

تحلیل اجزاء محدود مسایل ویسکوکشسان خطی با استفاده از توابع شکل پیشنهادی گاوسین - فوریه

وحیدرضا کلات جاری (دانشیار)

سید علی قاضی میرسعید* (دکتری)

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

مهندسی عمران شریف، تابستان (۱۳۹۹)
دوره ۲، شماره ۱/۲، ص. ۱۰۳-۱۱۷

در نوشتار حاضر، به منظور تحلیل اجزاء محدود مسایل ویسکوکشسان خطی دو بُعدی المان‌های چهاروجهی جدیدی تحت عنوان المان‌های گاوسین - فوریه پیشنهاد شده است. توابع شکل در المان‌های گاوسین - فوریه از طریق غنی‌سازی توابع پایه‌ی شعاعی پیشنهادی گاوسین - فوریه با میدان توابع چندجمله‌یی به دست می‌آیند. توابع شکل گاوسین - فوریه، پارامترهای مجهول ثابتی هستند که به منظور افزایش دقت تقریب انتخاب و پارامتر شکل نامیده می‌شوند. بر اساس تجربه‌ی نویسندگان مطالعه‌ی حاضر، به منظور تخمین پارامتر شکل، یک مسئله‌ی بهینه‌سازی تعریف شده است، که هندسه‌ی مسئله، تابع هدف آن است. به منظور صحت‌سنجی روش پیشنهادی و نشان دادن توانایی بالای المان‌های پیشنهادی در حل مسایل ویسکوکشسان، دو مثال که پاسخ تحلیلی آنها نیز موجود است، بررسی شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که با استفاده از المان‌های گاوسین - فوریه می‌توان با تعداد المان‌های بسیار کمتر نسبت به المان‌های کلاسیک به دقت مطلوب رسید.

واژگان کلیدی: روش اجزاء محدود، ویسکوکشسانی، توابع پایه‌ی شعاعی گاوسین - فوریه، توابع شکل گاوسین - فوریه، پارامتر شکل.

۱. مقدمه

در طراحی مهندسی، دهه‌هاست که به تحلیل ویسکوکشسان سازه‌ها توجه شده است. از برجسته‌ترین کاربری‌های آن می‌توان به طراحی تیغه‌ی توربین، تحلیل تنش پیش‌ران‌های جامد در طراحی موشک، تحلیل خزش در ساختمان‌های بتنی و تحلیل ارتعاش در هواپیما و هلیکوپتر اشاره کرد، چرا که از میرایی موجود در مواد ویسکوکشسان می‌توان در کاهش ارتعاش سازه‌ها استفاده کرد.^[۱] مثال‌های ذکر شده مواردی هستند که در آنها به طور سنتی از تحلیل ویسکوکشسان استفاده می‌شود، در حالی که در بیشتر مسایل به کارگیری تئوری کشسانی به منظور ساده‌سازی تحلیل مرسوم است. حال آن‌که ثابت شده است استفاده از تئوری کشسانی برای تحلیل و به منظور ساده‌سازی با واقعیت سازگاری ندارد، چون بیشتر مواد مهندسی به دلیل اصطکاک داخلی، از خود رفتار وابسته به زمان قابل توجهی نشان می‌دهند. در نتیجه با در نظر گرفتن رفتار مواد باید به جای معادلات متشکله‌ی کشسان از معادلات متشکله‌ی ویسکوکشسان استفاده شود. در بررسی منابع علمی، مطالعات بسیاری در زمینه‌ی تئوری ویسکوکشسانی انجام شده است.^[۲-۶] در تحلیل سازه‌های ساخته شده از مواد با رفتار وابسته به زمان، ویسکوکشسانی خطی به مدت طولانی است که استفاده می‌شود.^[۷] به طور کلی سه روش در تحلیل ویسکوکشسان خطی استفاده می‌شود: تبدیل لاپلاس، تبدیل

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۷/۶/۱۲، اصلاحیه ۱۳۹۷/۱۰/۱۱، پذیرش ۱۳۹۷/۱۰/۲۲

DOI:10.24200/J30.2019.51137.2384

v_kalatjari@shahroodut.ac.ir
alighazi@alum.sharif.edu

فوریه و روش انتگرال‌گیری زمانی مستقیم.^[۸] استفاده از تبدیل لاپلاس در حل تحلیلی معادلات ویسکوکشسانی به اصل تطابق معروف است. طبق اصل تطابق، معادلات ویسکوکشسانی با استفاده از تبدیل لاپلاس می‌توانند به معادلات کشسانی تبدیل شوند. بنابراین اگر پاسخ صریح به معادلات کشسانی متناظر قابل دست‌یابی باشد، با کمک معکوس تبدیل لاپلاس می‌توان پاسخ معادلات ویسکوکشسانی مورد نظر را به صورت تحلیلی به دست آورد. فلاگ^[۹] (۱۹۷۵)،^[۱۰] از تبدیل لاپلاس برای تحلیل تیرهای ویسکوکشسان بهره برد. کریستنسن^[۱۱] (۱۹۸۲)،^[۱۲] تبدیل فوریه را بر معادلات تیرهای ویسکوکشسان اعمال کرد. سروری و هم‌اکنون^[۱۳] (۲۰۱۰)،^[۱۴] از روش انتگرال‌گیری زمانی برای حل تحلیلی مسایل ویسکوکشسانی خطی استفاده و روش اخیر را با روش‌های متداول دیگر مقایسه کردند. حل تحلیلی، فقط برای مسائل با هندسه و بارگذاری ساده در دسترس است و برای مسایل حقیقی مهندسی، که معمولاً هندسه و بارگذاری پیچیده‌ی دارند، ممکن نیست. بنابراین به منظور به دست آوردن پاسخ مسایل پیچیده‌تر باید بر روش‌های عددی به جای روش‌های تحلیلی تکیه کرد. از میان روش‌های عددی، روش المان محدود و روش المان مرزی در حل مسایل ویسکوکشسانی متداول‌تر هستند. امروزه استفاده از روش المان محدود در حل مسایل ویسکوکشسان پیشرفت قابل توجهی کرده است. اولین کد المان محدود ویسکوکشسان توسط کینگ (۱۹۶۵)،^[۱۵] نوشته شده است. برنامه‌ی مذکور فقط قابل استفاده در مسایل تنش صفحه‌یی و کرنش صفحه‌یی بوده و در آن از بیان

که فقط از توابع پایه‌ی چندجمله‌ی^{۲۲} در تخمین میدان جابه‌جایی استفاده می‌شود، معرفی شد. در روش مذکور، برای تخمین میدان جابه‌جایی در هر دامنه‌ی تأثیر^{۲۳} از ترکیبی از توابع پایه‌ی چندجمله‌ی و شعاعی استفاده می‌شود. در نوشتار حاضر، به منظور حل مسایل ویسکوکشسانی با استفاده از روش اجزاء محدود، توابع شکل جدیدی ارائه شده است، که با الگوبرداری از روش RPIM^[۱۸] با غنی‌سازی توابع پایه‌ی شعاعی پیشنهادی گاوسین - فوریه با میدان توابع چندجمله‌ی به دست می‌آیند. از توابع شکل جدید ذکر شده، که توابع شکل گاوسین - فوریه نام‌گذاری می‌شوند، برای به دست آوردن المان دو بُعدی چهاروجهی^۸ و ۹ گره‌ی استفاده شده است. نشان داده شده است که المان مذکور، آزمون وصله را ارضا می‌کند. در نوشتار حاضر، از الگوریتم پیشنهادی زوکر^[۱۹] (۱۹۹۷)، در حل اجزاء محدود مسایل ویسکوکشسان استفاده شده است. به منظور ارزیابی صحت و دقت المان گاوسین - فوریه پیشنهادی، ۲ مثال عددی که پاسخ تحلیلی آنها نیز در دسترس است، بررسی و نتایج آن با نتایج حاصل از المان‌های کلاسیک لاگرانژی^{۲۴} و حل تحلیلی مقایسه شده است.

۲. فرمولاسیون اجزاء محدود برای مسایل ویسکوکشسان

در نوشتار حاضر، از فرمولاسیون پیشنهادی زوکر و همکاران^[۱۹] (۱۹۹۷) استفاده شده است، که در بخش حاضر به صورت اجمالی توضیح داده شده است. معادلات حاکم بر مسئله عبارت‌اند از:

معادلات تعادل:

$$\sigma_{ji,j} + \rho f_i = 0 \quad (1)$$

رابطه‌ی کرنش - جابه‌جایی:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\nu} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

و معادلات متشکله، که رابطه‌ی تنش - کرنش را در مواد ویسکوکشسان نمایش می‌دهد:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_0^\xi C_{ijkl}(\xi - \xi') \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' \quad (3)$$

که در آنها، ε_{kl} تانسور تنش و کرنش در لحظه‌ی ξ هستند، ρ جرم واحد حجم، f_i بردار نیروی حجمی، u_i بردار جابه‌جایی، C_{ijkl} تانسور مرتبه‌ی چهار مدول استراحت است، که تنش را به کرنش مرتبط می‌سازد. معادلات متشکله‌ی انتگرالی رابطه‌ی ۳ را می‌توان به فرم نموی رابطه‌ی ۴ تبدیل کرد:

$$\Delta \sigma_{ij} = C'_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} + \Delta \sigma_{ij}^R \quad (4)$$

که در آن پارامترهای C'_{ijkl} و $\Delta \varepsilon_{kl}$ به صورت روابط ۵ الی ۷ تعریف می‌شوند:

$$C'_{ijkl} = C_{ijkl\infty} + \frac{1}{\Delta \xi} \sum_{m=1}^M \eta_{ijklm} (1 - e^{-\frac{\Delta \xi}{\rho_{ijklm}}}) \quad (5)$$

$$\Delta \varepsilon_{kl} = R_\varepsilon \Delta \xi \quad (6)$$

$$\rho_{ijklm} = \frac{\eta_{ijklm}}{C_{ijklm}} \quad (7)$$

انتگرالی معادلات متشکله بر مبنای مدول خزش^۴ برای تعریف رابطه‌ی تنش و کرنش استفاده شده است. دو فرض اساسی در روش پیشنهادی کینگ وجود داشت: اول این‌که مدول خزش می‌تواند به دو بخش مجزا شامل بخش کشسان و بخش خزش تقسیم شود. دوم این‌که کرنش را می‌توان در طول هر گام زمانی ثابت فرض کرد. قزلان و همکاران^[۱۹] (۱۹۹۵)، به منظور تحلیل تنش و جابه‌جایی شبه استاتیکی سازه‌های ویسکوکشسان خطی تحت جابه‌جایی مکانیکی، در دامنه‌ی زمانی یک فرمولاسیون نموی ایجاد کردند. در روش پیشنهادی ایشان، رفتار ویسکوکشسان ماده توسط یک طیف خزش گسسته و معادلات متشکله‌ی نموی تعریف می‌شود؛ پس نیازی به نگهداری تاریخچه‌ی تنش نبود. زوکر و همکاران^[۱۹] (۱۹۹۷)، یک الگوریتم عددی به منظور حل مسایل ویسکوکشسان خطی اورتوتروپیک^۵ تحت جابه‌جایی مکانیکی و گرمایی پیشنهاد کردند. در الگوریتم پیشنهادی ایشان، بیان انتگرالی معادله‌ی متشکله بر مبنای مدول استراحت^۶، به فرم یک رابطه‌ی جبری نموی تبدیل و از آن در ایجاد فرمولاسیون اجزاء محدود استفاده شده است. در روش مذکور برای بیان مدول استراحت از سری پورنی^۷ استفاده شده است، که سبب می‌شود در نهایت یک فرمولاسیون بازگشتی حاصل شود.

با بررسی تاریخچه‌ی توابع پایه‌ی شعاعی (RBFs)^۸ مشاهده می‌شود که از توابع مذکور ابتدا در روش‌های تقریبی برازش منحنی^۹ استفاده شده است. توابع پایه‌ی شعاعی، توابع چندمتغیره را به توابع اسکالر کاهش می‌دهند، به بیان دیگر فضای چندبُعدی را به یک بُعدی می‌نگارند. توابع پایه‌ی شعاعی، نخستین بار در سال ۱۹۷۱ معرفی شدند.^[۱۲] فرانک^[۱۳] (۱۹۸۲)، در نوشتار خود موجب شد که یک درک ریاضی از توابع پایه‌ی شعاعی شکل بگیرد و روش‌های درون‌یابی و تقریب را با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی ارزیابی کرد. اگر چه توابع پایه‌ی شعاعی حدود نیم قرن تاریخچه دارند، اما تاریخچه‌ی استفاده از آنها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بسیار کمتر است.^[۱۶] برای نخستین بار کانسو^[۱۷] (۱۹۹۰)، از توابع پایه‌ی شعاعی برای حل معادلات ناویه - استوکس^{۱۰} برای جریان سیال استفاده کرد و معادله‌ی دیفرانسیل را با مشتقات جزئی ناویه - استوکس با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی چندبُعدی^{۱۱}، به طور مستقیم بر روی گره‌های بدون ساختار گسسته‌سازی کرد. روش پیشنهادی اخیر بسیار شبیه به روش تفاضلات محدود بود، با این تفاوت که برای هر توزیع پراکندگی دلخواه از گره‌ها مناسب بود. وانگ و لیو^[۱۸] (۲۰۰۲)، در نوشتاری به منظور حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یک روش بدون المان درون‌یابی نقطه‌یابی با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی پیشنهاد دادند، که در آن به طور مشخص از توابع پایه‌ی شعاعی چندبُعدی و گاوسین^{۱۲} استفاده شده بود. معمولاً توابع پایه‌ی شعاعی به دو دسته‌ی کلی و محلی تقسیم می‌شوند. از جمله توابع پایه‌ی شعاعی کلی می‌توان به توابع مخروطی، گاوسین، چندبُعدی، اسپالین صفحه‌ی نازک^{۱۳}، چندبُعدی معکوس^{۱۴}، سینوسی، بسل نوع اول^{۱۵}، حقیقی فوریه^{۱۶}، مختلط فوریه^{۱۷} و از دسته توابع پایه‌ی شعاعی محلی می‌توان به توابع تکیه‌گاه فشرده^{۱۸} اشاره کرد.

