

حل بسته برای میدان‌های کشسانی حاصل از حرکت یک نابجایی پیچی دارای سرعت ثابت بر روی مسیری به شکل خط مستقیم با راستایی دلخواه

محمد رسول دلفانی (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهندسی عمران شریف، زمستان (۱۳۹۹)
دوری ۲ - ۳۶، شماره‌ی ۴/۲، ص. ۸۰-۷۳

مطالعه‌ی حاضر به تعیین میدان‌های کشسانی ناشی از یک نابجایی پیچی که بر روی مسیری به شکل خط مستقیم با راستایی دلخواه در یک محیط نامتناهی همسانگرد در حال حرکت است، اختصاص یافته است. در اینجا فرض می‌شود که این نابجایی با سرعتی ثابت و البته کمتر از سرعت انتشار امواج برشی در محیط حرکت می‌کند. در این تحلیل در چارچوب یک توصیف میکرومکانیکی، از مفهوم کرنش ویژه برای بیان هندسه‌ی نابجایی مذکور بهره برده خواهد شد. پس از صورت‌بندی معادلات حاکم بر مسئله، از تبدیل فوری‌ی دو بعدی استفاده و برای اولین بار برای میدان‌های تغییر مکان و کرنش کشسانی مسئله‌ی در دست بررسی، حل بسته ارائه می‌شود. نتایج حاصل به خوبی گویای اثر راستای حرکت نابجایی و نیز سرعت آن بر روی میدان‌های کشسانی ایجاد شده در محیط هستند.

واژگان کلیدی: نابجایی پیچی، میدان کشسانی، حرکت یکنواخت، کرنش ویژه.

delfani@kntu.ac.ir

۱. مقدمه

حجم مطالعات انجام شده در این حوزه، در ادامه صرفاً مروری مختصر بر مطالعات تحلیلی صورت گرفته بر روی نابجایی‌ها در چارچوب نظریه‌ی الاستیسیته ارائه خواهد شد.

اولین پژوهش‌ها درباره‌ی تعیین میدان تغییر مکان حاصل از وجود یک نابجایی در یک محیط جامد کشسان به مقالاتی از پرگروز^[۱] و کوهلر^[۲] برمی‌گردد. این دو به ترتیب برای توابع تغییر مکان ناشی از یک نابجایی پیچی و یک نابجایی لبه‌ی منفرد مستقر در یک محیط همسانگرد نامتناهی، جواب‌هایی تحلیلی به دست آوردند. درحالی که کارهای انجام گرفته توسط این دو مربوط به نابجایی‌های ساکن بود، کمی بعد، ایشلی^[۳] و فرانک^[۴] همین مسئله‌ها را به ترتیب برای نابجایی‌های پیچی و لبه‌ی متحرک با سرعت ثابت بررسی کردند.

به دنبال مطالعات مورد اشاره در بالا، حرکت نابجایی‌ها و مسائل مرتبط با آن‌ها مورد توجه بیشتری واقع شد. ایشلی در مطالعه‌ی دیگر^[۷] برای یک نابجایی پیچی متحرک که از حالت سکون آغاز به حرکت می‌کند و نهایتاً به سرعتی برابر با سرعت انتشار امواج برشی می‌رسد، میدان‌های کشسانی حوالی هسته‌ی نابجایی را به دست آورد. مورا^[۸] همین مسئله را گسترش داد و میدان‌های کشسانی ناشی از توزیعی پیوسته از نابجایی‌ها را که بر حسب زمان دستخوش تغییر می‌شود، استخراج کرد. کیوسالاس^[۶] و مورا^[۹] عباراتی را برای میدان‌های کشسانی حوالی هسته‌ی یک نابجایی لبه‌ی متحرک دارای سرعت دلخواه به دست آوردند و نتایج حاصل را برای حل مسئله‌ی نابجایی لبه‌ی مرتعش دارای حرکات کم‌دامنه به کار بردند.

