

# کاربرد روش جریمه پویا در تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت گره

امیرحسین شهبور (دانشجوی دکتری)

هدایت ذکایی آشتیانی (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

عباس بابازاده (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه تهران

مهندسی عمران شریف  
دوره‌ی ۲، شماره‌ی ۲، ص. ۱۱۳-۱۱۹، (پادداشت نثی)

مسئله‌ی تخصیص ترافیک، مسئله‌ی توزیع جریان در کمان‌های یک شبکه‌ی حمل و نقل است. برای حل این مسئله، در حالتی که کمان‌ها و گره‌های شبکه دارای ظرفیت نامحدود (برای عبور جریان) باشند، روش‌های تکراری کارایی نظیر فرانک - ولف وجود دارند. در این روش‌ها زیرمسئله‌ی خطی شده در هر تکرار، معادل مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر بین زوج‌های مبدأ - مقصد است. ولی در حالت کلی، ظرفیت کمان‌ها و گره‌های شبکه محدود است و در نظر گرفتن صریح این نوع محدودیت‌ها سبب می‌شود که زیرمسئله‌ی خطی شده به مسئله‌ی جریان چند کالایی با هزینه کمیته تبدیل و در نتیجه حل آن بسیار سخت شود. یک روش برای حل این مشکل در نظر گرفتن ضمنی محدودیت ظرفیت با استفاده از یک تابع جریمه‌ی حساس به ظرفیت است، به نحوی که اضافه کردن این تابع جریمه به زمان سفر کمان‌ها سبب رعایت محدودیت ظرفیت شود. در ادبیات تخصیص ترافیک، نتایج کاربرد توابع جریمه برای در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت کمان در شبکه‌های واقعی موجود و کارایی آنها به خوبی روشن است، در حالی که چنین نتایجی برای در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت گره گزارش نشده است. در این نوشتار روش تابع جریمه‌ی پویا در حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت گره که به مراتب سخت‌تر از محدودیت ظرفیت کمان است، به کار می‌رود و عملکرد آن برای چند شبکه‌ی آزمایشی با ابعاد مختلف و نیز یک شبکه‌ی واقعی ارائه می‌شود.

am\_shahpar@civil.sharif.edu  
ashtiani@sharif.edu  
ababazadeh@ut.ac.ir

واژگان کلیدی: تخصیص ترافیک، محدودیت ظرفیت، روش جریمه‌ی پویا.

## مقدمه

با هزینه کمیته می‌شود که حل آن در مقایسه با مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر بسیار دشوار است.

محدودیت ظرفیت کمان حالت خاصی از در نظر گرفتن محدودیت‌های جانبی است که تاکنون بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. روش‌های ارائه شده برای حل این مسئله با هدف پرهیز از حل مسئله‌ی جریان چندکالایی، به دو دسته تقسیم می‌شوند: دسته‌ی اول از توابع زمان سفر مجانبی استفاده می‌کنند و دسته‌ی دوم با استفاده از روش جریمه (یا ضرایب لاگرانژ) مسئله‌ی اصلی را به دنباله‌ی از مسئله‌های تخصیص ترافیک بدون محدودیت ظرفیت تبدیل می‌کنند. اولین بار با استفاده از توابع زمان سفر مجانبی، محدودیت ظرفیت کمان‌ها به صورت ضمنی در نظر گرفته شد.<sup>[۱]</sup> البته برخی از محققان نشان دادند این روش سبب برآورد زمان سفرهای غیرواقعی و بسیار بزرگ برای کمان‌های با جریان ترافیک نزدیک ظرفیت می‌شود؛ همچنین در نزدیکی نقطه‌ی تعادل، سبب جابجایی چرخشی مسیرهای با جریان مثبت و بروز مشکلات عددی در حل مسئله می‌شود.<sup>[۲]</sup>

مسئله‌ی تخصیص ترافیک، چگونگی توزیع جریان ترافیک را در کمان‌های یک شبکه‌ی حمل و نقل تعیین می‌کند. در ادبیات تخصیص ترافیک مادامی که برای جریان ترافیک عبوری از کمان‌ها و گره‌های شبکه، محدودیت ظرفیتی در نظر گرفته نشود؛ روش‌های کارایی برای حل مسئله ارائه می‌شود. ولی در حالت کلی، کمان‌ها و گره‌های شبکه ظرفیت محدودی دارند که با رسیدن جریان ترافیک به این ظرفیت‌ها، صف وسایل نقلیه تشکیل می‌شود. از این رو در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت گره‌ها و کمان‌های شبکه، سبب بهبود نتایج مسئله‌ی تخصیص ترافیک می‌شود. ولی اضافه شدن این محدودیت‌ها سبب از بین رفتن کارایی روش‌های حلی نظیر فرانک - ولف می‌شود.<sup>[۱]</sup> در این روش‌ها زیرمسئله‌ی خطی شده، معادل یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین هر مبدأ - مقصد است؛ در حالی که اضافه شدن محدودیت‌های جانبی به مسئله‌ی تخصیص ترافیک، سبب تبدیل این مسئله به یک مسئله‌ی جریان چندکالایی

تاریخ: دریافت ۲۸/۱۱/۸۶، داوری ۱۷/۹/۸۷، پذیرش ۲۲/۳/۸۸.