از توابع شکل مختلط فوریه برای اولین بار در تحلیل المان مرزی مسایل پتانسیل دو بُعدی توسط حاجی و همکاران^[۲۰] (۲۰۱۳) استفاده شد.^[۱۹] سپس جواران،^[۲۱] از توابع شکل مختلط فوریه در تحلیل اجزاء محدود مسایل الاستودینامیک دو بُعدی بهره برد.

روش‌های عددی در تحلیل سازه‌ها را می‌توان به دو دسته‌ی روش‌های بدون شبکه^{۱۹} و روش‌های بر پایه‌ی المان^{۲۰} تقسیم‌بندی کرد. همان طور که پیشتر اشاره شد، روش درون‌یابی نقطه‌یابی شعاعی RPIM، یک روش بدون شبکه است که نخستین بار توسط وانگ و لیو به منظور رفع مشکل تکینگی^{۲۱} احتمالی، هنگامی

از رابطه‌ی ۵ در نوشتار حاضر، اندیس‌های i, j, k, l از قرارداد جمع‌اندیسی اینشتین پیروی نمی‌کنند. در معادلات ۵ الی ۷، C_{ijklm} ثابت فنر، η_{ijklm} ضریب میرایی و ρ_{ijklm} زمان استراحت، همگی در المان m ماکسول^{۲۵} و $C_{ijkl\infty}$ ثابت فنر مجزا در مدل ویچرت^{۲۶} هستند، که در شکل ۱ مشاهده می‌شوند. M تعداد المان‌های ماکسول در مدل ویچرت است.

فرض می‌شود که خط زمانی به بازه‌های گسسته تقسیم شده است، به طوری که مقدار تنش در ابتدای بازه (در لحظه‌ی ξ_n) مشخص است. پارامتر R_ε در معادله‌ی ۶، نرخ تغییرات کرنش در بازه‌ی زمانی $\Delta\xi = \xi_{n+1} - \xi_n$ است، که ثابت فرض می‌شود و در شکل ۲ مشاهده می‌شود.

که در آن، $\Delta\sigma_{ij}^R$ به صورت رابطه‌ی ۸ تعریف می‌شود:

$$\Delta\sigma_{ij}^R = - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r Q_{ijkl} \quad (8)$$

که در آن Q_{ijkl} از رابطه‌ی ۹ به دست می‌آید:

$$Q_{ijkl} = \sum_{m=1}^M (1 - e^{-\Delta\xi/\rho_{ijklm}}) P_{ijklm}(\xi_n) \quad (9)$$

که در آن $P_{ijklm}(\xi_n)$ از رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$P_{ijklm}(\xi_n) = \frac{e^{-\Delta\xi/\rho_{ijklm}} P_{ijklm}(\xi_n - \Delta\xi) + \eta_{ijklm} R_\varepsilon (1 - e^{-\Delta\xi/\rho_{ijklm}})}{e^{-\Delta\xi/\rho_{ijklm}} P_{ijklm}(\xi_n - \Delta\xi) + \eta_{ijklm} R_\varepsilon (1 - e^{-\Delta\xi/\rho_{ijklm}})} \quad (10)$$

$$[K^e] [\Delta u^e] = [f_v^e] + [f_t^e] + [f_c^e] + [f_s^e] \quad (11)$$

که در آن، $[K^e]$ ، $[f_v^e]$ ، $[f_t^e]$ ، $[f_c^e]$ و $[f_s^e]$ مطابق روابط ۱۲ محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T [C'^e] [B^e] d\Omega \\ [f_v^e] &= \int_{\Omega_e} [\Phi^e]^T \rho [f^{n+1}] d\Omega \\ [f_t^e] &= \int_{\Gamma_f^e} [\Phi_s^e]^T [T^{n+1}] d\Gamma \\ [f_c^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T [\sigma^n] d\Omega \\ [f_s^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T [\Delta\sigma^R] d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن، $[B^e]$ از رابطه‌ی ۱۳ به دست می‌آید:

$$[B^e] = [\partial] [\Phi^e] \quad (13)$$

در انتگرال‌های معادلات ۱۲ و Ω_e و Γ^e بیان‌گر دامنه و مرز المان e هستند. در معادله‌های ۱۱ و ۱۲، $[K^e]$ ماتریس سختی المان، $[\Delta u^e]$ بردار تغییرات جابه‌جایی گره‌یی در طول زمان $\Delta\xi$ (بازه‌ی زمانی)، $[f_v^e]$ ، $[f_t^e]$ ، $[f_c^e]$ و $[f_s^e]$ بردارهای نیروی المان e ناشی از به ترتیب: نیروی حجمی، نیروی سطحی، تنش در ابتدای بازه‌ی زمانی، تغییرات تنش در طول بازه‌ی زمانی است. در معادله‌ی ۱۳، $[B^e]$ ماتریس کرنش - جابه‌جایی است. $[\partial]$ ماتریس اپراتور مشتق و $[\Phi^e]$ ماتریس توابع شکل المان هستند. $[f^{n+1}]$ بردار نیروی حجمی المان و $[T^{n+1}]$ بردار نیروی سطحی المان، هر دو در لحظه‌ی ξ_{n+1} هستند. سرانجام $[\sigma^n]$ و $[\Delta\sigma^R]$ به ترتیب: بردار تنش در ابتدای گام زمانی و بردار تغییرات تنش در طول گام زمانی هستند.

با در نظر گرفتن مشارکت کلیه‌ی المان‌ها پس از اسمبل کردن^{۲۷} معادلات، معادله‌ی ماتریسی کلی به صورت رابطه‌ی ۱۴ به دست می‌آید:

$$\{F\} = [K] \{\Delta u\} \quad (14)$$

در معادله‌ی ۱۴، $[K]$ ماتریس سختی کلی، $\{F\}$ بردار نیروی کلی و $\{\Delta u\}$ بردار تغییرات جابه‌جایی در طول گام زمانی $\Delta\xi$ هستند.

۳. درون‌یابی نقطه‌یی بر اساس توابع پایه‌ی شعاعی

تابع تقریب $u(x)$ در یک دامنه‌ی تأثیر با تعدادی گره، که توزیع دلخواه دارند، $P_i(x_i)$ ، $(i = 1, 2, \dots, n)$ ، در نظر گرفته می‌شود. n تعداد گره‌ها در دامنه‌ی x است.^[۱۸] مقدار گره‌یی تابع $u(x)$ در گره x_i برابر u_i فرض می‌شود. روش بدون المان درون‌یابی نقطه‌یی شعاعی (RPIM)^{۲۸}، تابع تقریب $u(x)$ را به گونه‌یی

از رابطه‌ی ۵ در نوشتار حاضر، اندیس‌های i, j, k, l از قرارداد جمع‌اندیسی اینشتین پیروی نمی‌کنند. در معادلات ۵ الی ۷، C_{ijklm} ثابت فنر، η_{ijklm} ضریب میرایی و ρ_{ijklm} زمان استراحت، همگی در المان m ماکسول^{۲۵} و $C_{ijkl\infty}$ ثابت فنر مجزا در مدل ویچرت^{۲۶} هستند، که در شکل ۱ مشاهده می‌شوند. M تعداد المان‌های ماکسول در مدل ویچرت است.

فرض می‌شود که خط زمانی به بازه‌های گسسته تقسیم شده است، به طوری که مقدار تنش در ابتدای بازه (در لحظه‌ی ξ_n) مشخص است. پارامتر R_ε در معادله‌ی ۶، نرخ تغییرات کرنش در بازه‌ی زمانی $\Delta\xi = \xi_{n+1} - \xi_n$ است، که ثابت فرض می‌شود و در شکل ۲ مشاهده می‌شود.

که در آن، $\Delta\sigma_{ij}^R$ به صورت رابطه‌ی ۸ تعریف می‌شود:

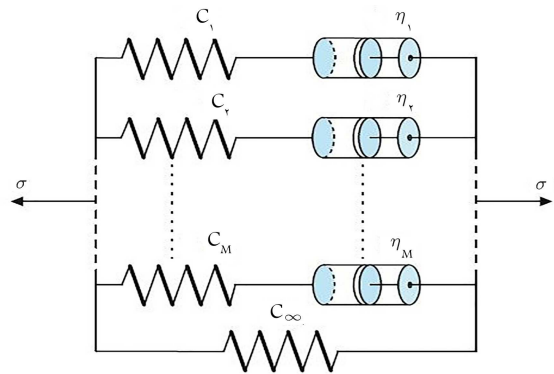
$$\Delta\sigma_{ij}^R = - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r Q_{ijkl} \quad (8)$$

که در آن Q_{ijkl} از رابطه‌ی ۹ به دست می‌آید:

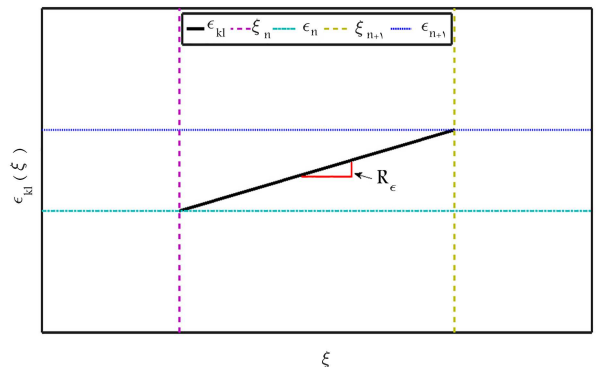
$$Q_{ijkl} = \sum_{m=1}^M (1 - e^{-\Delta\xi/\rho_{ijklm}}) P_{ijklm}(\xi_n) \quad (9)$$

که در آن $P_{ijklm}(\xi_n)$ از رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$P_{ijklm}(\xi_n) = \frac{e^{-\Delta\xi/\rho_{ijklm}} P_{ijklm}(\xi_n - \Delta\xi) + \eta_{ijklm} R_\varepsilon (1 - e^{-\Delta\xi/\rho_{ijklm}})}{e^{-\Delta\xi/\rho_{ijklm}} P_{ijklm}(\xi_n - \Delta\xi) + \eta_{ijklm} R_\varepsilon (1 - e^{-\Delta\xi/\rho_{ijklm}})} \quad (10)$$



شکل ۱. مدل ویچرت.^[۲]



شکل ۲. نرخ تغییرات کرنش در بازه‌ی زمانی $\Delta\xi$.

می سازد که تمام نقاط گره‌ی موجود در دامنه‌ی تأثیر با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی $B_i(x)$ و توابع پایه‌ی چندجمله‌ی $P_j(x)$ عبور کند.^[۲۳]

$$u(x) = \sum_{i=1}^n B_i(x)a_i + \sum_{j=1}^m P_j(x)b_j = \mathbf{B}^T(x)\mathbf{a} + \mathbf{P}^T(x)\mathbf{b} \quad (۱۵)$$

که در آن، a_i ضریب $B_i(x)$ و b_j ضریب $P_j(x)$ است. این تذکر لازم است که در رابطه‌ی ۱۵ به منظور تضمین همگرایی جواب، باید شرط $m < n$ برقرار باشد. بردارهای موجود در رابطه‌ی ۱۵ به صورت رابطه‌ی ۱۶ تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] \\ \mathbf{b}^T &= [b_1, b_2, b_3, \dots, b_m] \\ \mathbf{B}^T(x) &= [B_1(x), B_2(x), B_3(x), \dots, B_n(x)] \\ \mathbf{P}^T(x) &= [p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots, p_m(x)] \end{aligned} \quad (۱۶)$$

توابع پایه در مسایل دو بُعدی، معمولاً توابعی از مختصات $x^T = [x, y]$ هستند. یک تابع پایه‌ی شعاعی به صورت کلی رابطه‌ی ۱۷ است:

$$B_i(x) = B_i(r_i) = B_i(x, y) \quad (۱۷)$$

در آن، r_i فاصله‌ی بین نقطه‌ی درون‌یابی (x, y) و گره (x_i, y_i) است. این فاصله در فضای دو بُعدی اقلیدسی به صورت رابطه‌ی ۱۸ به دست می‌آید:

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (۱۸)$$

توابع پایه‌ی چندجمله‌ی از ترکیب خطی تک‌جمله‌هایی با ترتیب رابطه‌ی ۱۹ ساخته می‌شوند:

$$\mathbf{P}^T(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots] \quad (۱۹)$$

