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \bar{D} & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ }_{2 \times 2} & \text{ } \\ \text{ } & \text{ }_{2 \times 2} & \bar{G} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (65)$$

$$\bar{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu \\ \nu & 1 - \nu & \nu \\ \nu & \nu & 1 - \nu \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\bar{G} = \frac{E}{2(1 + \nu)} I_{2 \times 2} \quad (67)$$

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{ }_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

که در آن‌ها،  $E$  مدول ارتجاعی (بانگ) مصالح (سنگی)،  $\nu$  ضریب پواسون مصالح است. سایر پارامترها نیز قبلاً تعریف شده‌اند. قانون جریان خمیری (رابطه‌ی بین نمو کرنش خمیری و مشتق جزئی مرتبه‌ی اول تابع پتانسیل خمیری) به صورت رابطه‌ی ۶۹ بیان می‌شود:

$$\Delta \varepsilon^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (69)$$

که در آن،  $\Lambda$  یک پارامتر عددی (اسکالر) است.

با فرض رفتار دارای نرم‌شوندگی در مدل هوک - براون، محاسبات مذکور به شکل ارائه‌ی مشتقات برای تشکیل ماتریس رفتاری کشسان خمیری مربعی  $6 \times 6$ ،  $\underline{D}^{ep}$  به شرح روابط ۷۰ الی ۷۲ ارائه شده‌اند. باید توجه کرد به دلیل اینکه مطابق رابطه‌ی ۷۰، شش مؤلفه‌ی تنش در تانسور تنش در فضای سه‌بعدی تنش‌ها موجود است، پس ماتریس رفتاری تنش - کرنش کشسان خمیری نیز مربعی و  $6 \times 6$  خواهد بود:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^t \quad (70)$$

$$\underline{D}^{ep} = [\underline{D}^e]_{6 \times 6} - \frac{[\underline{D}^e]_{6 \times 6} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{6 \times 1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{1 \times 6} [\underline{D}^e]_{6 \times 6}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{1 \times 6} [\underline{D}^e]_{6 \times 6} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{6 \times 1} + A} \quad (71)$$

$$A = -\frac{1}{\Lambda} \left\{ \frac{\partial f}{\partial k} \right\}^t \{\Delta k\} \quad (72)$$

که در آن‌ها،  $f$  تابع تسلیم و  $g$  تابع پتانسیل خمیری مدل هوک - براون (یا هر مدل دلخواه دیگر) است،  $k$  پارامتر حالت، و  $\Lambda$  نیز پارامتری که برای تعریف قانون جریان به کمک تابع پتانسیل خمیری مدل به کار می‌رود.

### ۱.۹. حالات مختلف اثرگذار در ماتریس رفتاری ارتجاعی - خمیری

بنابر سخت‌شوندگی/نرم‌شوندگی کرنشی، می‌توان دو حالت را برای استخراج ماتریس رفتاری کشسان خمیری در نظر گرفت:

۱. حالت خمیری کامل: در این حالت پارامتر حالت  $\{k\}$  ثابت است (رابطه ۷۳):<sup>[۱۶]</sup>

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial k} \right\}^t = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (73)$$

۲. حالت خمیری سخت‌شوندگی/نرم‌شوندگی کرنشی: در این حالت پارامتر حالت  $\{k\}$  متناسب با کرنش‌های خمیری تجمعی  $\{\varepsilon^p\}$  است (رابطه ۷۴):<sup>[۱۶]</sup>

$$A = -\frac{1}{\Lambda} \left\{ \frac{\partial f}{\partial k} \right\}^t \frac{\partial \{k\}}{\partial \{\varepsilon^p\}} \{\Delta \varepsilon^p\} \quad (74)$$



توجه شود که در روابط  $\hat{a}_r$  و  $\hat{a}_z$  (روابط ۸۷ و ۹۰)، تنش‌های  $(S_x, S_y, S_z)$  تنش برشی (تفاضلی یا انحرافی) هستند، که حاصل تفاضل تنش متوسط (تنش هیدرواستاتیکی  $p$ ) از تنش‌های دکارتی هستند. بدیهی است که این تنش‌ها، با تنش‌های برشی یکی هستند.