متصل در نظر بگیرد و  $K_{rs}$  را مجموعه‌ی مسیرهای از مبدأ  $r$  به مقصد  $s$  بنامید. به علاوه، فرض کنید  $x_a$  جریان کمان  $a$ ،  $f_k^{rs}$  جریان مسیر  $k$  از مبدأ  $r$  به مقصد  $s$ ، و  $x = (x_a)$  و  $f = (f_k^{rs})$  به ترتیب بردارهای جریان کمان و مسیر هستند. در شرایطی که زمان سفر هر کمان  $a$  فقط تابعی از جریان در خودش به صورت  $t_a(x_a)$  باشد، مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت‌های جانبی به صورت مسئله‌ی بهینه‌سازی غیرخطی (SCTAP) بیان می‌شود:

$$\text{Min } z(x) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w) dw \quad (1)$$

$$s.t. \quad \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r \in R, s \in S \quad (2)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S \quad (3)$$

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{ak} \quad \forall a \in A \quad (4)$$

$$g_j(x) \leq 1 \quad \forall j \in J \quad (5)$$

در رابطه‌های ۱ تا ۵،  $z(0)$  تابع هدف و  $\delta_{ak}^{rs}$  اگر کمان  $a$  روی مسیر  $k$  از مبدأ  $r$  به مقصد  $s$  باشد برابر یک و در غیر این صورت صفر است.  $g_j(\cdot)$  نیز تابع محدودیت جانبی  $J$  و مجموعه‌ی اعضای شبکه نظیر کمان‌ها، گره‌ها، مسیرها یا ترکیبی از آن‌ها است که دارای نوعی محدودیت هستند. فرض می‌کنیم که (SCTAP) دارای جواب امکان‌پذیر است. با این فرض که  $t_a : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  پیوسته، مثبت و اکیداً صعودی، و  $g_j : [0, \infty)^A \rightarrow (-\infty, \infty)$  مشتق‌پذیر، یکنوا، و محدب باشد، (SCTAP) یک مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب خواهد بود. اگر  $u_{rs}$  و  $\lambda_j$  را به ترتیب ضرایب لاگرانژ محدودیت‌های ۲ و ۵ در نظر بگیریم و تعریف کنیم  $u = (u_{rs})$  و  $\lambda = (\lambda_j)$  آن‌گاه شرایط بهینه‌گی مرتبه‌ی اول KKT برای (SCTAP) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\left( \sum_{a \in A} (t_a(x_a) + \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a}) \delta_{ak}^{rs} - u_{rs} \right) f_k^{rs} = 0 \quad \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S \quad (6)$$

$$\sum_{a \in A} (t_a(x_a) + \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a}) \delta_{ak}^{rs} - u_{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S \quad (7)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S \quad (8)$$

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r \in R, s \in S \quad (9)$$

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{ak} \quad \forall a \in A \quad (10)$$

$$(g_j(x) - 1) \lambda_j = 0 \quad \forall j \in J \quad (11)$$

$$g_j(x) - 1 \leq 0 \quad \forall j \in J \quad (12)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (13)$$

رابطه‌های ۶ و ۷ بیان‌گر اصل تعادل وارداراپ<sup>[۹]</sup> با در نظر گرفتن زمان سفر تعمیم یافته‌ی هر مسیر  $k$  به شکل رابطه‌ی ۱۴ هستند:

$$c_k^{rs}(x, \lambda) = \sum_{a \in A} (t_a(x_a) + \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a}) \delta_{ak}^{rs} \quad (14)$$

در روش‌های نوع دوم، محدودیت ظرفیت کمان با استفاده از تابع جریمه یا ضرایب لاگرانژ آزاد و به تابع هدف منتقل می‌شود. از معمول‌ترین روش‌های نوع دوم می‌توان به روش ارائه‌شده به نام تابع جریمه داخلی (IPF)<sup>[۱، ۲]</sup> و روش ضرایب لاگرانژ افزایشی (ALM)<sup>[۳]</sup> اشاره کرد.<sup>[۵]</sup> برخی دیگر از پژوهشگران نیز ضمن مقایسه‌ی دو روش IPF و ALM نشان دادند که روش IPF برای همه‌ی مثال‌ها قادر به دستیابی به جواب ممکن بوده است، در حالی‌که در روش ALM احتمال دارد جواب‌های غیرممکن نیز به دست آید.<sup>[۶]</sup> در مقابل، زمان حل مسئله در روش IPF به دلیل در نظر گرفتن شرایط امکان‌پذیری جواب در هر تکرار بزرگ‌تر از روش ALM است و اختلاف زمان حل با بزرگ شدن ابعاد شبکه افزایش می‌یابد. آنها نتیجه گرفتند که برای حل شبکه‌های واقعی روش IPF کاربردی نیست و بهتر است با قبول دستیابی به جواب‌هایی با عدم امکان‌پذیری کم از روش ALM استفاده شود.

به تازگی روش تکراری تابع جریمه دینامیکی (DPF)<sup>[۳]</sup> برای حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت کمان‌ها ارائه شده است.<sup>[۷]</sup> در این روش محدودیت ظرفیت کمان‌ها با اضافه کردن توابع جریمه به زمان سفر کمان‌ها به صورت ضمنی در نظر گرفته شده است. سپس در هر تکرار این روش، مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت جانبی (SCTAP) به یک مسئله‌ی تخصیص تکمیالی بدون محدودیت‌های جانبی با توابع زمان سفر تعمیم یافته<sup>۵</sup> تبدیل و با استفاده از روش خطی‌سازی حل می‌شود. این روش برای چند شبکه‌ی شناخته شده به کار برده شده است و نتایج با سایر محققان<sup>[۶]</sup> مقایسه شده است. نتایج این کار نشان داد که روش DPF نسبت به دو روش ALM و IPF در مدت زمان کمتری به جوابی امکان‌پذیر با مقدار تابع هدف بکمن<sup>[۸]</sup> بهتری دست پیدا می‌کند.

اگرچه مطالعات مختلفی برای حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت کمان‌ها ارائه شده است، ولی تاکنون به محدودیت ظرفیت گره کمتر توجه شده است. اهمیت محدودیت ظرفیت گره به دلیل محدود بودن ظرفیت تقاطع‌های شبکه است و مجموع جریان ترافیک ورودی به آن‌ها نمی‌تواند از مقدار مشخصی بیشتر شود. یکی از مهم‌ترین دلایلی که محدودیت ظرفیت گره برخلاف اهمیت آن بسیار کمتر از محدودیت ظرفیت کمان مورد توجه قرار گرفته است، ضعف روش‌های حل مرسوم مسئله‌ی تخصیص ترافیک است. در این روش‌ها توابع زمان سفر (با جریمه) متقارن<sup>۶</sup> فرض می‌شوند، در حالی‌که برای در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت گره لازم است تا تابع جریمه به جریان ترافیک تمامی کمان‌های ورودی به گره حساس باشد. در این حالت تابع جریمه تابعی نامتقارن<sup>۷</sup> خواهد شد. لذا در این نوشتار مسئله‌ی تخصیص ترافیک به مسئله‌ی تکمیالی غیرخطی تبدیل و با در نظر گرفتن توابع جریمه غیرمتقارن حل می‌شود. برای این منظور روش تکراری DPF برای حل مسئله با محدودیت ظرفیت گره توسعه داده می‌شود. در این روش توابع جریمه با ساختاری مشخص و ویژگی‌های خاص هستند که بعد از هر تکرار روش حل به صورت پویا بر اساس نتایج تکرار قبل به‌هنگام می‌شوند. همچنین نتایج کاربرد این روش برای چند شبکه با ابعاد مختلف و شبکه‌ی واقعی شهر مشهد ارائه شده است.