ضرایب a_i و b_j در معادله‌ی ۱۵ با اجبار عبور تابع درون‌یابی از کلیه‌ی n نقطه‌ی گره‌ی موجود در دامنه‌ی تأثیر به دست می‌آیند. بنابراین مقدار تابع درون‌یابی در نقطه‌ی k ام به صورت رابطه‌ی ۲۰ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u_k &= u(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^n a_i B_i(x_k, y_k) + \sum_{j=1}^m b_j P_j(x_k, y_k) \\ k &= 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (۲۰)$$

از آنجا که در معادله‌ی ۱۵، تعداد مجهولات از معادلات بیشتر است، به منظور این که یکتایی جواب تضمین شود، معمولاً قید رابطه‌ی ۲۱ اعمال می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n P_j(x_i, y_i) a_i = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \quad (۲۱)$$

معادله‌های ۲۰ و ۲۱ را می‌توان به صورت یک سیستم معادلات با استفاده از رابطه‌ی ۲۲ نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_0^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (۲۲)$$

که در آن، بردار مقادیر گره‌ی تابع، به صورت رابطه‌ی ۲۳ تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u}^e = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_n]^T \quad (۲۳)$$

به علاوه ماتریس‌های B_0 و P_0 نیز به صورت روابط ۲۴ و ۲۵ تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} B_1(x_1, y_1) & B_2(x_1, y_1) & \dots & B_n(x_1, y_1) \\ B_1(x_2, y_2) & B_2(x_2, y_2) & \dots & B_n(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(x_n, y_n) & B_2(x_n, y_n) & \dots & B_n(x_n, y_n) \end{bmatrix} \quad (۲۴)$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} P_1(x_1, y_1) & P_2(x_1, y_1) & \dots & P_m(x_1, y_1) \\ P_1(x_2, y_2) & P_2(x_2, y_2) & \dots & P_m(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n, y_n) & P_2(x_n, y_n) & \dots & P_m(x_n, y_n) \end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

چون فاصله بدون بُعد است، بنابراین $B_k(x_i, y_i) = B_i(x_k, y_k)$ است. بدین مفهوم که ماتریس B_0 متقارن است. چون یکتا فقط زمانی به دست می‌آید که معکوس ماتریس B_0 وجود داشته باشد. بنابراین، ضرایب مجهول به صورت رابطه‌ی ۲۶ به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

در نهایت تابع درون‌یابی به صورت رابطه‌ی ۲۷ بیان می‌شود:

$$u(x) = [\mathbf{B}^T(x) \quad \mathbf{P}^T(x)] \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \Phi(x) \mathbf{u}^e \quad (۲۷)$$

از آنجا که در رابطه‌ی ۲۷، عبارت $[\mathbf{B}^T(x) \quad \mathbf{P}^T(x)] \mathbf{G}^{-1}$ ، جابه‌جایی را به بردار جابه‌جایی گره‌ی مرتبط می‌سازد، طبق تعریف $\Phi(x)$ ماتریس توابع شکل است که به صورت رابطه‌ی ۲۸ بیان می‌شود:

$$\Phi(x) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_i(x), \dots, \varphi_n(x)] \quad (۲۸)$$

که در آن، تابع شکل متناظر با گره‌ی k ام به صورت رابطه‌ی ۲۹ تعریف می‌شود:

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^n B_i(x) \bar{G}_{i,k} + \sum_{j=1}^m P_j(x) \bar{G}_{n+j,k} \quad (۲۹)$$

که در آن، پارامتر $\bar{G}_{i,k}$ ، درایه‌ی (i, k) ماتریس G^{-1} است. بنابراین با انتخاب نوع تابع پایه‌ی شعاعی، تابع پایه‌ی چندجمله‌ی به آن افزوده می‌شود و تابع شکل در نهایت فقط به مختصات گره‌ها بستگی خواهد داشت.

۴. توابع شکل گاوسین - فوریه برای المان یک بُعدی سه گره‌ی

در نوشتار حاضر، توابع پایه‌ی شعاعی جدیدی با الهام گرفتن از توابع پایه‌ی شعاعی گاوسین و توابع پایه‌ی شعاعی مختلط فوریه،^[۲۰] پیشنهاد می‌شود که به صورت رابطه‌ی ۳۰ تعریف می‌شود:

$$B(r) = \alpha e^{-i\omega r^2} \quad (۳۰)$$

۵. خصوصیات توابع شکل گاوسین - فوریه

۱.۵. خاصیت دلتای کرونیگر^{۳۰}

خاصیت دلتای کرونیگر توابع شکل می‌تواند به صورت رابطه‌ی ۳۴ بیان شود:

$$\varphi_i(\xi_j) = \delta_{ij} \quad (34)$$

که بر طبق قرارداد، اپراتور دلتای کرونیگر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

در شکل‌های ۴ الی ۸، توابع شکل گاوسین - فوریه به ازاا مقادیر مختلف پارامتر شکل ω مشاهده می‌شود، که در آنها، قسمت حقیقی و قسمت موهومی توابع شکل به صورت مجزا نشان داده شده است. بر اساس شکل‌های مذکور کاملاً مشخص است که توابع شکل گاوسین - فوریه‌ی پیشنهادی، خاصیت دلتای کرونیگر را برآورده می‌کنند.

۲.۵. خاصیت افراز واحد^{۳۱}

به راحتی می‌توان نشان داد که هر المان یک‌بُعدی n گره‌ی گاوسین - فوریه در هر

در رابطه‌ی اخیر، که توابع پایه‌ی شعاعی گاوسین - فوریه نام‌گذاری می‌شود، r نرَم اقلیدسی^{۲۹} میان داده‌های نقطه‌ی را نمایش می‌دهد و ثابت α و ω ، پارامترهای شکل هستند، که به منظور افزایش دقت درون‌یابی انتخاب می‌شوند.

به منظور به دست آوردن توابع شکل گاوسین - فوریه، روند توضیح داده شده در بخش سوم نوشتار حاضر، بر توابع پایه‌ی شعاعی گاوسین - فوریه پیشنهادی اعمال می‌شود. بدین منظور همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، یک المان سه‌گره‌ی یک‌بُعدی در دستگاه مختصات طبیعی ξ در نظر گرفته می‌شود.

برای یک المان یک‌بُعدی سه‌گره‌ی، بردار $B(\xi)$ به صورت رابطه‌ی ۳۱ به دست می‌آید:

$$B(\xi) = \begin{Bmatrix} B_1(\xi) \\ B_2(\xi) \\ B_3(\xi) \end{Bmatrix} = \alpha \begin{Bmatrix} e^{-i\omega(1+\xi)^2} \\ e^{-i\omega(\xi)^2} \\ e^{-i\omega(1-\xi)^2} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

در المان مذکور به منظور غنی‌سازی توابع پایه‌ی شعاعی گاوسین - فوریه، از میدان توابع چندجمله‌ی خطی $P(\xi) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \xi \end{matrix} \right\}$ استفاده می‌شود. پس از به کارگیری

رویکرد RPIM که در بخش ۳ بیان شد،^[۱۸] توابع شکل گاوسین - فوریه برای یک المان یک‌بُعدی سه‌گره‌ی در مختصات طبیعی ξ به صورت رابطه‌ی ۳۲ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \frac{1}{3} (h(\xi) - \xi + d) \\ \varphi_2(\xi) &= -h(\xi) + (1 - d) \\ \varphi_3(\xi) &= \frac{1}{3} (h(\xi) + \xi + d) \end{aligned} \quad (32)$$

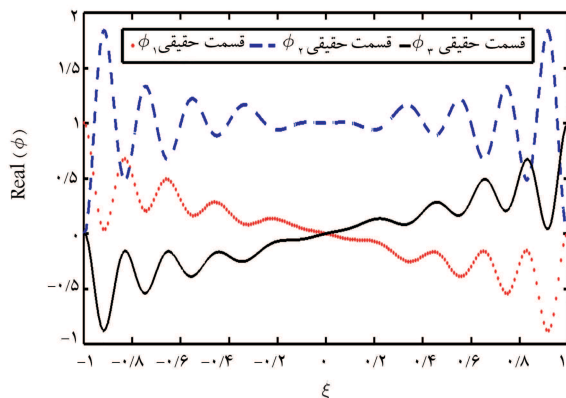
که در آن، d از رابطه‌ی ۳۳ - الف، $h(\xi)$ از رابطه‌ی ۳۳ - ب و c از رابطه‌ی ۳۳ - پ به دست می‌آیند:

$$h(\xi) = c \left[e^{-i\omega(1-\xi)^2} - 2e^{-i\omega(\xi)^2} + e^{-i\omega(1+\xi)^2} \right] \quad (\text{الف } 33)$$

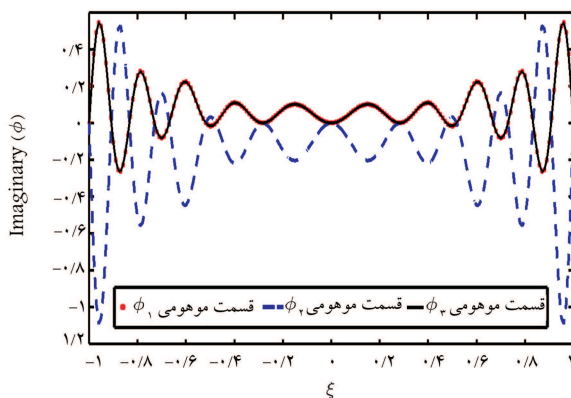
$$c = \frac{e^{2i\omega}}{1 - 4e^{2i\omega} + 3e^{4i\omega}} \quad (\text{ب } 33)$$

$$d = \frac{-2e^{2i\omega}}{-3e^{2i\omega} + e^{4i\omega} + e^{i\omega} + 1} \quad (\text{پ } 33) \quad (33)$$

لازم به ذکر است که پس از غنی‌سازی توابع پایه‌ی شعاعی گاوسین - فوریه با میدان توابع چندجمله‌ی خطی، پارامتر شکل α در توابع شکل گاوسین - فوریه پدیدار نشد و فقط پارامتر شکل ω در توابع شکل مذکور باقی ماند، که قادر است مقادیر مختلط را نیز به خود اختصاص دهد.

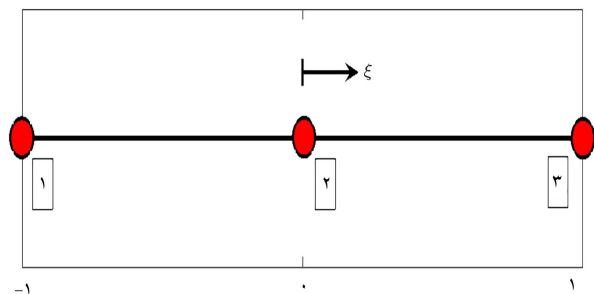


الف) قسمت حقیقی؛

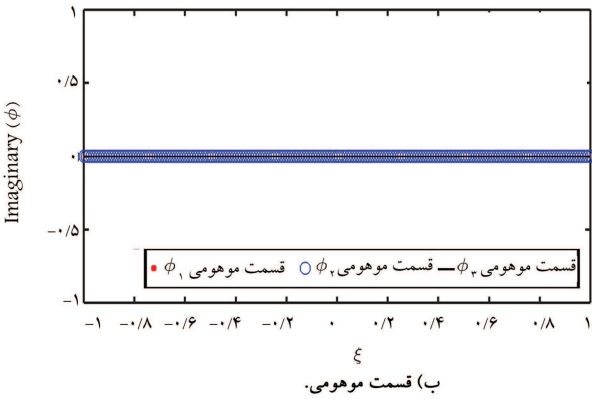
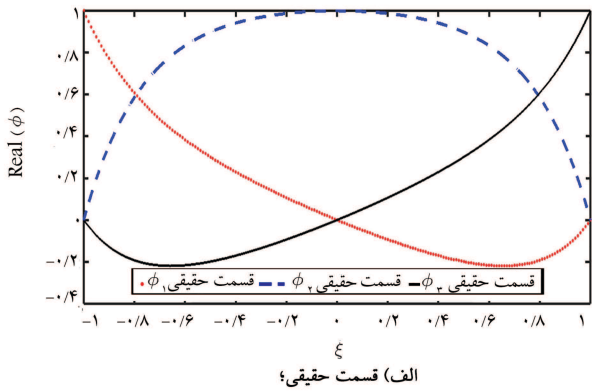


ب) قسمت موهومی.