برای تابع پتانسیل مدل هوک - براون (تابع  $g$ )، بردار جریان عمود بر سطح تابع پتانسیل  $g$ ،  $(b = b_{HB})$  و مشتق آن  $(v = v_{HB})$ ، مطابق روابط ۹۱ و ۹۲ محاسبه خواهند شد؛ باید توجه کرد که در روابط مذکور، پارامتر  $m'$  همان پارامتر اتساع در حین رخداد جریان خمیری ناسازگار در مدل هوک - براون است، که در محاسبه مشتقات مرتبه‌های اول و دوم ماتریس‌های هسیان،<sup>[۲۲]</sup> از آن استفاده شده است. این پارامتر مطابق مطالب گفته‌شده در آغاز پژوهش حاضر، مربوط به تابع پتانسیل خمیری مدل در حین رخداد جریان ناسازگار است:

$$b_{HB} := \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} = -\frac{m'}{3} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{6\sqrt{J_r}}{\sigma_{ci}} \frac{\partial \sqrt{J_r}}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\sqrt{3}m'}{2} \frac{\partial \sqrt{J_r}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (91)$$

$$v_{HB} := \frac{\partial^2 g}{\partial \underline{\sigma}^2} = \frac{6\sqrt{J_r}}{\sigma_{ci}} \frac{\partial^2 \sqrt{J_r}}{\partial \underline{\sigma}^2} + \frac{6\sqrt{J_r}}{\sigma_{ci}} \frac{\partial \sqrt{J_r}}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial \sqrt{J_r}}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t + \frac{\sqrt{3}m'}{2} \frac{\partial^2 \sqrt{J_r}}{\partial \underline{\sigma}^2} \quad (92)$$

## ۱۱. ماتریس‌های هسیان

ماتریس هسیان عبارت است از ماتریس‌های مربعی حاصل از مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم یک تابع (در اینجا تابع پتانسیل مدل هوک - براون) با توجه به مؤلفه‌های دکارتی تنش، یعنی  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots$  که تعریف ریاضی آن برای تابع  $f(x)$  مطابق رابطه‌ی ۹۳ است:<sup>[۲۲]</sup>

$$H(f)_{ij}(x) = D_i D_j f(x) \quad (93)$$

مشتق جزئی مرتبه‌ی اول مؤلفه‌های تنش اصلی نسبت به تنش‌های دکارتی به شکل رابطه‌ی عمومی ۹۴ بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \cos(\theta + \theta_i) \frac{\partial \sqrt{J_r}}{\partial \underline{\sigma}} - \sqrt{J_r} \sin(\theta + \theta_i) \frac{\partial \sigma_i}{\partial \underline{\sigma}} \right] + \frac{1}{3} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} \quad (94)$$

$$i = 1, 2, 3$$

که در آن در رابطه‌ی ۹۵ همواره خواهیم داشت:  $\theta_1 = 0, \theta_2 = -\frac{2\pi}{3}$  و  $\theta_3 = \frac{2\pi}{3}$  و مشتق هسیان تنش‌های اصلی از رابطه‌ی ۹۵ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial \underline{\sigma}^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \cos(\theta + \theta_i) \frac{\partial^2 \sqrt{J_r}}{\partial \underline{\sigma}^2} - \sin(\theta + \theta_i) \left[ \frac{\partial \sqrt{J_r}}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t + \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial \sqrt{J_r}}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t \right] + \frac{2\sqrt{J_r}}{\sqrt{3}} \sin(\theta + \theta_i) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \underline{\sigma}^2} \right\} \quad (95)$$

$$i = 1, 2, 3$$

علامت  $t$  در عبارات مشتق در رابطه‌ی ۹۵، نماد ماتریس یا بردار ترانسپوز شده (ترانزاده) است، که در آن جای سطرها و ستون‌های بردار یا ماتریس عوض شده است (روابط ۹۶ و ۹۷):