## مدل فرمول‌بندی مسئله

یک شبکه‌ی ترافیکی را به صورت گراف  $G(I, A)$  با مجموعه‌ی گره‌های  $I$  و مجموعه‌ی کمان‌های  $A$  در نظر بگیرید، که در آن هر کمان  $a$  دارای یک تابع زمان سفر  $t_a(0)$  است. فرض کنید  $R$  و  $S$  به ترتیب مجموعه‌ی گره‌های مبدأ و مقصد در  $I$  هستند و تقاضای سفر از هر مبدأ  $r$  به هر مقصد  $s$  مقدار ثابت  $q_{rs}$  است. شبکه‌ی  $G$  را قویاً

## روش حل

روش این نوشتار برای حل مسئله‌ی (SCTAP)، حل مسئله‌ی (RSCTAP) با استفاده از تابع جریمه‌ی  $p_j(x, \alpha_j)$  طبق رابطه‌ی ۲۰ است. از آنجا که تعریف این تابع به مقدار  $\alpha_j$  وابسته است، در این بخش یک روش تکراری با تصحیح  $\alpha$  به صورت رابطه‌ی ۲۲ برای حل مسئله‌ی (RECTAP) ارائه می‌شود:

$$\alpha_j^n = p_j(x^n, \alpha_j^{n-1}) = \alpha_j^{n-1} \psi(g_j(x^n)) \quad (22)$$

که در رابطه‌ی ۲۲،  $x^n$  جواب به دست آمده برای مسئله در تکرار  $n$  به ازاء مقدار  $\alpha_j^{n-1}$  است. به عبارت دیگر، تابع جریمه  $P_j$  یک نوع تابع جریمه‌ی پویاست که در آن مقدار  $P_j$  در تکرار  $n+1$  نسبت به تکرار  $n$  اگر  $g_j(x^n) > 1$  باشد؛ افزایش می‌یابد و اگر  $g_j(x^n) < 1$  باشد، کاهش می‌یابد.

بدین ترتیب، شرایط  $c$  و  $d$  در فرض ۱ با افزایش تکرار به تعریف حدی خود نزدیک‌تر و در نتیجه  $p_j$  نیز به سمت ضریب لاگرانژ  $\lambda_j$  میل می‌کند. روش حل در تکرار  $n$  متوقف می‌شود اگر رابطه‌های ۱۱ و ۱۲ به ازاء  $\lambda = \alpha^n$  با تقریب خوبی برقرار باشند. شرایط توقف در تکرار  $n$  را می‌توان به صورت رابطه‌های ۲۳ و ۲۴ در نظر گرفت:

$$g_j(x^n) \leq 1 \quad \forall j \in J \quad (23)$$

$$(1 - g_j(x^n))\alpha_j^n \leq \alpha_j^0 \rho \quad \forall j \in J : g_j(x^n) < 1 - \rho \quad (24)$$

در رابطه‌ی ۲۴، مقدار اولیه ضریب لاگرانژ محدودیت جانبی  $J \in z$  است. بدیهی است که اگر  $\rho \rightarrow 0$  آن‌گاه  $x^n$  به سمت جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (SCTAP) میل می‌کند. به علاوه، شرط ۲۳ تضمین می‌کند که  $x^n$  همواره یک جواب امکان‌پذیر برای مسئله‌ی اخیر باشد. نکته‌ی شایان توجه در روش حل پیشنهادی آن است که مسئله‌ی (RSCTAP) برای هر  $\alpha > 0$ ، خود یک مسئله‌ی تخصیص ترافیک بدون محدودیت‌های جانبی با زمان سفر تعمیم یافته‌ی کمان‌ها به صورت رابطه‌ی ۲۵ است:

$$\bar{t}_a(x) = t_a(x_a) + \sum_{j \in J} p_j(x, \alpha_j) \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a} \quad (25)$$

که با استفاده از فرض مثبت بودن تابع  $\bar{t}_a(\cdot)$  قابل تبدیل به یک مدل تکمیلی غیرخطی بر حسب جریان در مسیرها است.<sup>[۱۰]</sup> به‌طور دقیق‌تر، اگر جریان کمان  $a$  به صورت رابطه‌ی ۲۶:

$$x_a(f) := \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{ak}^{rs} \quad (26)$$

و زمان سفر تعمیم یافته‌ی مسیر  $k$  به صورت رابطه‌ی ۲۷ تعریف شوند:

$$c_k^{rs}(f, \alpha) := \sum_{a \in A} (t_a(x_a(f)) + \sum_{j \in J} p_j(x(f), \alpha_j) \frac{\partial g_j(x(f))}{\partial x_a}) \delta_{ak}^{rs} \quad (27)$$

مدل تکمیلی  $(NCP(\alpha))$  به صورت رابطه‌های ۲۸ تا ۳۳ بیان می‌شود:

به عبارت دیگر، برای هر  $(f, u, x, \lambda)$  که در شرایط ۶ تا ۱۳ صدق کند، زمان سفر تعمیم یافته‌ی  $c_k^{rs}(x, \lambda)$  برای هر مسیر  $k \in K_{rs}$  با  $f_k > 0$  برابر است با  $u_{rs} = \min_{k \in K_{rs}} \{c_k^{rs}(x, \lambda)\}$ . در واقع رابطه‌ی ۱۴، زمان سفر تعمیم یافته هر مسیر است که برابر مجموع زمان سفرها و تأخیرهای صف ناشی از محدودیت‌های جانبی در کمان‌های روی آن مسیر است. برای هر  $j \in J$ ، فرض کنید تابع  $p_j(\cdot, \alpha_j) : [0, \infty)^{|A|} \rightarrow [0, \infty)$  برای هر  $\alpha_j > 0$  تعریف شده است و قرار دهید  $\alpha = (\alpha_j)$  و  $p(\cdot, \alpha) = (p_j(\cdot, \alpha_j))$ . روش این نوشتار برای حل مسئله‌ی (SCTAP)، روشی تقریبی مبتنی بر اضافه کردن جریمه‌ی  $\sum_{j \in J} p_j(x, \alpha_j) \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a}$  به زمان سفر هر کمان  $a$  است، به طوری که اولاً تابع جریمه  $p_j(\cdot, \cdot)$  نقش ضریب لاگرانژ  $\lambda_j$  را در مسئله بازی کنند و ثانیاً اعمال این جریمه‌ها موجب رعایت ضمنی شرایط ۱۱ تا ۱۳ شود. این خصوصیات منجر به فرض زیر می‌شود:

فرض ۱. تابع جریمه‌ی  $p_j(x, \alpha_j)$  به ازای هر  $\alpha_j > 0$  دارای ویژگی‌های زیر است:

- (a) پیوسته، مشتق‌پذیر، غیرمنفعی و یکنواست؛
- (b) برای  $g_j(x) = 1$  برابر  $\alpha_j$  است؛
- (c) برای  $g_j(x) > 1$  به قدر کافی بزرگ است؛
- (d) برای  $g_j(x) < 1$  به قدر کافی کوچک است.

جایگزینی  $p_j(x, \alpha_j)$  به جای  $\lambda_j$  و نیز حذف رابطه‌های ۱۱ تا ۱۳، مدل آزادشده‌ی (RSCTAP) را نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{a \in A} (t_a(x) + \sum_{j \in J} p_j(x, \alpha_j) \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a}) \delta_{ak}^{rs} - u_{rs} f_k^{rs} = 0 \quad \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S \quad (15)$$

$$\sum_{a \in A} (t_a(x) + \sum_{j \in J} p_j(x, \alpha_j) \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a}) \delta_{ak}^{rs} - u_{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S \quad (16)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S \quad (17)$$

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r \in R, s \in S \quad (18)$$

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{ak}^{rs} \quad \forall a \in A \quad (19)$$

در مسائل عملی، ناگزیریم تابع جریمه‌ی  $p_j(x, \alpha_j)$  را با تقریبی از تعریف حدی اخیر انتخاب کنیم. یک انتخاب برای این تابع به صورت زیر است:

$$p_j(x, \alpha_j) = \alpha_j \psi(g_j(x)) \quad (20)$$

در رابطه‌ی ۲۰،  $\psi(\cdot)$  برای هر پارامتر  $0 < \rho < 1$  طبق رابطه‌ی ۲۱ تعریف می‌شود:

$$\psi(y) := \begin{cases} \frac{\rho}{1-y} & y < 1 - \rho \\ \frac{y-1}{\rho} + 1 & y \geq 1 - \rho \end{cases} \quad (21)$$

واضح است که  $\psi(\cdot) : [-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  مثبت، صعودی و پیوسته‌ی مشتق‌پذیر است، و نیز  $\psi(1) = 1$ . به علاوه، برای  $\rho \rightarrow 0$  شرایط  $c$  و  $d$  در فرض ۱ به تعریف حدی خود نیز میل می‌کنند.

از مسئله‌ی اصلی  $(NCP(\alpha))$  خواهند شد، ولی به دلیل غیرخطی بودن  $c_k^{r,s}(\cdot, \alpha)$  حل آن با روش‌های حل عمومی تکمیلی غیرخطی بسیار مشکل است. آشتیانی برای حل این مشکل از خطی‌سازی تکراری استفاده کرده است. در هر تکرار خطی‌سازی زیرمسئله‌ی  $(NCP_{r,s}(\alpha))$  در جواب فعلی  $\bar{f}$  خطی‌سازی و حل می‌شود. زیر مسئله‌ی خطی‌شده شامل شرایط ۳۵ و ۳۶ است:

$$c_k^{r,s}(\bar{f}, \alpha) + \sum_{k' \in K_{r,s}^w} [(f_{k'} - \bar{f}_{k'}) \frac{\partial c_k^{r,s}(\bar{f}, \alpha)}{\partial f_{k'}}] - u_{r,s} f_k^{r,s} = 0 \quad \forall k \in K_{r,s}^w \quad (35)$$

$$c_k^{r,s}(\bar{f}, \alpha) + \sum_{k' \in K_{r,s}^w} [(f_{k'} - \bar{f}_{k'}) \frac{\partial c_k^{r,s}(\bar{f}, \alpha)}{\partial f_{k'}}] - u_{r,s} \geq 0 \quad \forall k \in K_{r,s}^w \quad (36)$$

که نسخه‌ی خطی‌شده‌ی شرایط ۲۸ و ۲۹ برای مجموعه مسیرهای فعال  $K_{r,s}^w$  هستند. شرط توقف خطی‌سازی به صورت رابطه‌ی ۳۷ است:

$$\left( \max_{k \in K_{r,s}^w; \bar{f}_k > 0} c_k^{r,s}(f, \alpha) - u_{r,s} \right) / \max_{k \in K_{r,s}^w; \bar{f}_k > 0} c_k^{r,s}(f, \alpha) \leq \varepsilon \quad (37)$$

با برقراری رابطه‌ی ۳۷، یک جواب  $(f^{r,s}, u_{r,s})$  با تقریب  $\varepsilon$  برای مبدأ مقصد  $(r, s)$  به دست می‌آید. پس از حل زیرمسائل مربوط به همه‌ی زوج‌های مبدأ - مقصد، یک تکرار روش حل با تعیین یک جواب  $(f, u)$  به پایان می‌رسد. روش حل در پایان یک تکرار متوقف می‌شود اگر متوسط خطای جواب به دست آمده نیز آن تکرار کوچک‌تر یا مساوی  $\varepsilon$  باشد شرط ۳۸ به دست می‌آید:

$$\left( \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} q^{r,s} \varepsilon^{r,s} \right) / \left( \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} q^{r,s} \right) \leq \varepsilon \quad (38)$$