امروزه در طراحی جامدات و سازه‌ها عمدتاً این ایده مد نظر است که باید از بیشترین ظرفیت شکل‌پذیری اجزای به‌کار رفته در سازه‌ها بهره برد. این ایده در عمل سبب شده است که مطالعه‌ی رفتار خمیری مواد در زمره‌ی یکی از موضوعات پراهمیت مورد توجه پژوهش‌گران فعال در حوزه‌ی مکانیک سازه‌ها و جامدات قرار گیرد. یافته‌های حاصل از مشاهدات آزمایشگاهی و تصویربرداری از ساختارهای اتمی جامدات کریستالی گویای آن است که نابجایی‌ها نقش تعیین‌کننده‌ی را در رفتار خمیری مواد شکل‌پذیر بر عهده دارند. به بیانی دقیق‌تر، اساساً رفتار خمیری یک جامد کریستالی شکل‌پذیر عبارت است از انباشت حرکات نابجایی‌های موجود در ساختار کریستالی آن.^[۱۰] در یک تعریف مختصر، نابجایی گونه‌ی از عیوب ساختاری موجود در جامدات کریستالی است که از جا شدن یک نیم‌لایه‌ی اضافی از اتم‌ها یا مولکول‌ها در میان نقاط شبکه‌ی کریستال پدید می‌آید. به اولین ردیف از اتم‌ها یا مولکول‌هایی که در این نیم‌لایه‌ی اضافی نشست‌اند، هسته‌ی نابجایی گفته می‌شود. حال اگر باری خارجی به محیطی که این نابجایی در آن قرار گرفته است وارد شود، البته به شرط آن که اندازه‌ی این بار وارده از حدی مشخص بزرگتر باشد، هسته‌ی نابجایی شروع به حرکت خواهد کرد؛ حرکتی که با مراحل متوالی شکستن و تشکیل پیوندهای بین نقاط شبکه در حوالی هسته‌ی نابجایی همراه است.

هر چند نابجایی پدیده‌ی متعلق به ساختار گسسته‌ی کریستال مواد است، اما از منظر مکانیک محیط‌های پیوسته نیز قابل توضیح و تبیین است. نظر به گستردگی

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۶/۹/۱۳۹۸، اصلاحیه ۱۳/۱۰/۱۳۹۹، پذیرش ۲۰/۲/۱۳۹۹.

DOI:10.24200/J30.2020.54889.2681

۲. بیان مسئله و تشریح معادلات حاکم بر آن

محیط نامتناهی همسانگردی را در نظر بگیرید که در آن یک نابجایی پیچی با بردار برگری به بزرگی b وجود دارد. فرض شود که هسته‌ی این نابجایی به موازات محور z است و صفحه‌ی لغزش حاصل از آن به موازات صفحه‌ی xy است. می‌دانیم که هسته‌ی نابجایی بر روی خطی با امتدادی دلخواه به معادله‌ی $y = \tan(\alpha)x$ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. توجه شود که α در واقع زاویه‌ی بین راستای حرکت نابجایی و محور x است. تصویری از این مسئله در شکل ۱ نشان داده شده است. مسئله‌ی مورد بررسی در این‌جا از جمله‌ی مسائل یاد مسطحه‌ی کشسانی به شمار می‌رود. فرض شود که $w = w(x, y, t)$ معرف تابع تغییر مکان محیط در راستای محور z باشد که در واقع تنها مؤلفه‌ی غیر صفر میدان تغییر مکان مسئله خواهد بود. در تحلیل حاضر، برای توصیف نابجایی از مفهوم کرنش ویژه بهره برده خواهد شد. تنها مؤلفه‌ی غیر صفر کرنش ویژه‌ی مربوط به نابجایی تعریف شده در اینجا با $\epsilon_{yz}^* = \epsilon_{yz}^*(x, y, t)$ نشان داده می‌شود. بنابراین مؤلفه‌های غیر صفر میدان کرنش کشسانی مسئله از روابط زیر به دست خواهند آمد.

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} - \epsilon_{yz}^*. \quad (2)$$

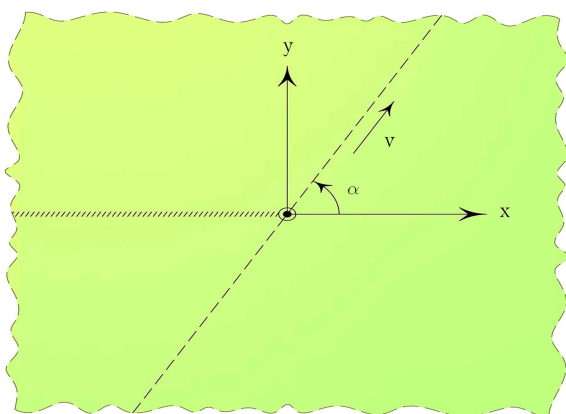
متعاقباً مؤلفه‌های غیر صفر میدان تنش مسئله نیز از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} - 2\mu \epsilon_{yz}^*, \quad (4)$$

که در این‌جا μ معرف ثابت برشی محیط همسانگرد تحت مطالعه است. حال به راحتی می‌توان نشان داد که معادله‌ی حرکت حاکم بر مسئله، بر حسب میدان‌های تغییر مکان و کرنش ویژه به شرح زیر خواهد بود.