محاسبه‌ی مشتقات  $\hat{C}_i$  و  $\hat{a}_i$  برای تشکیل  $a = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ :  
 -- محاسبه‌ی  $\hat{C}_1$  و  $\hat{a}_1$  (روابط ۸۲ و ۸۳):

$$\hat{C}_1 = \frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{1}{3} m_b \sigma_{ci}^{(1/a)-1} \quad (82)$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^t \quad (83)$$

-- محاسبه‌ی  $\hat{C}_r$  و  $\hat{a}_r$  (روابط ۸۴ و ۸۵):

$$\hat{C}_r = \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_r}} + \frac{\partial f}{\partial \theta^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial \sqrt{J_r}} \quad (84)$$

$$\hat{a}_r = \frac{\partial \sqrt{J_r}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sqrt{J_r}} \frac{\partial J_r}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sqrt{J_r}} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (85)$$

که مطابق آن‌ها و با توجه به تابع تسلیم مدل، در محاسبه‌ی مشتقات باید توجه کرد که عبارات  $\sin \theta^*$  و  $\cos \theta^*$  نیز تابعی از  $\sqrt{J_r}$  هستند و بر حسب این پارامتر، مشتق دارند (مشتق‌های حاصل ضرب). از طرفی طبق مطالب اثبات‌شده‌ی پیشین، مشتق جزئی  $\theta^*$  نسبت به  $\sqrt{J_r}$  از رابطه‌ی ۸۶ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \sqrt{J_r}} = \left[ -\tan 3\theta^* \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{J_r}} \right) \right] \quad (86)$$

و نیز قبلاً مقدار  $\hat{a}_r$  مطابق رابطه‌ی ۸۷ اثبات شده است:

$$\hat{a}_r = \frac{\partial \sqrt{J_r}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sqrt{J_r}} \frac{\partial J_r}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sqrt{J_r}} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (87)$$

-- محاسبه‌ی عبارات مشتقی  $\hat{C}_r$  و  $\hat{a}_r$  (رابطه‌ی ۸۸):

$$\hat{C}_r = \frac{\partial f}{\partial \theta^*} \left( \frac{\partial \theta^*}{\partial J_r} \right) \quad (88)$$

و مقدار مشتق جزئی  $\frac{\partial \theta^*}{\partial J_r}$  به شرح رابطه‌ی ۸۹ محاسبه شده است:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial J_r} = -\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{J_r})^2 \cos(3\theta^*)} \quad (89)$$

و مقدار مشتق  $\hat{a}_r$  نیز قبلاً برای مدل‌های پایه‌ی موجود، کاملاً اثبات شده و در اینجا برای خلاصه‌شدن کار، فقط نتیجه‌ی آن قرار داده شده است (رابطه‌ی ۹۰):

$$\hat{a}_r = \frac{\partial J_r}{\partial \sigma} = \begin{Bmatrix} S_y S_z - \tau_{yz}^2 + \frac{J_r}{3} \\ S_x S_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_r}{3} \\ S_x S_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_r}{3} \\ 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - S_z \tau_{xy}) \\ 2(\tau_{xy} \tau_{xz} - S_x \tau_{yz}) \\ 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - S_y \tau_{xz}) \end{Bmatrix} \quad (90)$$