در شرط ۳۸،  $\varepsilon^{r,s}$  خطای مبدأ - مقصد  $(r, s)$  است و طبق رابطه‌ی ۳۹ تعریف می‌شود:

$$\varepsilon^{r,s} := \max_{k \in K_{r,s}^w; \bar{f}_k > 0} |c_k^{r,s}(f, \alpha) - u_{r,s}| / u_{r,s} \quad (39)$$

روش پیشنهادی این نوشتار برای حل (SCTAP) با دقت  $\rho$  مشابه روش خطی‌سازی آشتیانی برای حل  $(NCP(\alpha))$  است، با این تفاوت که پارامترهای  $\alpha$  (که در این روش همان ضرایب لاگرانژ  $\lambda$  هستند) از یک مقدار اولیه شروع و در هر تکرار طبق رابطه‌ی ۲۰، به‌طور پویا بهنگام می‌شوند. این روش در ادامه‌ی روش تابع جریبه‌ی دینامیکی (DPF) نامیده می‌شود. بیان رسمی روش DPF به صورت زیر است:

گام ۱ (مقدار دهی اولیه)

۱.۱. مقادیر مثبت  $\varepsilon$  و  $\rho$  و یک بردار  $\lambda^0$  مثبت را انتخاب کنید؛

۲.۱. برای هر زوج مبدأ - مقصد  $(r, s)$  قرار دهید  $K_{r,s}^w = \phi$ ؛

۳.۱. قرار دهید  $f = 0$ ،  $x^0 = x(f)$ ، و  $n = 0$ ؛

گام ۲ (انجام یک تکرار روش خطی‌سازی)

۱.۲. قرار دهید  $n = n + 1$ ؛

۲.۲. برای هر مبدأ  $r \in R$  انجام دهید:

۱.۲.۱. کوتاه‌ترین مسیر  $k_{r,s}$  از مبدأ  $r$  به هر مقصد  $s \in S$  را بر اساس

زمان‌های  $\bar{t}_\alpha(x^{n-1})$  بیابید. فرض کنید  $u_{r,s}$  زمان کوتاه‌ترین

مسیر به مقصد  $s$  است؛

۲.۲.۲. برای هر مبدأ  $s \in S$  انجام دهید:

$$(c_k^{r,s}(f, \alpha) - u_{r,s}) f_k^{r,s} = 0 \quad \forall k \in K_{r,s}, r \in R, s \in S \quad (28)$$

$$c_k^{r,s}(f, \alpha) - u_{r,s} \geq 0 \quad \forall k \in K_{r,s}, r \in R, s \in S \quad (29)$$

$$f_k^{r,s} \geq 0 \quad \forall k \in K_{r,s}, r \in R, s \in S \quad (30)$$

$$\left( \sum_{k \in K_{r,s}} f_k^{r,s} - q_{r,s} \right) u_{r,s} = 0 \quad \forall r \in R, s \in S \quad (31)$$

$$\sum_{k \in K_{r,s}} f_k^{r,s} - q_{r,s} \geq 0 \quad \forall r \in R, s \in S \quad (32)$$

$$u_{r,s} \geq 0 \quad \forall r \in R, s \in S \quad (33)$$

در صورتی‌که تابع  $\partial g_j(\cdot) / \partial x \times a$  مشتق پذیر، غیرمنفی و یکنوا باشد، آنگاه برای  $\alpha$  غیرمنفی  $c_k^{r,s}(\cdot, \alpha)$  مثبت، پیوسته، مشتق پذیر و اکیداً یکنوا خواهد بود. همچنین این خصوصیت حتی اگر زمان سفر کمان‌ها توسط توابعی پیوسته‌ی مشتق پذیر، مثبت و اکیداً یکنوا از بردار جریان کمان به صورت  $t_\alpha(x)$  نیز بیان شوند وجود خواهد داشت. در این صورت مدل تکمیلی  $(NCP(\alpha))$  دارای جواب یگانه‌ی  $(x, u)$  است. شرط کافی برای یکنوایی  $\partial g_j(\cdot) / \partial x_\alpha$  خطی‌بودن  $g_j(\cdot)$  است.

حل مستقیم مدل‌های تکمیلی تخصیص ترافیک (بدون محدودیت‌های جانبی) در کاربردهای عملی به علت تعداد زیاد متغیرها و غیرخطی بودن آن شدیداً زمان‌بر و عملاً غیرممکن است. روشی تکراری به نام روش خطی‌سازی برای حل این نوع مدل معرفی شده است.<sup>[۱۶]</sup> به علاوه، برخی پژوهشگران نشان دادند که این روش خطی‌سازی برای حل مسئله‌ی تخصیص مسافر در سیستم‌های همگانی متراکم نیز تعمیم پذیر است.<sup>[۱۷]</sup>

در این نوشتار، مدل تکمیلی  $(NCP(\alpha))$  برای هر  $\alpha \geq 0$  با روش خطی‌سازی آشتیانی حل می‌شود. در هر تکرار این روش، با تجزیه‌ی متغیرهای  $f$  و  $u$  روی زوج‌های مبدأ - مقصد، زیرمسئله‌ی محدودشده‌ی مسئله‌ی اصلی به نام  $(NCP_{r,s}(\alpha))$  برای هر زوج مبدأ - مقصد  $(r, s)$  حاصل می‌شود که فقط شامل متغیرهای  $(f_k^{r,s})_{k \in K_{r,s}}$  و  $u_{r,s}$  است و متغیرهای مربوط به سایر زوج‌های مبدأ - مقصد در مقدار فعلی آن‌ها ثابت نگه داشته می‌شوند. در هر تکرار روش حل، پس از حل تمام زیرمسائل و تعیین  $(f^{r,s}, u_{r,s})$  برای هر زوج  $(r, s)$  یک جواب  $(f, u)$  برای مسئله‌ی اصلی در آن تکرار به دست می‌آید. روش حل تکرار می‌شود تا وقتی‌که  $(f, u)$  با تقریب مناسبی در شرایط ۲۸ و ۲۹ صدق کند.