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2\mu \frac{\partial \epsilon_{yz}^*}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5)$$



شکل ۱. تصویری از یک محیط نامتناهی که یک نابجایی پیچی در آن با سرعت ثابت v در راستایی دلخواه حرکت می‌کند. هسته‌ی نابجایی مذکور در زمان $t = 0$ در مبدأ مختصات قرار دارد و صفحه‌ی لغزش آن بر نیمه‌ی منفی محور z منطبق است. زاویه‌ی امتداد حرکت این نابجایی را با محور z به α نشان می‌دهیم.

ویرتمن^{[۱۰][۱۷]} برای نابجایی‌های پیچی، لبه‌یی و مختلط متحرک که سرعتی حد فاصل سرعت انتشار امواج برشی و طولی دارند و همچنین برای آن‌هایی که به سرعت‌های فراصوت می‌رسند، راه حلی عمومی ارائه داد. مارکنزف^{[۱۱][۱۸]} مسئله‌ی نابجایی پیچی متحرک دارای سرعت غیر یکنواختی را که حرکت خود را از حالت سکون آغاز می‌کند و نهایتاً به سرعتی حد فاصل سرعت امواج برشی و طولی می‌رسد، مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. کمی بعدتر، مارکنزف و کلیفتون^{[۱۲][۱۹]} همین مسئله را برای یک نابجایی لبه‌یی مورد مطالعه قرار دادند.

پیتون^{[۱۳][۱۰]} برای میدان‌های کشسانی ناشی از حرکت یکنواخت یک نابجایی لبه‌یی در یک محیط همسانگرد جانبی، عباراتی تحلیلی را استخراج کرد. وو^{[۱۴][۱۱]} نیز برای میدان‌های کشسانی یک نابجایی دلخواه که در یک محیط ناهمسانگرد از حالت سکون آغاز به حرکت می‌کند و نهایتاً به سرعتی ثابت می‌رسد، راه حلی تحلیلی ارائه کرد. پیون^[۱۵] و همکارانش^[۱۵] در یک تحلیل تقریبی، معادله‌ی حرکت شتابدار نابجایی‌های پیچی و لبه‌یی را با در نظر گرفتن اثرات نسبیتی در محدوده‌ی سرعت‌های فروسوت استخراج کردند. ونگ^[۱۶] و همکارانش^[۱۶] با استفاده از توابع مختلط، میدان‌های کشسانی ناشی از نابجایی پیچی منفردی را که در محیطی دارای خواص الکترومغناطیسی در حال حرکت است، به دست آوردند. در مطالعه‌ی از هوانگ^[۱۷] و مارکنزف^[۱۷]، مسئله‌ی نابجایی متحرکی که در محدوده‌ی سرعت انتشار امواج برشی حرکتی شتابدار را تجربه می‌کند، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. ویرتمن^[۱۸] برای مسئله‌ی یک نابجایی لبه‌یی که در حوالی مرز بین دو محیط ناهمجنس در حال حرکت است، جوابی تحلیلی به دست آورد.

پلیگرینی^{[۱۹][۱۵]} با استفاده از مفهوم کرنش ویژه، صورت تعمیم‌یافته‌ی معادله‌ی پیرلز^[۱۶] - نابارو^[۱۷] را برای نابجایی‌های پیچی و لبه‌یی استخراج کرد. وی در مطالعه‌ی دیگر^[۲۰] برای حالتی که پهنای هسته‌ی یک نابجایی متحرک، اعم از نابجایی پیچی یا لبه‌یی، بر حسب زمان متغیر باشد، معادلات تقریبی حرکت را به دست آورد. هوانگ و دنگ^{[۲۱][۱۸]} معادله‌ی پیشانی موج حاصل از یک نابجایی لبه‌یی را که در محدوده‌ی سرعت‌های فراصوت دارای حرکتی شتابدار است، به دست آوردند. لازار^[۲۲] و پلیگرینی^[۲۲] با استفاده از توابع تعمیم‌یافته، برای نابجایی‌های پیچی و لبه‌یی متحرک دارای سرعت متغیر، عباراتی تحلیلی را استخراج کردند. در مطالعه‌ی دیگر از پلیگرینی^[۲۳] در چارچوب نظریه‌ی الاستودینامیک انتشار امواج، مسئله‌ی نابجایی متحرکی که با سرعت ثابت در محیطی ناهمسانگرد سیر می‌کند، مورد تجزیه و تحلیل واقع شد. اخیراً در مطالعه‌ی از دلفانی و توکل^[۲۴]، میدان‌های کشسانی ناشی از حرکت یکنواخت نابجایی پیچی در چارچوب نظریه‌ی گرادیان کرنش تعیین شد.