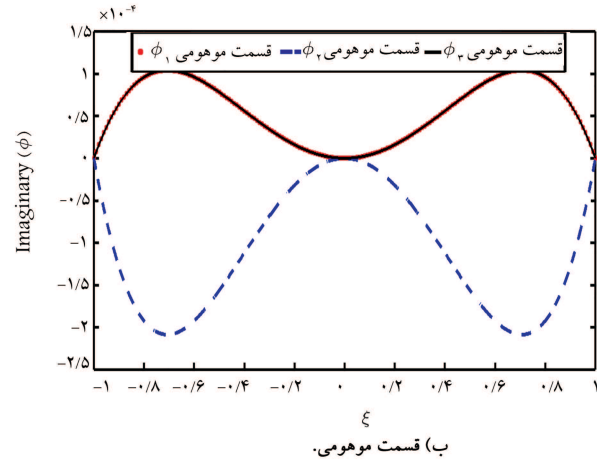
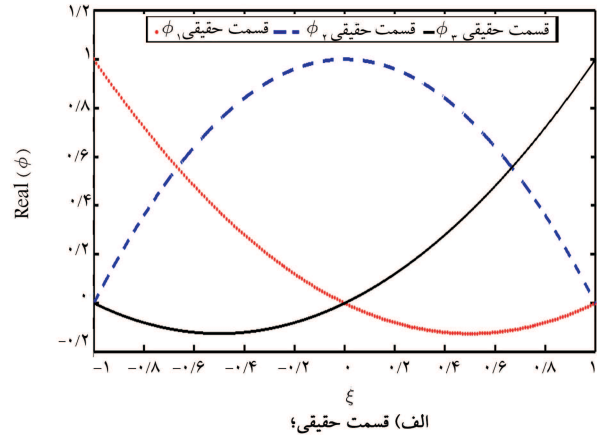
شکل ۴. توابع شکل گاوسین - فوریه‌ی پیشنهادی برای المان یک‌بُعدی سه‌گره‌ی با $\omega = 1 + i$.



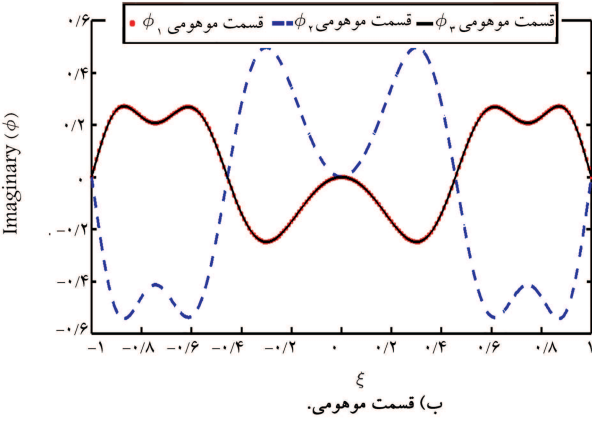
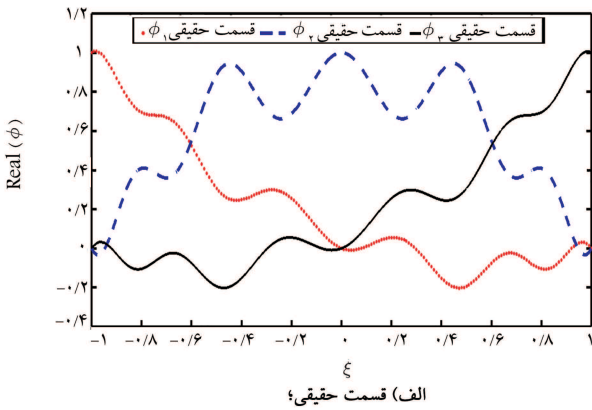
شکل ۳. المان سه‌گره‌ی یک‌بُعدی در دستگاه مختصات طبیعی ξ .^[۲۰]



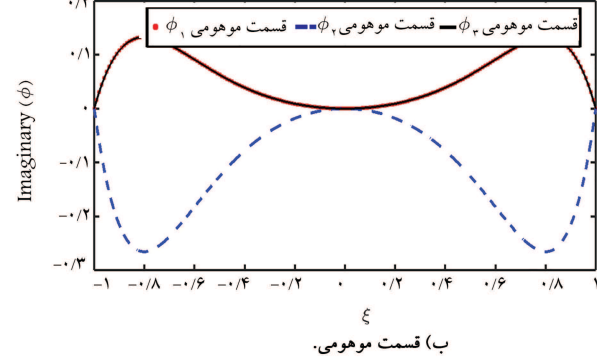
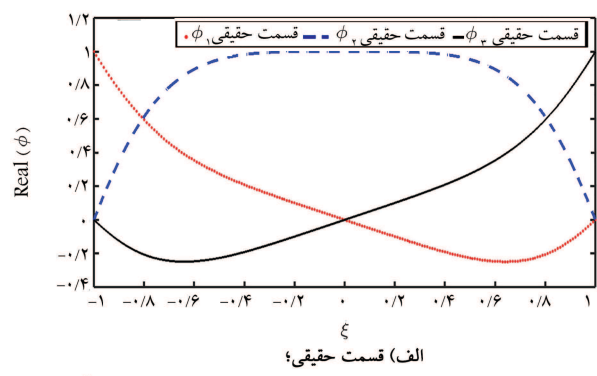
شکل ۷. توابع شکل گاوسین - فوریه پیشنهادی برای المان یک بُعدی سه گرهی با $\omega = i$.



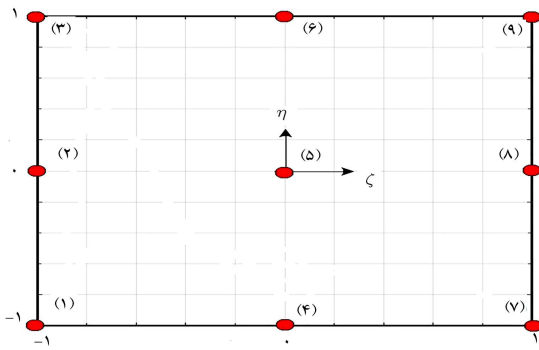
شکل ۵. توابع شکل گاوسین - فوریه پیشنهادی برای المان یک بُعدی سه گرهی با $\omega = 0.001 + 0.001i$.



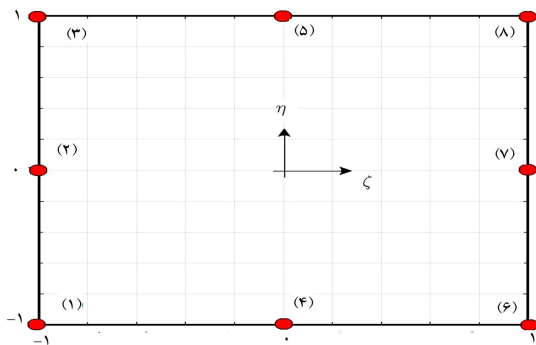
شکل ۸. توابع شکل گاوسین - فوریه پیشنهادی برای المان یک بُعدی سه گرهی با $\omega = 5$.



شکل ۶. توابع شکل گاوسین - فوریه پیشنهادی برای المان یک بُعدی سه گرهی با $\omega = 1 + i$.



شکل ۹. المان صفحه‌بندی لاگرانژی گاوسین - فوریه‌ی Q۹ در دستگاه مختصات طبیعی (ξ, η) .



شکل ۱۰. المان سرندیپیتی گاوسین - فوریه‌ی Q۸ در دستگاه مختصات طبیعی (ξ, η) .

هر گره در المان مورد نظر، می‌توان توابع شکل را در هر دو راستای دستگاه مختصات طبیعی یعنی ξ و η به دست آورد و سپس توابع شکل متناظر با هر گره را در دو راستای متعامد در هم ضرب کرد.

همان طور که برای المان یک‌بُعدی سه‌گره‌یی به دست آمد، توابع شکل در دو راستای ξ و η به صورت روابط ۳۷ حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \frac{1}{\gamma} (h(\xi) - \xi + d) \\ \varphi_1(\eta) &= \frac{1}{\gamma} (h(\eta) - \eta + d) \\ \varphi_2(\xi) &= -h(\xi) + (1 - d) \\ \varphi_2(\eta) &= -h(\eta) + (1 - d) \\ \varphi_3(\xi) &= \frac{1}{\gamma} (h(\xi) + \xi + d) \\ \varphi_3(\eta) &= \frac{1}{\gamma} (h(\eta) + \eta + d) \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن، $h(\xi)$ و $h(\eta)$ و d از روابط ۳۸ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} h(\xi) &= c \left\{ e^{-i\omega(1-\xi)^2} - 2e^{-i\omega(\xi)^2} + e^{-i\omega(1+\xi)^2} \right\} \\ h(\eta) &= c \left\{ e^{-i\omega(1-\eta)^2} - 2e^{-i\omega(\eta)^2} + e^{-i\omega(1+\eta)^2} \right\} \\ d &= \frac{-2e^{2i\omega}}{-2e^{2i\omega} + e^{i\omega} + e^{i\omega+1}} \end{aligned} \quad (38)$$

که در آن، پارامتر c از رابطه‌ی $c = \frac{e^{4i\omega}}{1 - 2e^{2i\omega} + e^{i\omega} + e^{i\omega+1}}$ به دست می‌آید. در نهایت، توابع شکل متناظر با هر گره در المان Q۹ به صورت روابط ۳۹

نقطه‌ی دلخواه ξ ، رابطه‌ی ۳۵ را برآورده می‌کند:

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k(\xi) = 1 \quad (35)$$

به عبارت دیگر، اگر مقادیر همه‌ی توابع شکل در یک نقطه‌ی دلخواه محاسبه و سپس با هم جمع شوند، جواب به دست آمده عددی مختلط می‌شود، که دارای قسمت حقیقی برابر ۱ و قسمت موهومی برابر صفر است، که از طریق شکل‌های ۴ الی ۸ نیز به راحتی قابل اثبات است.

۳.۵. پیوستگی تکه‌یی از مرتبه‌ی بی نهایت^{۲۲}

با مشتق‌گیری از توابع شکل گاوسین - فوریه در یک المان یک‌بُعدی سه‌گره‌یی روابط ۳۶ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \varphi'_1(\xi) &= \frac{1}{\gamma} (h'(\xi) - 1), \quad \varphi_1^{(n)}(\xi) = \frac{1}{\gamma} h^{(n)}(\xi), \quad n = 2, 3, \dots \\ \varphi_2^{(n)}(\xi) &= -h^{(n)}(\xi), \quad n = 1, 2, \dots \\ \varphi'_3(\xi) &= \frac{1}{\gamma} (h'(\xi) + 1), \quad \varphi_3^{(n)}(\xi) = \frac{1}{\gamma} h^{(n)}(\xi), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (36)$$

که در آن، $h'(\xi)$ و $h^{(n)}(\xi)$ به ترتیب مشتق مرتبه‌ی اول و مشتق مرتبه‌ی n م تابع $h(\xi)$ هستند. شایان ذکر است که تابع $h(\xi)$ از رابطه‌ی ۳۳ الف به دست می‌آید.

۶. المان‌های دو‌بُعدی چهاروجهی گاوسین - فوریه

در بخش حاضر، پیش از به دست آوردن توابع شکل گاوسین - فوریه در المان‌های دو‌بُعدی چهاروجهی، بیان یک نکته‌ی ضروری به نظر می‌رسد. هدف از پژوهش حاضر، مقایسه‌ی توانمندی توابع شکل پیشنهادی گاوسین - فوریه با توابع شکل کلاسیک یا متداول، که بر پایه‌ی میدان توابع چندجمله‌یی به دست می‌آیند، در تحلیل اجزاء محدود مسایل ویسکوکشسانی خطی دو‌بُعدی است. برای رسیدن به هدف مذکور می‌توان از المان‌های لاگرانژی دو‌بُعدی و یا المان‌های سرندیپیتی^{۲۳} دو‌بُعدی استفاده کرد. از آنجایی که المان لاگرانژی ۴ گره‌یی دو‌بُعدی Q۴ با استفاده از توابع شکل گاوسین - فوریه قابل ارائه نیست، در نوشتار حاضر، برای مقایسه‌ی توابع شکل کلاسیک و گاوسین - فوریه از المان لاگرانژی ۹ گره‌یی دو‌بُعدی Q۹، که کمترین تعداد گره‌ی ممکن را پس از Q۴ در بین المان‌های چهاروجهی دارد و المان سرندیپیتی با کمترین تعداد گره یعنی Q۸ استفاده شده است. المان لاگرانژی ۴ گره‌یی دو‌بُعدی Q۴ با استفاده از توابع شکل گاوسین - فوریه قابل دست‌یابی نیست، چرا که توابع شکل مذکور از طریق غنی‌سازی توابع پایه‌ی شعاعی با میدان توابع چندجمله‌یی با بیشینه‌ی دو درجه کمتر از تعداد گره‌های المان در هر راستای دستگاه مختصات طبیعی به دست می‌آیند ($m < n$). از آنجایی که تعداد گره‌ها در المان Q۴ در هر راستا، دو گره است یعنی $n = 2$ ، پس مقدار بیشینه‌ی $m = n - 2$ برابر صفر خواهد بود. $m = 0$ بیان‌گر اضافه کردن میدان توابع چندجمله‌یی درجه‌ی صفر یا به عبارت دیگر، یک عدد ثابت به توابع پایه‌ی شعاعی است.