در روش خطی‌سازی، همچنین از تکنیک تولید مسیر برای کاهش ابعاد زیرمسائل استفاده می‌شود. در این روش، جواب  $(f^{r,s}, u_{r,s})$  مربوط به هر زوج مبدأ - مقصد  $(r, s)$  با حل زیرمسئله‌ی مربوط به آن برای یک مجموعه مسیرهای فعال  $K_{r,s}^w \subseteq K_{r,s}$  به دست می‌آید. در این صورت، هر چه تعداد مسیرهای  $K_{r,s}^w$  کمتر باشد، ابعاد زیرمسئله کوچک‌تر و در نتیجه حل آن ساده‌تر خواهد بود. مجموعه‌ی مسیرهای فعال هر زوج مبدأ - مقصد در شروع روش حل برابر تهی هستند و سپس در هر تکرار بهنگام می‌شوند. برای انجام این کار، برای هر زوج  $(r, s)$ ، کوتاه‌ترین مسیر از  $r$  به  $s$  براساس زمان‌های فعلی  $\bar{t}_\alpha(x(f))$  تعیین، و اگر شرط ۳۴

$$\left( \min_{k \in K_{r,s}^w} c_k^{r,s}(f, \alpha) - u_{r,s} \right) / u_{r,s} \leq \varepsilon \quad (34)$$

برقرار نبود آن مسیر به مجموعه‌ی  $K_{r,s}^w$  اضافه می‌شود. در شرط ۳۴،  $u_{r,s}$  طول کوتاه‌ترین مسیر از  $r$  به  $s$ ، و  $\varepsilon \geq 0$  دقت رسیدن به شرایط توقف است. برای کاهش تعداد دفعات محاسبه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها در این روش، در هر تکرار یک درخت کوتاه‌ترین مسیر با ریشه‌ی  $r$  برای هر  $r \in R$  محاسبه می‌شود. هر چند با استفاده از روش‌های تجزیه و تولید مسیر ابعاد زیرمسائل  $(NCP_{r,s}(\alpha))$  بسیار کوچک‌تر

رابطه‌ی ۴۳ بیان‌گر تابع جریمه‌ی مربوط به هر  $i \in \bar{I}$  است. در این حالت،  $(NCP(\alpha))$  برای هر  $\alpha > 0$  یک مسئله‌ی تخصیص ترافیک بدون محدودیت‌های جانبی با توابع زمان سفر تعمیم‌یافته به صورت رابطه‌ی ۴۴ خواهد بود.

$$\bar{t}_a(x) = \begin{cases} t_a(x_a) + p_{\varepsilon(a)}(x, \alpha_{\varepsilon(a)}/s_a) & \text{if } e(a) \in \bar{I} \\ t_a(x_a) & \text{if } e(a) \in I \setminus \bar{I} \end{cases} \quad (44)$$

در حالت عمومی تابع  $\bar{t}_a$  نامتقارن و به جریان ترافیک در سایر کمان‌ها وابسته است. اگرچه در این حالت  $(NCP(\alpha))$  را نمی‌توان به صورت یک مسئله‌ی بهینه‌سازی بیان کرد ولی صورت تکمیلی این مسئله امکان استفاده از روش‌های تکمیلی غیرخطی مانند روش خطی‌سازی آشتیانی را فراهم می‌کند.

### نتایج عددی

در این بخش کارایی روش حل پیشنهادی DPF برای حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت گره ارائه شده است. روش DPF در محیط VISUAL C++ پیاده‌سازی و روی رایانه‌ی با قدرت پردازش ۱٫۸GHz و حافظه‌ی ۵۱۲SD RAM اجرا شده است. جدول ۱ مشخصات شبکه‌های آزمایش شده را نشان می‌دهد. تابع زمان سفر کمان‌ها در تمام شبکه‌های آزمایشی تابع BPR با ضریب ۰٫۱۵ و درجه‌ی ۴ است. به علاوه، در تمام اجراها  $\varepsilon$  برابر ۰٫۰۰۱ در نظر گرفته شده است. مقدار اولیه‌ی بردار  $\lambda^0$  برای محدودیت ظرفیت گره‌ها  $(\sum_{a:e(a)=i} s_a)$   $\lambda_i^0 = (0,1t^0)$  در نظر گرفته شده است که در آن  $t^0$  متوسط زمان سفر آزاد کمان‌های شبکه است.

روش DPF ابتدا برای در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت گره برای شبکه‌های ۹ گره‌ی، سایوکس فالز و آناهیم به کار برده شد. در این شبکه‌ها نرخ تردد اشباع کمان‌ها برای استفاده در محدودیت جانبی ظرفیت گره برابر ضریبی از ظرفیت کمان‌ها در نظر گرفته شد. برای امکان‌پذیر نگه داشتن مسائل و تعداد گره‌های اشباع بیشتر، مقدار

جدول ۱. مشخصات شبکه‌های آزمایش شده.

شبکه	تعداد گره	تعداد کمان	تعداد مبدا - مقصد
۹ گره‌ی	۹	۱۸	۴
سایوکس فالز	۲۴	۷۶	۵۲۸
آناهیم	۴۱۶	۹۱۴	۱۴۰۶
مشهد	۹۱۷	۲۵۲۶	۷۱۵۷

جدول ۲. خلاصه‌ی نتایج کاربرد روش DPF برای محدودیت ظرفیت گره.