بر اساس تحقیقات هیچ‌یک از مطالعات تحلیلی صورت‌گرفته‌ی تا پیش از این، برای حرکت نابجایی پیچی در امتداد یک راستای دلخواه، راه حل بسته‌ی ارائه نداده‌اند. با جستجو در میان مقالات موجود می‌توان دریافت که برآیند تا در چارچوب یک مطالعه‌ی تحلیلی، برای میدان‌های کشسانی ناشی از حرکت یکنواخت نابجایی پیچی در امتداد یک راستای دلخواه در یک محیط نامتناهی همسانگرد، عباراتی تحلیلی را به دست آوریم. بدین منظور در بخش بعدی مقاله، صورت دقیق مسئله و نیز معادلات حاکم بر آن شرح داده خواهد شد. سپس در بخش سوم مقاله، برای میدان تغییر مکان و کرنش کشسانی مسئله، عبارات بسته‌ی استخراج می‌شوند. در چهارمین بخش مقاله، جواب‌های تحلیلی به دست آمده برای دو حالت خاص ساده‌سازی خواهند شد و نهایتاً در آخرین بخش این مقاله چند مثال حل می‌شود و در ضمن آن، اثر تغییرات سرعت و راستای حرکت نابجایی بر روی میدان‌های کشسانی ناشی از آن بررسی خواهد شد.

اکنون می‌باید از عبارت بالا وارون تبدیل فوریه گرفته شود. بدین منظور باید بر حسب متغیرهای فضای فوریه، دوبار انتگرال‌گیری کرد. می‌توان نشان داد که با ساده‌سازی مرحله‌ی اول انتگرال‌گیری بر حسب ξ_1 ، عبارتی به شرح زیر برای تابع $w(s_1, s_2)$ به دست خواهد آمد.

$$w(s_1, s_2) = -\frac{ik}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(-s_1) \exp(is_2 \xi_2)}{(\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha)) \xi_2} d\xi_2 + \frac{k\gamma^t \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\pi (\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha)) \sqrt{\lambda - \gamma^t}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\xi_2} \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda - \gamma^t} |s_1| \xi_2}{\lambda - \gamma^t \cos^t(\alpha)}\right) \times \cos\left(\left[\frac{\gamma^t \sin(\alpha) \cos(\alpha) s_1}{\lambda - \gamma^t \cos^t(\alpha)} + s_2\right] \xi_2\right) \right\} d\xi_2 + \frac{k \operatorname{sgn}(s_1)}{\pi (\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha))} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\xi_2} \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda - \gamma^t} |s_1| \xi_2}{\lambda - \gamma^t \cos^t(\alpha)}\right) \times \sin\left(\left[\frac{\gamma^t \sin(\alpha) \cos(\alpha) s_1}{\lambda - \gamma^t \cos^t(\alpha)} + s_2\right] \xi_2\right) \right\} d\xi_2, \quad (11)$$

که $\operatorname{sgn}(O)$ معرف تابع علامت است. حال به منظور استحصال جواب نهایی کافی است در قدم آخر، انتگرال‌های موجود در این عبارت همگی بر حسب ξ_2 ساده‌سازی شوند، که در نتیجه‌ی آن جوابی به شرح زیر به دست خواهد آمد.

$$w(s_1, s_2) = \frac{kH(-s_1) \operatorname{sgn}(s_2)}{\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha)} + \frac{k}{\pi (\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha))} \times \tan^{-1} \left[\frac{(\lambda - \gamma^t \cos^t(\alpha)) s_2}{\sqrt{\lambda - \gamma^t} s_1} + \frac{\gamma^t \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\sqrt{\lambda - \gamma^t}} \right] + \frac{k\gamma^t \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{2\pi \sqrt{\lambda - \gamma^t} (\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha))} \times \ln \left[\frac{\left(\gamma^t \sin(\alpha) \cos(\alpha) s_1 + (\lambda - \gamma^t \cos^t(\alpha)) s_2 \right)^2}{(\lambda - \gamma^t) s_1^2} \right]. \quad (12)$$