به منظور به دست آوردن توابع شکل المان صفحه‌بندی چهاروجهی لاگرانژی گاوسین - فوریه‌ی Q۹، گره در دستگاه مختصات طبیعی صفحه‌بندی (ξ, η) در نظر گرفته شده است، به طوری که فاصله‌ی هر گره با گره‌های مجاورش در هر دو راستای ξ و η برابر واحد باشد (شکل ۹). برای به دست آوردن توابع شکل متناظر با

حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} h_{\lambda}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\alpha} (-B_{\lambda} + B_{\tau} + B_{\tau} - B_{\delta} - B_{\nu} + B_{\lambda}) \\ h_{\tau}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\alpha} (B_{\lambda} - 2B_{\tau} + B_{\tau} - B_{\delta} + 2B_{\nu} - B_{\lambda}) \\ h_{\tau}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\alpha} (B_{\tau} - B_{\tau} - B_{\tau} + B_{\delta} + B_{\delta} - B_{\nu}) \\ h_{\tau}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\alpha} (B_{\lambda} - B_{\tau} - 2B_{\tau} + 2B_{\delta} + B_{\delta} - B_{\lambda}) \quad (41) \end{aligned}$$

که در رابطه‌ی ۴۱ ب، B بردار توابع پایه‌ی شعاعی گاوسین - فوریه است، که به صورت رابطه‌ی ۴۲ تعریف می‌شود:

$$B(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} B_{\lambda} \\ B_{\tau} \\ B_{\tau} \\ B_{\tau} \\ B_{\delta} \\ B_{\delta} \\ B_{\nu} \\ B_{\nu} \\ B_{\lambda} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} e^{-i\omega[(\xi+1)^{\tau}+(\eta+1)^{\tau}]} \\ e^{-i\omega[(\xi+1)^{\tau}+(\eta)^{\tau}]} \\ e^{-i\omega[(\xi+1)^{\tau}+(\eta-1)^{\tau}]} \\ e^{-i\omega[(\xi)^{\tau}+(\eta+1)^{\tau}]} \\ e^{-i\omega[(\xi)^{\tau}+(\eta-1)^{\tau}]} \\ e^{-i\omega[(\xi-1)^{\tau}+(\eta+1)^{\tau}]} \\ e^{-i\omega[(\xi-1)^{\tau}+(\eta)^{\tau}]} \\ e^{-i\omega[(\xi-1)^{\tau}+(\eta-1)^{\tau}]} \end{bmatrix} \quad (41)$$

در روابط ۴۱ و ۴۲، α و ω پارامتر شکل هستند، که در نهایت پس از ساده‌سازی فقط پارامتر شکل ω باقی می‌ماند.

شایان ذکر است که کلیه‌ی خصوصیات توابع شکل المان یک‌بُعدی گاوسین - فوریه در المان دو‌بُعدی نیز برقرار است.

۷. آزمون وصله^{۲۴} در المان گاوسین - فوریه‌ی Q₉

۷.۱. آزمون وصله‌ی جابه‌جایی

به منظور تضمین هم‌گرایی پاسخ در تحلیل اجزاء محدود یک سازه لازم است که المان‌هایی که در مدل اجزاء محدود آن مسئله استفاده می‌شوند، بتوانند آزمون وصله را ارضاء کنند.^[۲۱] آزمون وصله براساس ملزومات یک المان در تحلیل اجزاء محدود یک سازه طراحی شده است. از آنجایی که در یک سازه، حرکت جسم صلب و حالت کرنش ثابت امکان وقوع دارد، با استفاده از آزمون وصله اطمینان حاصل می‌شود که المان به کار گرفته شده در تحلیل اجزاء محدود یک سازه قادر است هر دوی پدیده‌ی مذکور را در صورت وقوع شبیه‌سازی کند. بنابراین اگر یک المان آزمون وصله را ارضاء کند، هم‌گرایی جواب قطعی خواهد بود. به منظور کنترل آزمون وصله در المان صفحه‌یی لاگرانژی ۹ گره‌یی گاوسین - فوریه، یک کُد اجزاء محدود توسط نویسندگان نوشتار حاضر تهیه شده است. آزمون وصله با فرض یک مدل اجزاء محدود، متشکل از ۴ المان با اشکال نامنظم ساخته شده از مواد یکسان با دست‌کم یک گره درون وصله که گره‌های وصله^{۲۵} نامیده می‌شوند شکل ۱۱، انجام شده است. در مثال حاضر، همان طور که در شکل ۱۱ ملاحظه می‌شود، ۹ گره وصله وجود دارد.

حرکت جسم صلب به سه صورت ممکن است اتفاق بیفتد، که عبارت‌اند از: انتقال در راستای X، انتقال در راستای Y و انتقال قطری در جهت Y-X، که در هر سه مورد اخیر، نباید کرنشی در المان‌ها به وجود بیاید. به منظور بررسی حرکت جسم صلب به صورت انتقال در راستای X^{۲۶} در المان‌های گاوسین - فوریه‌ی پیشنهادی، جابه‌جایی گره‌یی در تمام گره‌های مرزی در راستای X برابر ۱ و در راستای Y صفر قرار داده شدند، به علاوه مقدار نیروهای گره‌یی در هر دو راستای X و Y در

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (h(\xi) - \xi + d)(h(\eta) - \eta + d) \\ \Phi_{\tau}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (h(\xi) - \xi + d)(-h(\eta) + \bar{d}) \\ \Phi_{\tau}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (h(\xi) - \xi + d)(h(\eta) + \eta + d) \\ \Phi_{\tau}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (-h(\xi) + \bar{d})(h(\eta) - \eta + d) \\ \Phi_{\delta}(\xi, \eta) &= (-h(\xi) + \bar{d})(-h(\eta) + \bar{d}) \\ \Phi_{\delta}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (-h(\xi) + \bar{d})(h(\eta) + \eta + d) \\ \Phi_{\nu}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (h(\xi) + \xi + d)(h(\eta) - \eta + d) \\ \Phi_{\lambda}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (h(\xi) + \xi + d)(-h(\eta) + \bar{d}) \\ \Phi_{\lambda}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (h(\xi) + \xi + d)(h(\eta) + \eta + d) \quad (39) \end{aligned}$$

که در آنها، $\bar{d} = 1 - d$ است.

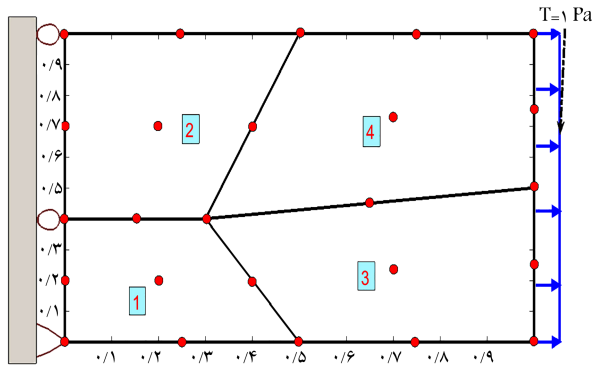
به منظور مقایسه‌ی توابع شکل گاوسین - فوریه‌ی پیشنهادی با توابع شکل متناظر کلاسیک‌شان در حل مسابیل ویسکوکشسان خطی می‌توان از المان سرندیپیتی با کمترین تعداد گره، یعنی Q₈ نیز استفاده کرد. توابع شکل گاوسین - فوریه در المان‌های سرندیپیتی دو‌بُعدی را نمی‌توان همانند المان‌های لاگرانژی دو‌بُعدی از حاصل ضرب توابع شکل متناظر با هر گره، در هر راستای دستگاه مختصات طبیعی یعنی ξ و η به دست آورد. در المان‌های سرندیپیتی گاوسین - فوریه، باید هر دو میدان توابع پایه‌ی شعاعی و چندجمله‌یی، از ابتدای فرایند غنی‌سازی در دستگاه مختصات طبیعی دو‌بُعدی در نظر گرفته شوند.

با اعمال روش RPIM بر المان سرندیپیتی Q₈ شکل ۱۰، توابع شکل گاوسین - فوریه‌ی متناظر با هر گره به صورت رابطه‌ی ۴۰ حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (\xi^{\tau} + \eta^{\tau} + \xi\eta - c_{\lambda}(\xi + \eta) + 2c_{\tau}h_{\lambda} - 1) \\ \Phi_{\tau}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (-2\eta^{\tau} - c_{\tau}\xi + 2c_{\tau}h_{\tau} + 2) \\ \Phi_{\tau}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (\xi^{\tau} + \eta^{\tau} - \xi\eta - c_{\lambda}(\xi - \eta) + 2c_{\tau}h_{\tau} - 1) \\ \Phi_{\tau}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (-2\xi^{\tau} - c_{\tau}\eta + 2c_{\tau}h_{\tau} + 2) \\ \Phi_{\delta}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (-2\xi^{\tau} + c_{\tau}\eta - 2c_{\tau}h_{\tau} + 2) \\ \Phi_{\delta}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (\xi^{\tau} + \eta^{\tau} - \xi\eta + c_{\lambda}(\xi - \eta) - 2c_{\tau}h_{\tau} - 1) \\ \Phi_{\nu}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (-2\eta^{\tau} + c_{\tau}\xi - 2c_{\tau}h_{\tau} + 2) \\ \Phi_{\lambda}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (\xi^{\tau} + \eta^{\tau} + \xi\eta + c_{\lambda}(\xi + \eta) - 2c_{\tau}h_{\lambda} - 1) \quad (40) \end{aligned}$$

که در آن، برخی ضرایب به کار رفته از روابط ۴۱ (الف و ب) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} c_{\lambda} &= 2c_{\tau}(-1 + e^{-i\omega} + e^{-2i\omega} - e^{-3i\omega}) \\ c_{\tau} &= 2c_{\tau}(-1 + 2e^{-i\omega} - 2e^{-2i\omega} + e^{-3i\omega}) \\ c_{\tau} &= \frac{e^{i\omega}}{1 - 4e^{2i\omega} + 2e^{4i\omega} + 4e^{6i\omega} - 3e^{8i\omega}} \quad (41) \text{ الف} \end{aligned}$$



شکل ۱۲. وصله‌ی متشکل از ۴ المان گاوسین - فوریه‌ی Q۹ استفاده شده برای آزمون وصله‌ی نیرو. [۲۱]

با توجه به آنچه گفته شد، به منظور بررسی شرط کرنش ثابت برای ϵ_x ، در کد تهیه شده مقادیر مؤلفه‌های جابه‌جایی در گره‌های مرزی در راستای X برابر مختصات گره‌های مذکور در راستای X و در راستای Y برابر صفر قرار داده شد. پس از حل، مقدار مؤلفه‌های جابه‌جایی گره‌ی در گره‌های داخلی در راستای X برابر مختصات گره‌های مذکور در راستای X و در راستای Y برابر صفر به دست آمد. پس می‌توان نتیجه گرفت که المان‌های گاوسین - فوریه‌ی پیشنهادی شرط کرنش ثابت را برای ϵ_x به خوبی نمایش می‌دهند. روند مشابهی به منظور بررسی شرط کرنش ثابت برای ϵ_y و γ_{xy} تکرار شد، که منجر به نتایج مطلوب در گره‌های داخلی وصله شد. بنابراین در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که المان‌های گاوسین - فوریه‌ی Q۹ پیشنهادی حالت کرنش ثابت را مدل می‌کنند.

۲.۷. آزمون وصله‌ی نیرو

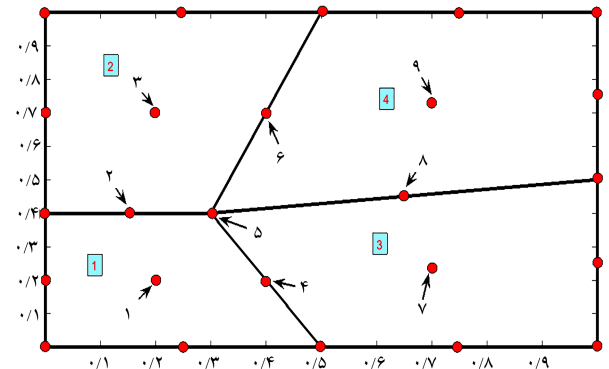
آزمون وصله‌ی نیرو تضمین می‌کند که خطاهای مرتبط با بارهای وارده در تحلیل اجزاء محدود با استفاده از المان‌های پیشنهادی اتفاق نمی‌افتد. [۲۱] کد اجزاء محدود نوشته شده توسط نویسندگان نوشتار حاضر می‌تواند علاوه بر آزمون وصله‌ی جابه‌جایی، آزمون وصله‌ی نیرو را نیز برای المان‌های گاوسین - فوریه‌ی Q۹ انجام دهد. به منظور انجام آزمون وصله‌ی نیرو، یک مسئله‌ی تنش صفحه‌ی ساخته شده از یک ماده‌ی ایزوتروپیک همگن کشسان خطی^{۲۹}، که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود، در نظر گرفته شد.

مطابق شکل ۱۲، فرض می‌شود که وجه سمت راست وصله، تحت تنش یکنواخت قرار دارد؛ در حالی که تکیه‌گاه کافی در وجه سمت چپ وصله پیش‌بینی شده است تا از حرکت جسم صلب جلوگیری شود. با حل معادلات اجزاء محدود با استفاده از روش سختی، جابه‌جایی‌های گره‌ی و سپس مؤلفه‌های تنش در هر المان به دست آمد. نتایج حاصل نشان داد که مقدار تنش در هر المان با تنش یکنواخت وارده بر وجه سمت راست وصله برابر است، در حالی که سایر مؤلفه‌های تنش در المان‌ها صفر است. شایان ذکر است که نتایج مذکور مستقل از پارامتر شکل است و برای هر مقدار دلخواه پارامتر شکل برقرار است.

در نتیجه المان گاوسین - فوریه‌ی Q۹ آزمون وصله را برآورده می‌کند، بنابراین المان پیشنهادی مذکور، این خصوصیات را دارد:

۱. المان گاوسین - فوریه‌ی پیشنهادی می‌تواند حرکت جسم صلب بدون کرنش را پیش‌بینی کند.