شبکه	پارامتر $\rho$	تعداد تکرار	تابع هدف	بیشینه‌ی مقدار محدودیت ظرفیت گره (ثانیه)	زمان حل
۹ گره‌ی	۰٫۰۵	۱۷	۱۴۱۲٫۴۹	۰٫۹۹۹۶۰۲	-
	۰٫۰۱	۲۷	۱۴۱۰٫۹۵	۰٫۹۹۹۷۸۸	-
سایوکس فالز	۰٫۰۵	۱۳	۳۶٫۵۷	۰٫۹۹۹۴۳۸	۰٫۱۴
	۰٫۰۱	۳۵	۳۶٫۱۶	۰٫۹۹۹۳۶۹	۰٫۳۹
آناهیم	۰٫۰۵	۱۵	۱۲۰۳۴۷۹	۰٫۹۹۹۹۹۹۷	۴٫۲۳
	۰٫۰۱	۳۴	۱۲۰۳۲۲۶	۰٫۹۹۹۹۷۵	۸٫۸۸

۱٫۲٫۲٫۲ اگر شرط ۳۴ برای  $\alpha = \lambda^{n-1}$  برقرار نیست قرار دهید

$$f_{k_{r,s}} = 0 \text{ و } K_{r,s}^w = K_{r,s}^w \cup \{k_{r,s}\}$$

۲٫۲٫۲٫۲ قرار دهید  $\bar{f}_k = f_k$  برای  $k \in K_{r,s}^w$

۳٫۲٫۲٫۲ مسئله‌ی  $(NCP_{r,s}(\lambda^{n-1}))$  را در نقطه‌ی  $\bar{f}$  خطی‌سازی و  $(f^{r,s}, u_{r,s})$  را به دست آورید؛

۴٫۲٫۲٫۲ اگر شرط ۳۷ برای  $\alpha = \lambda^{n-1}$  برقرار نیست به گام ۲٫۲٫۲٫۲ بروید.

۵٫۲٫۲٫۲ مقدار  $\varepsilon^{r,s}$  را از رابطه‌ی ۳۹ برای  $\alpha = \lambda^{n-1}$  محاسبه کنید.

گام ۳ (بهنگام‌سازی)

۱٫۳ قرار دهید  $x^n = x(f)$  و  $\lambda^n = p(x^n, \lambda^{n-1})$ ؛

گام ۴ (آزمون هم‌گرایی)

۱٫۴ اگر شرط ۳۸ برقرار نیست به گام ۲ بروید.

۲٫۴ اگر شرایط ۲۳ و ۲۴ برای  $\alpha = \lambda^n$  و  $\alpha^0 = \lambda^0$  برقرار است توقف کنید، وگرنه به گام ۲ بروید. □

در کاربرد روش پیشنهادی می‌توان از مکانیزم‌هایی برای افزایش کارایی آن استفاده کرد. از آن جمله، می‌توان مقادیر پارامترهای مربوط به دقت جواب یعنی  $\varepsilon$  و  $\rho$  را در تکرارهای اولیه مقادیر بزرگ‌تری در نظر گرفت و به تدریج آن‌ها را کاهش داد. هر چند در این نوشتار اثباتی برای هم‌گرایی روش DPF ارائه نمی‌شود، ولی نتایج کاربرد آن برای شبکه‌هایی با ابعاد مختلف و برای دو نوع محدودیت جانبی نشان از هم‌گرایی خوب آن دارند.

### محدودیت ظرفیت گره

عملکرد چراغ‌های راهنمایی هوشمند در هر تقاطع (گره)  $i$ ، با این فرض که زمان سبز هر فاز تابعی از کل جریان ورودی به تقاطع است، با محدودیت زیر مدل شده است: [۱۲]

$$\sum_{a:e(a)=i} \frac{x_a}{s_a} \leq 1 - \frac{w}{c} \quad (40)$$

در رابطه‌ی ۴۰،  $e(a)$  گره‌ی انتهایی کمان  $a$ ،  $s_a$  جریان اشباع کمان  $a$  و  $\frac{w}{c}$  نسبت زمان تلف شده به طول سیکل چراغ است. فرض کنید  $\bar{I} \subseteq I$  مجموعه‌ی گره‌های با ظرفیت محدود برای جریان‌های ورودی است. با تعریف  $\bar{I} := J$ ، و استفاده از رابطه‌ی ۴۰ برای  $w = 0$ ، محدودیت جانبی (۱۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$g_i(x) = \sum_{a:e(a)=i} \frac{x_a}{s_a} \leq 1 \quad i \in \bar{I} \quad (41)$$

در این صورت زمان سفر تعمیم‌یافته‌ی هر مسیر  $k$  برای استفاده در مسئله‌ی  $(NCP(\alpha))$  به صورت رابطه‌ی ۴۲ است:

$$c_k^{r,s}(f, \alpha) := \sum_{a \in A} (t_a(x_a(f)) \delta_{ak}^{r,s} + \sum_{a:e(a) \in \bar{I}} (p_{\varepsilon(a)}(x(f), \alpha_{\varepsilon(a)}) / s_a) \delta_{ak}^{r,s}) \quad (42)$$

در رابطه‌ی ۴۲:

$$p_i(x, \alpha_i) = \alpha_i \psi \left( \sum_{a:e(a)=i} \frac{x_a}{s_a} \right) \quad (43)$$

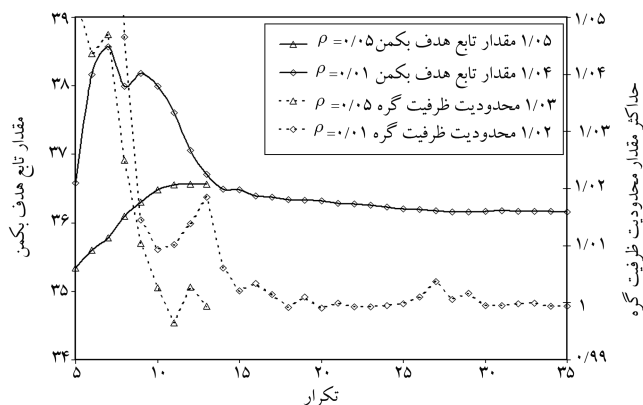
گره  $i \in \bar{I}$  را در اجرای روش DPF برای شبکه‌ی سایوکس فالز و مقادیر مختلف پارامتر  $\rho$  نشان می‌دهد.

در آزمایشی دیگر، روش پیشنهادی برای حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک شهر مشهد با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت برای گره‌های این شبکه به‌کار برده شد. در این شبکه نیز نرخ تردد اشباع کمان‌ها برای استفاده در محدودیت جانبی ظرفیت گره برابر ضریبی از ظرفیت کمان‌ها در نظر گرفته شد. برای امکان پذیر نگه داشتن مسئله و تعداد گره‌های اشباع بیشتر، از ضریب  $1/40$  برای این منظور استفاده شد.