## ۱۲. نتیجه گیری

در این نوشتار به بررسی مدل رفتاری هوک - براون از دیدگاه نظریه‌ی خمیری در مهندسی ژئوتکنیک و محیط پیوسته پرداخته شده و توابع تسلیم و پتانسیل خمیری مدل در فضای تنش‌های اصلی و نامتغیرهای تنشی سه‌بعدی مورد بررسی قرار گرفته است. در این نوشتار، همچنین مجموعه روابط و راه‌حل‌های عمومی برای استخراج توابع تسلیم و پتانسیل بر حسب نامتغیرهای تنش یا نامتغیرهای تنشی - تقاضایی برای هر مدل رفتاری دلخواه، که در فضای تنش‌های اصلی تعریف شده باشد، ارائه شده است. اصولاً بیان مدل‌های رفتاری بر حسب نامتغیرهای تنش، مزیت‌های زیادی دارد، که عمده‌ترین آن‌ها، مستقل بودن مقدارشان از موقعیت و جهت چرخش محوره‌های مختصات تنش سه‌بعدی یا دو‌بعدی تعریف هر مسئله‌ی تنش است. در این پژوهش همچنین ماتریس‌های هسیان برای نامتغیرهای تنش و نامتغیرهای تنش انحرافی محاسبه شده است. به کمک مقادیر این مشتقات و مشتقات مرتبه‌ی اول نامتغیرهای تنش، می‌توان ماتریس رفتاری ارتجاعی - خمیری را برای هر مدل رفتاری دلخواه محاسبه و به کمک آن رابطه‌ی بین تنش - کرنش حاصل به کمک آن مدل رفتاری را برقرار و مقادیر تنش‌ها و کرنش‌ها را برآورد کرد. پس اهداف و نتایج کلی حاصل از این پژوهش را می‌توان به این شرح در نظر گرفت:

۱. مرور ارتجاعی - خمیری مدل تجربی هوک - براون و استخراج توابع تسلیم و پتانسیل خمیری این مدل در فضای نامتغیرهای تنش؛
۲. بررسی روابط نامتغیرهای تنش و نامتغیرهای تنشی - تقاضایی و محاسبه‌ی ماتریس‌های هسیان به کمک مشتق‌گیری زنجیری؛
۳. معرفی روابط تنش - کرنش ارتجاعی - خمیری و محاسبه‌ی ماتریس رفتاری ارتجاعی - خمیری برای ایجاد پیوند بین تنش و کرنش کشسان‌خمیری؛
۴. بررسی کشسان‌خمیری مفاهیم خمیری کامل، سخت‌شوندگی و نرم‌شوندگی تابع کرنش خمیری و تابع کار به کمک روابط ریاضی برای کاربست‌های عددی (اجزاء محدود)؛
۵. معرفی روابط کلی برای استخراج هر مدل رفتاری دلخواه در فضای نامتغیرهای تنش که در آغاز براساس تنش‌های اصلی تعریف شده باشد؛
۶. در این پژوهش چند تعریف ریاضی مختلف از نامتغیر تنش زاویه‌ی لاد ارائه شده است، همچنین اشاره‌ی به اختلاف این زاویه با زاویه‌ی نامتغیر تنش ارائه شده در کتاب آون و هینتون<sup>۱۵</sup> شده است. بسیاری از مقالات و کتب مرجع درخصوص نظریه‌ی خمیری در مکانیک خاک روابط و مدل‌های استخراج شده در این کتاب را مدنظر قرار داده‌اند، که به اختلاف ۳۰ درجه‌ی بین زاویه‌ی تعریف شده در این کتاب و تعریف اصلی زاویه‌ی لاد توجه نکرده‌اند؛

۷. در دو معیار هوک - براون و موهر - کولمب، در فضای تنش‌های اصلی، اثری از تنش میانه‌ی  $\sigma_2$  مشاهده نشده است، که این موضوع به نحوی این مدل‌ها را از واقعیت تنش سه‌بعدی در شرایط مسئله‌های ژئوتکنیکی طبیعی دور می‌کند؛
۸. هدف این نوشتار، ارائه‌ی محاسبات نمادین، که در برخی نرم‌افزارها صورت می‌گیرد، نیست و نباید از شکل پارامتری روابط ارائه شده در آن دچار این اشتباه شد، بلکه هدف این نوشتار ایجاد مبنای اولیه و عمومی برای استفاده از مدل‌های رفتاری در قالب برنامه‌ها و نرم‌افزارهای عددی است. مبنای مطرح شده در این نوشتار شکل نمادین و عمومی دارد، از این رو به هر مدل رفتاری می‌توان شکل کلی روابط را تعمیم داد.