۲. المان مذکور قادر است حالت کرنش ثابت را در صورت وقوع پیش‌بینی کند.



شکل ۱۱. مثال وصله‌ی ساخته شده از ۴ المان چهاروجهی گاوسین - فوریه‌ی Q۹ مورد استفاده برای آزمون وصله‌ی جابه‌جایی. [۲۲]

تمامی گره‌ها برابر صفر قرار داده شد. سپس معادلات اجزاء محدود برای جابه‌جایی گره‌های درون وصله با استفاده از روش سختی حل شد. پس از حل، مقدار جابه‌جایی گره‌ی در گره‌های وصله در راستای X برابر ۱ و در راستای Y برابر صفر به دست آمد، که نشان‌دهنده المان‌های گاوسین - فوریه، انتقال در راستای X در حرکت جسم صلب را به خوبی مدل می‌کنند. به منظور بررسی حرکت جسم صلب به صورت انتقال در راستای Y^{۳۷} در المان‌های گاوسین - فوریه‌ی پیشنهادی روند پیشین تکرار شد، با این تفاوت که جابه‌جایی گره‌ی در تمام گره‌های مرزی در راستای X برابر صفر و در راستای Y برابر ۱ قرار داده شد. پس از حل معادلات اجزاء محدود، مقدار جابه‌جایی گره‌ی در گره‌های درون وصله در راستای X برابر صفر و در راستای Y برابر ۱ به دست آمد. بر اساس نتایج مذکور می‌توان نتیجه گرفت که المان‌های گاوسین - فوریه، توانایی نمایش انتقال در راستای Y در حرکت جسم صلب را نیز دارند. با قرار دادن مقدار واحد برای جابه‌جایی گره‌ی در تمام گره‌های مرزی در هر دو راستای X و Y و تکرار روند توضیح داده شده، جابه‌جایی گره‌ی در گره‌های وصله در هر دو راستای X و Y برابر ۱ به دست آمد، که مبین آن است که المان‌های گاوسین - فوریه‌ی پیشنهادی، حرکت جسم صلب به صورت قطری^{۳۸} را نیز به خوبی نمایش می‌دهند. به علاوه در هر سه مرحله، کرنش در هر ۴ المان محاسبه شد و تمامی مؤلفه‌های کرنش در تمام المان‌ها، صفر به دست آمد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که المان‌های گاوسین - فوریه قادرند حرکت جسم صلب را نمایش دهند. به منظور بررسی توانایی المان‌های گاوسین - فوریه‌ی Q۹ پیشنهادی در نمایش حالت کرنش ثابت به این صورت عمل شد:

بر اساس تعریف کرنش در تغییر مکان‌های کوچک، که همان مشتق جابه‌جایی است، شرایط کرنش ثابت زمانی حاصل می‌شود که تابع میدان جابه‌جایی به صورت چند جمله‌ی خطی باشد. بنابراین به منظور این که مؤلفه‌ی نرمال کرنش در راستای X مقداری ثابت، مثلاً واحد، باشد:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

میدان جابه‌جایی در راستای X و Y باید به صورت $u(x) = x$ ، $v(x) = 0$ تعریف می‌شود.

به طور مشابه، شرط مؤلفه‌ی نرمال کرنش در راستای Y مقداری ثابت مثلاً واحد، زمانی اتفاق می‌افتد که $u(y) = 0$ ، $v(y) = y$ ، به همین صورت شرط مؤلفه‌ی برشی کرنش ثابت منجر به میدان جابه‌جایی به صورت $u(y) = y$ ، $v(x) = x$ می‌شود.

۳. سازگاری بین المان‌های مجاور در حالت کرنش ثابت وجود دارد.

از آنجایی که الزامات ذکر شده توسط المان گاوسین - فوریه برآورده شد، می‌توان ضمانت کرد که هر مش متشکل از المان‌های گاوسین - فوریه Q9 با ریزشدهای متوالی حتماً به سمت پاسخ مسئله، هم‌گرا خواهد شد. بنابراین المان‌های پیشنهادی خصوصیات ضروری برای هم‌گرایی به پاسخ را دارند. شایان ذکر است که المان‌های سرندپیستی گاوسین - فوریه Q8 نیز آزمون وصله را ارضاء می‌کنند.

۸. پارامتر شکل

با نگاهی به منابع علمی می‌توان دریافت که توابع پایه‌ی شعاعی معمولاً تعدادی پارامتر شکل دارند، که برای توابع پایه‌ی شعاعی مختلف بین ۱ تا ۴ متغیر است.^[۲۰] به طور کلی در بحث بازتولید یک منحنی یا سطح از طریق نقاط محدود داده شده بر روی آن، با استفاده از یک تابع پایه‌ی شعاعی مشخص که تعدادی پارامتر شکل دارد، استفاده از پارامترهای شکل ذکر شده می‌تواند دقت نتایج تقریب را به طور قابل توجهی افزایش دهد. به طور مشابه، در تقریب پاسخ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، پارامتر شکل معمولاً اعداد ثابت نامشخصی را نمایندگی می‌کنند، که به منظور افزایش دقت توابع پایه‌ی شعاعی در یک مسئله‌ی مشخص به کار گرفته می‌شوند. به بیان دیگر، برای یک تابع پایه‌ی شعاعی مشخص، که در حل یک مسئله استفاده شده است، مناسب‌ترین مقدار پارامتر شکل بر اساس نوع تحلیل، بارهای وارده و غیره، تغییر خواهد کرد. این بدین معناست که کاربران توابع پایه‌ی شعاعی همواره به دنبال مقدار پارامتر شکل مشخصی هستند، که بهترین پاسخ را برای مسئله‌ی مورد نظرشان به ارمغان بیاورد. بنابراین پارامتر شکل مناسب برای یک مسئله‌ی مشخص معمولاً با روش آزمون و خطا انتخاب می‌شود. یک روش جایگزین برای پیدا کردن مقدار مناسب پارامتر شکل در توابع پایه‌ی شعاعی، تعریف یک مسئله‌ی بهینه‌سازی است، که پاسخ دقیق مسئله‌ی مورد نظر در صورت وجود به عنوان هدف مسئله‌ی بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که برای بسیاری مسایل کاربردی مهندسی، پاسخ دقیق مسئله موجود نیست، استفاده از روش مذکور برای یافتن پارامتر شکل مناسب به مسایل بسیار کمی محدود می‌شود.^[۲۰]

در نوشتار حاضر، به منظور استفاده از انتگرال‌گیری عددی گاوسی^{۴۰} از فرمولاسیون ایزوپارامتریک اجزاء محدود در کد ایجاد شده توسط نویسندگان نوشتار حاضر استفاده شده است. بر اساس تعریف، در فرمولاسیون ایزوپارامتریک^{۴۱} به منظور تعریف هندسه‌ی المان و همین‌طور تخمین جابه‌جایی درون المان از توابع شکل یکسان استفاده می‌شود.^[۲۱]

در نوشتار حاضر، به منظور تخمین مقدار مناسب پارامتر شکل موجود در توابع شکل گاوسین - فوریه پیشنهادی برای هر مسئله‌ی مشخص، بر اساس تجربه‌ی نویسندگان پیشنهاد می‌شود که یک مسئله‌ی بهینه‌سازی تعریف شود که هدف آن بهترین تخمین هندسه‌ی مسئله با کمک المان گاوسین - فوریه پیشنهادی است. برای این منظور، توسط نویسندگان نوشتار حاضر یک کد بهینه‌سازی با استفاده از روش PSO^{۴۲} نوشته شد، تا پارامترهای شکل مناسب را تعیین کند. به این ترتیب در روش پیشنهادی، پیش از حل اجزاء محدود مسئله، به منظور تخمین مقدار مناسب پارامتر شکل در توابع شکل پیشنهادی، باید یک مسئله‌ی بهینه‌سازی حل شود. فرایند بهینه‌سازی با تولید یک سری نقطه بر روی مرز هندسه‌ی مسئله انجام می‌شود. تابع هدف، خطای تخمین هندسه‌ی مسئله با

استفاده از یک المان گاوسین - فوریه دو بُعدی پیشنهادی است که به صورت $Error = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - \bar{x}_i)^2 + (y_i - \bar{y}_i)^2}$ تعریف می‌شود. در رابطه‌ی اخیر، n تعداد نقاط در نظر گرفته شده بر روی مرز هندسه‌ی مسئله است. (x_i, y_i) مختصات دقیق نقطه‌ی i ام روی مرز هندسه‌ی مسئله است، که با استفاده از معادله‌ی اضلاع هندسه‌ی مسئله به دست می‌آید. (\bar{x}_i, \bar{y}_i) مختصات نقطه‌ی i ام روی مرز هندسه‌ی مسئله است، که با استفاده از بازتولید هندسه‌ی مسئله با استفاده از یک المان گاوسین - فوریه دو بُعدی برای یک مقدار مشخص پارامتر شکل w به دست می‌آید. بر این اساس، پارامتر شکل w باید به نحوی تعیین شود که تابع هدف خطا (Error) کمینه شود.

در بخش بعد، به منظور نشان دادن کاربرد المان و توانمندی روش پیشنهادی در مسایل ویسکوکشسانی، دو مثال که پاسخ تحلیلی آنها موجود است، حل شده است. ملاحظه خواهد شد که هر دو مثال با تعداد المان کمتر نسبت به المان‌های کلاسیک همتای خود، با دقت مناسبی حل شده‌اند.

۹. مثال‌های عددی

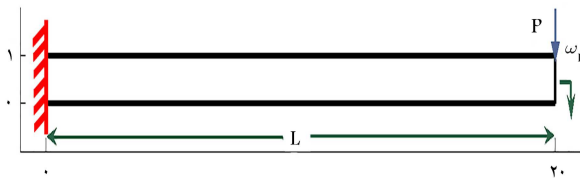
در بخش حاضر، دقت روش پیشنهادی و توانمندی المان پیشنهادی گاوسین - فوریه از طریق دو مثال عددی بررسی شده است. به منظور بررسی توانمندی المان گاوسین - فوریه پیشنهادی، کمینه‌ی تعداد المان‌های Q9 پیشنهادی با کمینه‌ی تعداد المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9، که به منظور هم‌گرایی پاسخ اجزاء محدود یک مثال مشخص به پاسخ تحلیلی آن مورد نیاز، مقایسه شده است. در هر دو مثال فرض شده است که سازه‌ها از سیستم ماده‌ی همگن ایزوتروپیک ویسکوکشسان خطی یکسانی ساخته شده‌اند. مدول الاستیسیته تک‌محوری سیستم ماده‌ی مورد استفاده از رابطه‌ی ۴۳ به دست می‌آید:^[۱۳]

$$E(t) = E_{\infty} + E_1 e^{-\frac{t}{\rho_1}} \quad (42)$$

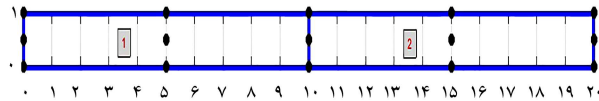
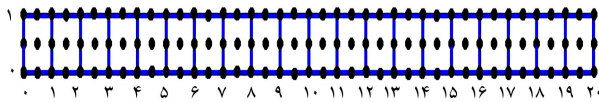
که در آن، $E(t)$ مدول الاستیسیته و $\rho_1 = \frac{E_1}{E_{\infty}}$ زمان الاستیسیته^{۴۳} المان اول ماکسول است، که برابر ۱ در نظر گرفته شده است. ثابت فنر E_1 و ضریب میرایی μ_1 در میراگر در المان اول ماکسول برابر ρ_1 و ثابت فقط فنر موازی E_{∞} برابر ρ_1 فرض شده است. شایان ذکر است که مدول الاستیسیته ماده‌ی مورد نظر به فرم جامد خطی استاندارد است، که همان مدل ویچرت است که از یک المان ماکسول و فقط یک المان فنر به طور موازی تشکیل شده است. نسبت پواسون^{۴۴} ماده‌ی مورد نظر ثابت و برابر ρ_1 فرض شده است. در جدول ۱، ثوابت ماتریس ویسکوکشسانی برای مدل ویچرت ماده‌ی مورد نظر ارائه شده است.