خلاصه‌ی نتایج کاربرد روش DPF برای مقادیر مختلف پارامتر  $\rho$  در این شبکه در جدول ۳ آمده است. اگرچه در جواب تعادلی مسئله تخصیص ترافیک برای شبکه‌ی شهر مشهد بدون در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت گره مقدار رابطه‌ی ۴۱ برای ۲۶ گره بالاتر از ۱ و مقدار بیشینه‌ی آن برابر  $2/24$  است، ولی با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت گره و استفاده از روش DPF برای مقادیر مختلف پارامتر  $\rho$  مسئله در جوابی امکان پذیر هم‌گرا می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با کاهش پارامتر  $\rho$ ، روش حل مقدار بیشتری از ظرفیت گره‌های شبکه را استفاده کرده و در نتیجه مقدار تابع هدف بهبود یافته است. البته در مقابل بهبود  $0/06$  درصدی تابع هدف، زمان حل مسئله  $2/7$  برابر شده است. این مشاهده در مورد شبکه‌ی آنها هم وجود دارد. از این رو پیشنهاد می‌شود تا برای شبکه‌های با ابعاد بزرگ از مقادیر بزرگ‌تری برای پارامتر  $\rho$  استفاده شود.

### نتیجه‌گیری

در این نوشتار، یک روش تکراری مبتنی بر تابع جریمه‌ی پویا به نام DPF برای حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت گره ارائه شد. در هر تکرار این روش، مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت جانبی به یک مسئله‌ی تکمیلی غیرخطی بدون محدودیت‌های جانبی با توابع زمان سفر عمومی تبدیل و با استفاده از روش خطی‌سازی آستینانی حل می‌شود. روش DPF برای شبکه‌های ۹ گره‌ی، سایوکس فالز، آنها هم و شبکه‌ی واقعی شهر مشهد آزمایش شد که نتایج آنها نشان از خصوصیات هم‌گرایی خوب این روش داشت. با استفاده از روش ارائه شده در این نوشتار می‌توان با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت گره دقت حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک را افزایش داد.



شکل ۱. تغییرات تابع هدف و بیشینه‌ی مقدار تابع محدودیت ظرفیت گره برای شبکه‌ی سایوکس فالز.

جدول ۳. خلاصه‌ی نتایج کاربرد روش DPF برای در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت گره در شهر مشهد.

شبکه	پارامتر $\rho$	تعداد تکرار	تابع هدف	بیشینه‌ی مقدار محدودیت ظرفیت گره	زمان حل (ثانیه)
مشهد	0/05	15	1260345	0/996628	9/12
	0/01	51	1259639	0/999921	24/47

این ضریب برای شبکه‌های ۹ گره‌ی، سایوکس فالز و آنها هم به ترتیب برابر ۲، ۲/۸ و  $1/75$  در نظر گرفته شد. خلاصه‌ی نتایج کاربرد روش DPF برای مقادیر مختلف پارامتر  $\rho$  در این شبکه‌ها در جدول ۲ آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در تمام شبکه‌ها با کاهش پارامتر  $\rho$  مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد. مثلاً برای شبکه ۹ گره‌ی که تابع هدف بهینه‌ی آن با استفاده از نرم افزار GAMS برابر  $1410/30$  است، با کاهش پارامتر  $\rho$  از درصد خطای جواب نسبت به تابع هدف بهینه کاسته می‌شود. در مقابل تعداد تکرارها و زمان حل افزایش یافته است. همچنین روش DPF برای تمام شبکه‌ها به جوابی امکان پذیر هم‌گرا شده است که در این جواب برای شبکه‌های ۹ گره‌ی، سایوکس فالز و آنها هم به ترتیب ۴، ۱۳ و ۸ گره‌ی اشباع وجود دارد. شکل ۱ تغییرات تابع هدف و بیشینه‌ی مقدار تابع محدودیت ظرفیت

### پانویس

1. inner penalty function (IPF)
2. augmented lagrangian multiplier (ALM)
3. dynamic penalty function (DPF)
4. side constraints traffic assignment problem (SCTAP)
5. generalized travel time function
6. symmetric
7. asymmetric

### منابع

1. Leblanc, L.J.; Morlok, E.K. and Pierskalla, W.P. "An efficient approach to solving the road network equilibrium

traffic assignment problem", *Transportation Research*, **9**, pp. 309-318 (1975).

2. Daganzo, C.F. "On the traffic assignment problem with flow dependent costs-I", *Transportation Research*, **11**, pp. 433-437 (1977a,b).
3. Boyce, D.; Janson, B.N. and Eash, R.W. "The effect on equilibrium trip assignment of different link congestion functions", *Transportation Research*, **15A**, pp. 223-232 (1981).
4. Inouye, H. "Traffic equilibria and its solution in congested road networks", In: Genser, R. (Ed.), *Proceedings of IFAC Conference on Control in Transportation Systems*, pp. 267-272 (1987).
5. Hearn, D.W. and Ribera, J. "Bounded flow equilibrium problems by penalty methods", In: *Proceedings of IEEE*

*International Conference on Circuits and Computers*, pp. 162-166 (1980).

6. Nie, Y.; Zhang, H.M. and Lee, D.H. "Models and algorithms for the traffic assignment problem with link capacity constraints", *Transportation Research*, **38B**, pp. 285-312 (2004).
7. Aashtiani, H.Z.; Shahpar, A.H. and Babazadeh, A. "Solving traffic assignment problem with link capacity constraints using penalty function", *Sharif Journal of Science and Technology*, 46.1, pp.53-58 (2009).
8. Beckmann, M.; McGuire, C.B. and Winsten, C.B. "Studies in the economics of transportation", *Yale University Press*, New Haven, Connecticut (1956).
9. Wardrop, J.G. "Some theoretical aspects of road traffic research", In: *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, Part II, **1**, pp. 325-378 (1952).
10. Aashtiani, H.Z. "The Multi-Modal Traffic Assignment Problem", *Ph.D. Dissertation*, MIT (1979).
11. Babazadeh, A. and Aashtiani, H.Z. "Algorithm for equilibrium transit assignment problem", *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, (1923), pp. 227-235 (2005).
12. Bell, M.G.H. "Stochastic user equilibrium assignment in networks with queues", *Transportation Research: Part B*, **29**, pp. 125-137 (1995).