$$M_{varI_T} := \frac{\partial^2 I_T}{\partial \underline{\sigma}^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$M_{var\sqrt{J_T}} := \frac{\partial^2 \sqrt{J_T}}{\partial \underline{\sigma}^2} = \frac{1}{\sqrt{J_T}} \frac{\partial \sqrt{J_T}}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial \sqrt{J_T}}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t + \frac{1}{6\sqrt{J_T}} M_{const} \quad (97)$$

و ماتریس ثابت  $M = M_{const}$  از رابطه‌ی ۹۸ به دست می‌آید:

$$M_{const} := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$M_{varI_T} := \frac{\partial^2 I_T}{\partial \underline{\sigma}^2} = \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial I_T}{\partial \underline{\sigma}} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z & \sigma_y & 0 & 0 & -2\tau_{yz} \\ \sigma_z & 0 & \sigma_x & 0 & -2\tau_{xz} & 0 \\ \sigma_y & \sigma_x & 0 & -2\tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\tau_{xy} & -2\sigma_z & 2\tau_{yz} & 2\tau_{xz} \\ 0 & -2\tau_{xz} & 0 & 2\tau_{yz} & -2\sigma_y & 2\tau_{xy} \\ -2\tau_{yz} & 0 & 0 & 2\tau_{xz} & 2\tau_{xy} & -2\sigma_x \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (99)$$

مشتق مرتبه‌ی دوم نامتغیر تنش انحرافی (تفاضلی) سوم بر مبنای تنش‌های دکارتی محاسبه می‌شود، که خود به صورت مجموعه‌ی از مشتقات زنجیری حاصل از نامتغیرهای تنش است (روابط ۱۰۰ و ۱۰۱):

$$M_{varJ_T} := \frac{\partial^2 J_T}{\partial \underline{\sigma}^2} = M_{varI_T} + \frac{1}{3} M_{varI_T} + \frac{\partial I_T}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial I_T}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t + \frac{\partial I_T}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial I_T}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t - \frac{4}{9} I_T \frac{\partial I_T}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial I_T}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t \quad (100)$$

$$M_{var\theta} := \frac{\partial^2 \theta}{\partial \underline{\sigma}^2} = \frac{-\sqrt{3}}{2 \sin 3\theta \sqrt{J_T}} \frac{\partial J_T}{\partial \underline{\sigma}^2} - \frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t + \frac{3\sqrt{3}}{2 J_T^2 \sin 3\theta} \left[ \frac{\partial J_T}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial \sqrt{J_T}}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t + \frac{\partial \sqrt{J_T}}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial J_T}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t \right] - \frac{6\sqrt{3} J_T}{\sqrt{J_T}^2 \sin 3\theta} \frac{\partial \sqrt{J_T}}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\partial \sqrt{J_T}}{\partial \underline{\sigma}} \right)^t + \frac{3\sqrt{3} J_T}{2 J_T^2 \sin 3\theta} \frac{\partial^2 \sqrt{J_T}}{\partial \underline{\sigma}^2} \quad (101)$$

## پانوشتها

1. elastic-perfectly plastic model
2. Mohr- Coulomb
3. upper-bound
4. lower-bound