جدول ۱. ثوابت ویچرت برای مدل ماده‌ی فرض شده.^[۱۳]

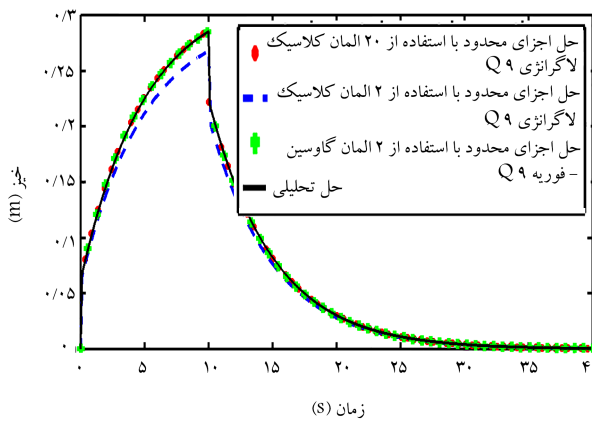
ثوابت ماده	i, j	k	C_{ij_k}	η_{ij_k}
	۳۳، ۲۲، ۱۱	∞	۱۳۴۶۱۵	---
	۱	۱	۵۳۸۴۶۲	۵۳۸۴۶۲
	۶۶، ۵۵، ۴۴	∞	۳۸۴۶۲	---
	۱	۱	۱۵۳۸۴۶	۱۵۳۸۴۶
	۲۳، ۱۳، ۱۲	∞	۵۷۶۹۲	---
	۱	۱	۲۳۰۷۶۹	۲۳۰۷۶۹



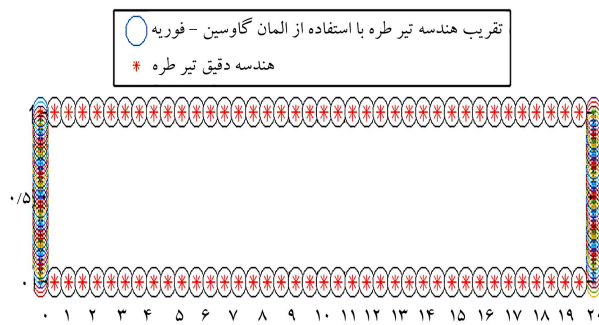
شکل ۱۳. هندسه‌ی تیر طره‌ی مثال اول. [۱۳]



شکل ۱۴. مش‌های اجزاء محدود Q9 استفاده شده در حل مثال اول.



شکل ۱۵. نتایج تحلیلی و نتایج اجزاء محدود با استفاده از المان‌های کلاسیک لاگرانژی و گاوسین - فوریه Q9 برای مثال اول (جاب‌جایی نوک تیر).



شکل ۱۶. هندسه‌ی دقیق و تقریب هندسه‌ی مثال اول با استفاده از المان لاگرانژی گاوسین - فوریه با پارامتر شکل $\omega = 1/8t$.

المان محدود در مثال ذکر شده، گام زمانی Δt برابر 0.1 ثانیه فرض شد. شایان ذکر است که نسبت زمان حل کد اجزاء محدود با به کارگیری یک رایانه‌ی شخصی واحد برای به دست آوردن جواب قابل قبول با استفاده از المان کلاسیک لاگرانژی به المان گاوسین - فوریه $0.406/5$ به دست آمد، که نشان‌دهنده‌ی آن است که استفاده از المان‌های گاوسین - فوریه نسبت به المان‌های کلاسیک لاگرانژی از نظر

۱.۹. مثال ۱. تیر طره تحت بار متمرکز در نوک آن

یک تیر طره با طول L برابر 20 متر و ارتفاع D برابر 1 متر به عنوان مثال اول در نظر گرفته شده است (شکل ۱۳). ضخامت تیر برابر واحد فرض شده است، بنابراین می‌توان مسئله‌ی مذکور را به صورت یک مسئله‌ی تنش صفحه‌ی 45° در نظر گرفت. تیر اشاره شده تحت یک بار متمرکز در نوک آن قرار دارد، که از طریق رابطه‌ی ۴۴ تعریف می‌شود:

$$P = P_0 [H(t) - H(t - t_1)]; \quad 0 \leq t \leq 40 \text{ s} \quad (43)$$

که در آن، $H(t)$ تابع هویساید 46° است. در رابطه‌ی اخیر، $P_0 = 1 \text{ N}$ و $t_1 = 10 \text{ s}$ است. هدف به دست آوردن جاب‌جایی w_L در نوک تیر است. شرایط بارگذاری مذکور مشابه آزمون خزش و ریکآوری 47° است، با این تفاوت که تنش و کرنش نسبت به مکان تغییر می‌کنند. با اعمال اصل تطابق 48° بر پاسخ کشسان، 49° برای خیز نوک تیر که به راحتی در مقاومت مصالح به دست آمده است، پاسخ تحلیلی برای مسئله‌ی کنونی به دست می‌آید. 50° با استفاده از اصل ذکر شده، رابطه‌ی 45 برای جاب‌جایی نوک تیر به دست آمده است:

$$w_L = \frac{P_0 L^2}{3I} [D(t) - D(t - t_1) H(t - t_1)] \quad (44)$$

که در آن، I ممان اینرسی مقطع تیر و $D(t)$ مدول خزش 49° است. مدول خزش را به راحتی می‌توان از بیان سری پرونای مدول استراحت به دست آورد رابطه‌ی 46 :

$$D(t) = D_0 + D_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_1}}\right) \quad (45)$$

که در آن، $D_0 = \frac{1}{E_\infty}$ و $\lambda_1 = \frac{E_0}{E_\infty - E_0}$ هستند. $E_0 = E_\infty + E_1$.

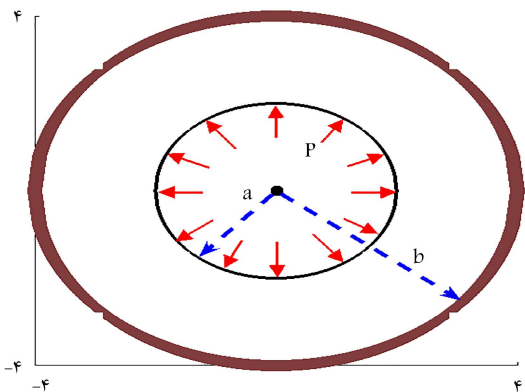
شایان ذکر است علی‌رغم این‌که پاسخ مقاومت مصالح استفاده شده برای حل کشسان مسئله دقیق نیست، اما می‌توان آن را برای یک تیر با نسبت ابعاد $1:20$ به عنوان یک تقریب بسیار خوب از پاسخ دقیق پذیرفت.

مش‌های متشکل از المان‌های Q9 استفاده شده در حل المان محدود مسئله‌ی حاضر در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود. در شکل ۱۵، نیز نتایج تحلیلی با نتایج اجزاء محدود مقایسه شده است. همین‌طور در شکل ۱۵، نتایج اجزاء محدود در صورت استفاده از ۲ المان گاوسین - فوریه Q9 و ۲۰ المان کلاسیک لاگرانژی Q9 نشان داده شده است. کمینه‌ی تعداد المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 مورد نیاز برای هم‌گرایی به جواب تحلیلی در مثال اول، ۲۰ المان است. با توجه به شکل ۱۵ کاملاً مشخص است که تعداد المان‌های مورد نیاز برای هم‌گرایی به جواب تحلیلی با استفاده از توابع شکل گاوسین - فوریه‌ی پیشنهادی، 0.1 توابع شکل کلاسیک لاگرانژی است. این مطلب را می‌توان به توانمندی توابع شکل گاوسین - فوریه نسبت داد. در جدول ۲، جاب‌جایی نوک تیر در لحظه‌ی $t = 10 \text{ s}$ با استفاده از دو مش مختلف متشکل از ۲ و ۲۰ المان کلاسیک لاگرانژی Q9 و مش متشکل از ۲ المان گاوسین - فوریه Q9 با مقدار جواب تحلیلی به صورت کمی مقایسه شده است.

همان‌طور که در جدول ۲ ملاحظه می‌شود، مقدار پاسخ اجزاء محدود حاصل از مش درشت متشکل از فقط ۲ المان گاوسین - فوریه، تطابق بسیار خوبی با مقدار پاسخ تحلیلی دارد. در مثال اول، مقدار پارامتر شکل برای المان لاگرانژی گاوسین - فوریه Q9 با استفاده از تقریب هندسه‌ی مسئله، همان‌طور که در بخش ۸ توضیح داده شده است، برابر $\omega = 1/8t$ به دست آمده است (شکل ۱۶). در محاسبات

جدول ۲. مقایسه‌ی جابه‌جایی عمودی نوک تیر در لحظه‌ی $t=10s$ استفاده شده در مثال اول.

حالت	تعداد گره	تعداد المان	نوع المان	خیز نوک تیر (خطی/٪)
۱	۱۵	۲	کلاسیک لاگرانژی	۲۶۷٫۸ (۶٫۱۵) میلی‌متر
۲	۱۲۳	۲۰	کلاسیک لاگرانژی	۲۸۵٫۹ (۰٫۱۹۳) میلی‌متر
۳	۱۵	۲	گاووسین - فوریه	۲۸۵٫۳ (۰٫۱۷) میلی‌متر
حل تحلیلی				۲۸۵٫۳۵ میلی‌متر



شکل ۱۹. هندسه و بارگذاری مخزن تحت فشار مثال دوم. [۱۳]

یک پوسته‌ی با سختی بی‌نهایت قرار گرفته است. شکل ۱۹، نمایش دهنده‌ی موتور پشرانه‌ی جامد یک موشک^{۵۱} است، که در آن سیلندر ویسکوکشسان نشان دهنده‌ی سوخت و پوسته‌ی سخت، نشان دهنده‌ی قاب موتور موشک^{۵۲} است. هندسه‌ی مسئله به گونه‌ی بی‌نهایتی است که می‌توان آن را یک مسئله‌ی کرنش صفحه‌ی فرض کرد. فشار داخلی P به مانند آزمون خزش با یک بار پله‌ی تعریف می‌شود که بیان ریاضی آن به صورت $0 \leq t \leq 40 \text{ s}$; $P = P_0 H(t)$ تعریف می‌شود. پاسخ تحلیلی مثال دوم، با کمک اصل تطابق ویسکوکشسان به دست آمده است. پاسخ تحلیلی برای جابه‌جایی شعاعی u_r با استفاده از اصل مذکور به صورت رابطه‌ی ۴۷ به دست می‌آید: [۴-۲]

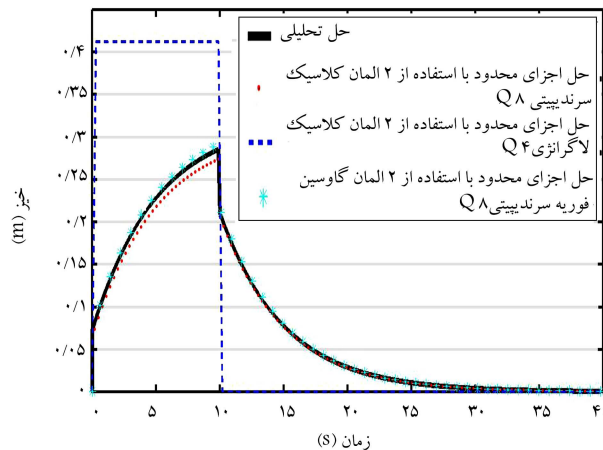
$$u_r(r, t) = \frac{P_0 a^2 b (1 + \nu) (1 - 2\nu)}{a^2 + (1 - 2\nu) b^2} \left(\frac{b}{r} - \frac{r}{b} \right) D(t) \quad (46)$$

برای مسئله‌ی مورد نظر مقادیر کمی مرتبط با هندسه و بارگذاری به این صورت فرض می‌شود:

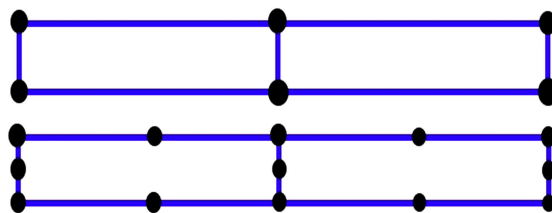
$$a = 2 \text{ m}, \quad b = 4 \text{ m}$$

$$P_0 = 10^6 \text{ Pa}$$

نتایج تحلیلی و اجزاء محدود برای جابه‌جایی شعاعی یک نقطه‌ی دلخواه بر روی ضخامت میانی سیلندر در شکل ۲۰ مشاهده می‌شود. همچنین در شکل مذکور نتایج اجزاء محدود با استفاده از دو نوع مش از المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q_8 با المان‌های گاووسین - فوریه Q_4 مقایسه شده است. مش‌های استفاده شده در مثال دوم، در شکل ۲۱ مشاهده می‌شود. با بهره‌گیری از تقارن مسئله، می‌توان فقط ربع مسئله را مدل کرد. تعداد کمی‌های المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q_8 مورد نیاز برای هم‌گرایی پاسخ اجزاء محدود به پاسخ تحلیلی Q_8 المان به دست آمده است، در حالی که با استفاده از فقط دو المان گاووسین - فوریه Q_4 ، پاسخ اجزاء محدود به پاسخ تحلیلی هم‌گرا شد. در آزمون خزش، بیشینه‌ی مقدار



شکل ۱۷. مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و نتایج اجزاء محدود با استفاده از شبکه‌ی شامل دو المان از نوع سرندیپیتی کلاسیک و سرندیپیتی گاووسین - فوریه Q_8 و المان لاگرانژی کلاسیک Q_4 برای مثال اول (جابه‌جایی نوک تیر).



شکل ۱۸. مش‌های متشکل از دو المان از نوع Q_8 و Q_4 که منجر به نتایج نشان داده شده در نمودارهای شکل ۱۷ شده است (برای مثال اول).

هزینه‌ی محاسباتی به طور قابل توجهی مقرون به صرفه است، حتی با وجود این‌که پیش از حل اجزاء محدود، باید پارامتر شکل مناسب تخمین زده شود.

به منظور مقایسه‌ی عملکرد المان‌های سرندیپیتی گاووسین - فوریه Q_8 با المان‌های سرندیپیتی کلاسیک یا متداول Q_8 ، تحلیل اجزاء محدود مثال اول با استفاده از المان‌های مذکور نیز صورت گرفته و نتایج عددی با حل تحلیلی در شکل ۱۷ مقایسه شده است.