## منابع (References)

1. Patton, F.D. "Multiple modes of shear failure in rock", *Proc. 1st Congr. Int. Soc. Rock Mech.*, **1**, Lisbon, Portugal, pp. 509-513 (1966).
2. Barton, N.R. "Review of a new shear strength criterion for rock joints", *Engng. Geol. Journal*, **7**(4), pp. 287-332 (1973).
3. Barton, N.R. and Bandis, S.C. "Review of predictive capabilities of JRC-JCS model in engineering practice", *In Rock Joints, Proc. Int. Symp. on Rock Joints*, Loen, Norway, (eds N. Barton and O. Stephansson), pp. 603-610, Rotterdam, Balkema (1990).
4. Hoek, E. and Brown, E.T., *Underground Excavations in Rock*, London: Instn Min. Metall (1980a).
5. Hoek, E. and Brown, E.T. "Empirical strength criterion for rock masses", *J. Geotech. Engng. Div., ASCE*, **106**(GT9), pp. 1013-1035 (1980b).
6. Hoek, E. and Brown, E.T. "The Hoek-Brown failure criterion- a 1988 update", 15th Canadian Rock Mechanics Symposium (ed. J.C. Curran), Toronto, Canada, pp. 31-38 (1988).
7. Hoek, E., Carranza-Torres, C. and Corkum, B. "Hoek-Brown failure criterion-2002 edition", In: *Proceedings of the North American Rock Mechanics Society Meeting in Toronto, Canada* (July 2002).
8. Suchowerska, A.M., Merifield, R.S., Carter, J.P. and Clausen, J. "Prediction of underground cavity roof collapse using Hoek-Brown failure criterion", *J. computers & Geotechnics*, **44**, pp. 93-103 (2012).
9. Lee, J.Y. and Ahn, S.Y. "Interactive visualization of elasto-plastic behavior through stress paths and yield surfaces in finite element analysis", *J. Finite Element in Analysis and Design*, **47**(5), pp. 496-510 (2011).
10. Clausen, J. and Damkilde, L. "An exact implementation of the Hoek-Brown criterion for elasto-plastic finite element calculations", *Int. J. of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **45**(6), pp. 831-847 (2008).
11. Benz, T., Schwab, R., Kauther, R.A. and Vermeer, P.A. "A Hoek-Brown criterion with intrinsic material strength factorization", *Int. J. of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **45**(2), pp. 210-222 (2008).
12. Merifield, R.S., Lyamin, A.V. and Sloan S.W. "Limit analysis solutions for the bearing capacity of rock masses using the generalized Hoek-Brown criterion", *Int. J. of Rock. Mech. Min. Sci.*, **43**(6), pp. 920-937 (2006).
13. Sofianos, A.I. and Nomikos, P.P. "Equivalent Mohr-Coulomb and generalized Hoek-Brown strength parameters for supported axisymmetric tunnels in plastic or brittle rock", *Int. J. of Rock. Mech. Min. Sci.*, **43**(5), pp. 683-704 (2006).
14. Serrano, A., Olalla, C. and Gonzalez, J. "Ultimate bearing capacity of rock masses based on the modified Hoek-Brown criterion", *Int. J. of Rock. Mech. Min. Sci.*, **37**(6), pp. 1013-1018 (2000).
15. Owen, D.R.J. and Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity-Theory and Practice*, Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K. (1980).
16. Potts, D.M. and Zdravkovic, L., *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering, Theory*, **1**, 1st Edition, Thomas Telford, London, England (1999).
17. Desai, C.S. and Siriwardane, H.J., *Constitutive Laws for Engineering Materials, with Emphasis on Geologic Material*, Prentice-Hall, U.S.A. (1984).
18. Hoek, E., Kaiser, P.K. and Bawden, W.F., *Support of Underground Excavations in Hard Rock*, Balkema, Rotterdam, Netherlands (1995).
19. Bieniawski, Z.T. "Rock mass classification in rock engineering, In Exploration for rock engineering", *Proc. of the Symp.*, (ed. Z.T. Bieniawski), **1**, Balkema, Cape Town, South Africa, pp. 97-106 (1976).
20. Wickham, G.E., Tiedemann, H.R. and Skinner, E.H. "Support determination based on geologic predictions", *In Proc. North American Rapid Excav. Tunneling Conf.*, Chicago, (eds K.S. Lane and L.A. Garfield), Soc. Min. Engrs, Am. Inst. Min. Metall. Petrolm. Engrs., New York, U.S.A., pp. 43-64 (1972).
21. Barton, N., Loeset, F., Lien, R. and Lunde, J. "Application of Q-system In design decisions concerning dimensions and appropriate support for underground installations", *In Subsurface Space*, (ed. M. Bergman), **2**, Pergamon, New York, U.S.A., pp. 553-561 (1980).
22. Binmore, K. and Davies, J., *Calculus Concepts and Methods*, Cambridge University Press, England, 190 p. (2007).