در شکل ۱۸، شبکه‌هایی متشکل از دو المان از نوع Q_8 و Q_4 که نمودارهای شکل ۱۷ با استفاده از آنها حاصل شده‌اند، مشاهده می‌شود.

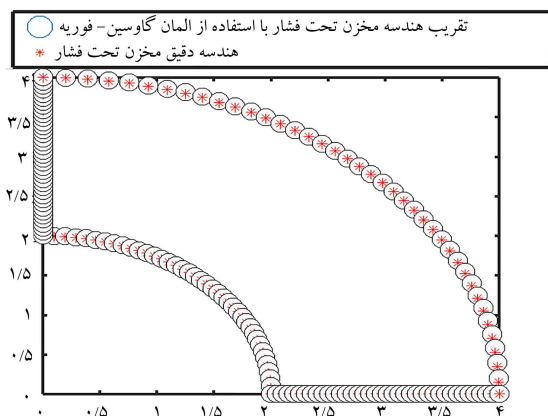
شایان ذکر است، مقدار پارامتر شکل در المان سرندیپیتی گاووسین - فوریه Q_8 با روش پیشنهادی در بخش ۸، در مثال اول برابر $\omega = 2/\sqrt{2} + 1/1$ به دست آمده است.

۲.۹. مثال ۲. مخزن تحت فشار محاط با یک قاب صلب^{۵۰}

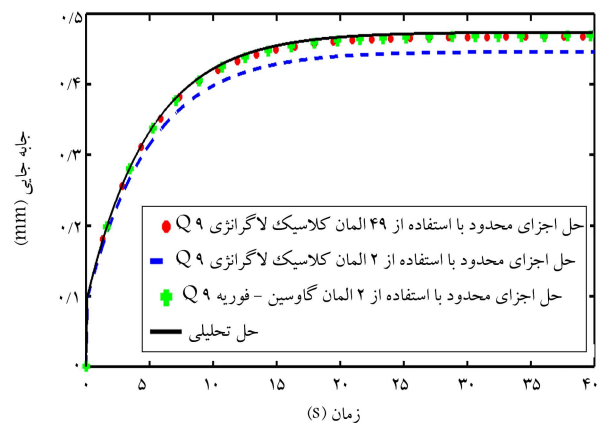
مثال دوم منتخب، که هندسه‌ی آن در شکل ۱۹ مشاهده می‌شود، عبارت از یک مخزن استوانه‌ی طولی ویسکوکشسان تحت فشار داخلی یکنواخت P است، که در

جدول ۳. مقایسه‌ی جابه‌جایی شعاعی هر نقطه‌ی دلخواه بر روی ضخامت میانی سیلندر در لحظه‌ی $t = 40s$.

حالت	تعداد گره	تعداد المان	نوع المان	جابه‌جایی شعاعی (خطا %)
۱	۱۵	۲	کلاسیک لاگرانژی	$u_r(@r=3)$ (۴,۳۳) / ۴۴۶۳ میلی‌متر
۲	۲۲۵	۴۹	کلاسیک لاگرانژی	(۰,۲۱) / ۴۶۷۵ میلی‌متر
۳	۱۵	۲	گوسین - فوزیه	(۰,۵۷۸) / ۴۶۹۲ میلی‌متر
حل تحلیلی				۴۶۶۵ / میلی‌متر

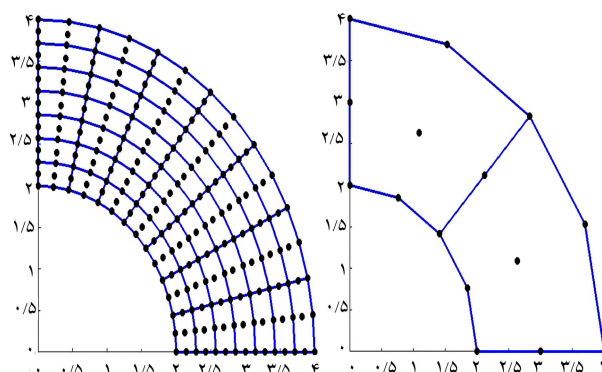


شکل ۲۲. هندسه‌ی دقیق و تقریب هندسه‌ی مثال دوم با استفاده از توابع شکل گوسین - فوزیه با پارامتر شکل $\omega = 0/1(1+i)$.



شکل ۲۰. مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و نتایج اجزاء محدود با استفاده از المان‌های کلاسیک لاگرانژی و گوسین - فوزیه برای مثال دوم (جابه‌جایی شعاعی یک نقطه‌ی دلخواه بر روی ضخامت میانی سیلندر).

نتایج اجزاء محدود حاصل از المان‌های گوسین - فوزیه‌ی پیشنهادی تطابق بسیار خوبی با پاسخ تحلیلی دارد، با وجود آنکه در تحلیل انجام شده از مش درشتی متشکل از ۲ المان استفاده شده است. از آنجایی که با به کارگیری المان گوسین - فوزیه در تحلیل اجزاء محدود برای رسیدن به پاسخ قابل قبول به تعداد المان‌های به مراتب کمتری نسبت به المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q۹ نیاز است، بدیهی است که زمان اجرای برنامه نیز بسیار کمتر خواهد بود و به طور قابل توجهی در هزینه‌ی محاسباتی صرفه‌جویی می‌شود. برای رسیدن به پاسخ قابل قبول مسئله، نسبت زمان اجرای کد اجزاء محدود تهیه شده در یک رایانه‌ی شخصی واحد برای المان کلاسیک لاگرانژی Q۹ به المان گوسین - فوزیه‌ی متناظر پیشنهادی Q۹ به دست آمد.



شکل ۲۱. مش‌های اجزاء محدود Q۹ استفاده شده در حل مثال دوم.

۱۰. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، با الهام از توابع پایه‌ی شعاعی گوسین و مختلط فوزیه، توابع پایه‌ی شعاعی جدیدی با فرم $ae^{-i\omega r^2}$ با عنوان گوسین - فوزیه پیشنهاد شده است. با غنی‌سازی توابع ذکر شده‌ی پایه‌ی شعاعی با میدان توابع چندجمله‌یی، توابع شکل جدیدی با همین عنوان به دست آمده است. به منظور استفاده از توابع مذکور شکل جدید در تحلیل اجزاء محدود مسایل ویسکوکشسان دو بُعدی، المان‌های صفحه‌یی چهاروجهی گوسین - فوزیه‌ی ۸ و ۹ گره‌یی پیشنهاد شده است. به منظور نشان دادن دقت و توانمندی المان‌های پیشنهادی در تحلیل اجزاء محدود مسایل ویسکوکشسانی خطی، دو مثال عددی با بهره‌گیری از

جابه‌جایی در انتهای زمان بارگذاری اتفاق می‌افتد. در جدول ۳، بیشینه‌ی مقدار جابه‌جایی شعاعی یک نقطه‌ی دلخواه بر روی ضخامت میانی سیلندر در لحظه‌ی $t = 40s$ حاصل از تحلیل اجزاء محدود با استفاده از ۴۹ المان کلاسیک لاگرانژی با نتایج حاصل از ۲ المان گوسین - فوزیه و کلاسیک لاگرانژی مقایسه شده است. در محاسبات اجزاء محدود، گام زمانی Δt مانند مثال قبل برابر ۰/۱ ثانیه در نظر گرفته شده است. پارامتر شکل در مثال دوم با استفاده از تخمین هندسه‌ی مسئله با المان گوسین - فوزیه برابر $\omega = 0/1(1+i)$ در نظر گرفته شده است. در شکل ۲۲، هندسه‌ی واقعی مسئله با تخمین هندسه‌ی مسئله با کمک المان گوسین - فوزیه با پارامتر شکل $\omega = 0/1(1+i)$ مقایسه شده است. مطابق شکل ۲۰،

نسبت به المان‌های کلاسیک لاگرانژی و سرنندیپیتی همتای خود بسیار توانمندتر هستند، چرا که با تعداد المان‌های به مراتب کمتری به پاسخ‌های تحلیلی هم‌گرا می‌شوند.

المان‌های مذکور حل شده است و نتایج آن با نتایج حاصل از حل تحلیلی و تحلیل اجزاء محدود با استفاده از المان‌های کلاسیک لاگرانژی و سرنندیپیتی مقایسه شده است. با مقایسه‌ی نتایج می‌توان دریافت که المان‌های پیشنهادی

پانوشتها

1. Flugge
2. Christensen
3. Sorvari, J. and Hamalainen, J.
4. creep
5. orthotropic
6. relaxation modulus
7. prony series
8. radial basis functions
9. curve fitting
10. Navier-Stocks
11. multiquadric
12. Gaussian
13. thin plate spline
14. inverse multiquadric
15. first kind bessel
16. fourier
17. complex fourier
18. compactly supported RBFs
19. meshless
20. element-based
21. singularity
22. polynomial
23. influence domain
24. lagrange
25. Maxwell
26. Wiechert
27. assembly
28. radial point interpolation meshless method (RPIM)
29. euclidean norm
30. Kronecker delta
31. partition unity
32. infinite piecewise continuity
33. Serendipity
34. patch test
35. patch nodes
36. X_ translational rigid body motion
37. Y_ translational rigid body motion
38. XY diagonal rigid body motion
39. linear elastic isotropic homogeneous material
40. Gaussian quadrature numerical integration
41. isoparametric formulation
42. particle swarm optimization
43. relaxation time
44. Poisson's ratio
45. plane stress
46. Heaviside function
47. creep and recovery
48. correspondence principle
49. creep compliance
50. encased cylinder
51. solid propellant rocket motor

52. rocket motor casing

منابع (References)

1. Wang, Y.Z. and Tsai, T.J. "Static and dynamic analysis of a viscoelastic plate by the finite element method", *Appl. Acoust.*, **25**(2), pp. 77-94 (1988).
2. Brinson, H.F. and Brinson, L.C. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction*, 2nd edn., Springer, pp. 211-230, New York, USA (2015).
3. Christensen, R.M. *Theory of Viscoelasticity*, 2nd edn., Academic Press, pp.163-179, New York, USA (1982).
4. Flugge, W. *Viscoelasticity*, 2nd edn., Springer, pp.46-50, Berlin, Germany (1975).
5. Tschoegl, N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction*, Springer-Verlag, pp.399-406, Berlin, Germany (1989).
6. Lakes, R.S. *Viscoelastic Materials*, Cambridge University Press, pp.14-52, New York, USA (2009).
7. Akoz, A.Y., Kadioglu, F. and Tekin, G. "Quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic plates", *Mech. Time-Depend. Mater.*, **19**(4), pp. 483-503 (2015).
8. Wang, J. and Birgisson, B. "A time domain boundary element method for modeling the quasi-static viscoelastic behavior of asphalt pavements", *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **31**(3), pp. 226-240 (2007).
9. Xu, Q. and Rahman, M.S. "Finite element analyses of layered viscoelastic system under vertical circular loading", *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **32**(8), pp. 897-913 (2008).
10. Sorvari, J. and Hamalainen, J. "Time integration in linear viscoelasticity- a comparative study", *Mech. Time-Depend. Mater.*, **14**(3), pp. 307-328 (2010).
11. King, I.P. *On The Finite Element Analysis of Two-Dimensional Problems With Time Dependent Properties*, Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley, California, USA (1965).
12. Ghazlan, G., Caperra, S. and Petit, C. "An incremental formulation for the linear analysis of thin viscoelastic structures using generalized variables", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **38**(19), pp. 3315-3333 (1995).
13. Zocher, M.A., Groves, S.E. and Allen, D.H. "A three-dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **40**(12), pp. 2267-2288 (1997).

14. Hardy, R.L. "Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces", *J. Geophys. Res.*, **76**(8), pp.1905-1915 (1971).
15. Franke, R. "Scattered data interpolation: test of some methods", *Math. Computat.*, **38**(157), pp.181-200 (1982).
16. Wang, J.G. and Liu, G.R. "On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **191**(29), pp. 2611-2630 (2002).
17. Kansa, E.J. "A scattered data approximation scheme with application to computational fluid-dynamics I and II", *Comput. Math. Appl.*, **19**(8-9), pp. 147-161 (1990).
18. Wang, J.G. and Liu, G.R. "A point interpolation meshless method based on radial basis functions", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **54**(11), pp.1623-1648 (2002).
19. Khaji, N. and Hamzehei Javaran, S. "New complex fourier shape functions for the analysis of two-dimensional potential problems using boundary element method", *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **37**(2), pp. 260-272 (2013).
20. Hamzehei-Javaran, S. "Approximation of the state variables of Navier's differential equation in transient dynamic problems using finite element method based on complex fourier shape functions", *Asian Journal of Civil Engineering*, **19**(4), pp. 431-450 (2018).
21. Hamzehei-Javaran, S. "Proposed complex Fourier basis functions in Boundary Elements method", *Ph.D. Dissertation, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran* (2013).
22. Logan, D.L. "A first course in the Finite Element Method", *5th edn.*, *Cengage Learning Engineering*, pp. 486-533, Connecticut, USA (2012).
23. Powell, M.J.D. *The Theory Of Radial Basis Function Approximation In 1990*, In *Advances in Numerical Analysis*, Clarendon Press, Light FW edition, Oxford, pp. 105-203 (1992).
24. Sadd, M.H. *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*, Elsevier Academic Press, pp.160-165, Massachusetts, USA (2005).