در ادامه برای تعیین ثابت k کافی است که شرایط مرزی مسئله را اعمال کرد. یادآوری می‌شود که تابع تغییر مکان مربوط به این نابجایی باید بر روی صفحه‌ی لغزش خود دارای ناپیوستگی باشد. به عبارتی دقیق‌تر می‌توان نوشت:

$$\lim_{s_2 \rightarrow 0^+} w(s_1, s_2) - \lim_{s_2 \rightarrow 0^-} w(s_1, s_2) = bH(-s_1). \quad (13)$$

حال با اعمال شرط فوق بر روی جواب به دست آمده در معادله‌ی ۱۲، به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$k = \frac{b}{\gamma} (\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha)). \quad (14)$$

با جایگذاری عبارت فوق در همان معادله‌ی ۱۲ و نیز نوشتن متغیرهای $\{s_1, s_2\}$ بر حسب $\{x, y, t\}$ نهایتاً جوابی به شرح زیر برای تابع تغییر مکان مسئله حاصل خواهد شد.

که در رابطه‌ی بالا، ρ معرف چگالی محیط است. گفتنی است که کرنش ویژه و متناظر با نابجایی مورد بررسی در این جا را می‌توان با تابعی به صورت زیر بیان کرد.

$$\epsilon_{yz}^* = \epsilon_{yz}^*(x, y, t) = kH(\cos(\alpha)vt - x) \delta(y - \sin(\alpha)vt), \quad (6)$$

که $H(0)$ و $\delta(0)$ به ترتیب معرف توابع هوی‌ساید^۲ و دلتای دیراک هستند. افزون بر این، k عددی ثابت است که نهایتاً با اعمال شرایط مرزی مسئله تعیین خواهد شد.

۳. تعیین توابع تغییر مکان و کرنش کشسانی مسئله

در این بخش به منظور حل معادله‌ی ۵، ابتدا متغیرهای جدیدی را به شرح $s_1 \equiv x - \cos(\alpha)vt$ و $s_2 \equiv y - \sin(\alpha)vt$ تعریف می‌کنیم. بر همین اساس می‌توان کرنش ویژه مسئله را بر حسب این متغیرهای جدید به صورت زیر بیان کرد.

$$\epsilon_{yz}^* = \epsilon_{yz}^*(s_1, s_2) = kH(-s_1) \delta(s_2). \quad (7)$$

متعاقباً به راحتی می‌توان نشان داد که میدان تغییر مکان مسئله نیز تابعی به صورت $w = w(s_1 - s_2)$ خواهد بود. بنابراین معادله‌ی ۵ را می‌توان بر حسب متغیرهای جدید به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s_2^2} \right) - 2\mu kH(-s_1) \frac{\partial}{\partial s_2} \delta(s_2) = \mu\gamma^t \cos^t(\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2} + \mu\gamma^t \sin^t(\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial s_2^2} + 2\mu\gamma^t \sin(\alpha) \cos(\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial s_1 \partial s_2}. \quad (8)$$

در معادله‌ی $\gamma = v/c$ ، $\lambda = \sqrt{\mu/\rho}$ معرف سرعت امواج برشی منتشره در محیط است. در ادامه، از طرفین معادله‌ی ۸ تبدیل فوریه‌ی دوبعدی گرفته خواهد شد. اگر متغیرهای فضای این تبدیل فوریه را با زوج مرتب $\{\xi_1, \xi_2\}$ نشان دهیم، می‌توان نشان داد که تبدیل یافته‌ی معادله‌ی مذکور، صورتی به شرح زیر به خود خواهد گرفت.

$$-\mu (\xi_1^2 + \xi_2^2) \tilde{w} + \frac{\mu k}{2\pi^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} = -\mu\gamma^t (\cos(\alpha)\xi_1 + \sin(\alpha)\xi_2)^2 \tilde{w}, \quad (9)$$

که در این جا $\tilde{w} = \tilde{w}(\xi_1, \xi_2)$ نشان‌دهنده‌ی تبدیل فوریه‌ی تابع $w(s_1, s_2)$ است. حال به سادگی می‌توان نشان داد که حل معادله‌ی فوق نهایتاً به جواب زیر می‌انجامد.

$$\tilde{w}(\xi_1, \xi_2) = \frac{k}{2\pi^2 (\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha)) \xi_1 \xi_2} \frac{\left(\frac{k (\lambda - \gamma^t \cos^t(\alpha)) \xi_1}{2\pi^2 (\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha)) \xi_2} + \frac{k\gamma^t \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\pi^2 (\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha))} \right)}{\left((\lambda - \gamma^t \cos^t(\alpha)) \xi_1^2 - 2\gamma^t \sin(\alpha) \cos(\alpha) \xi_1 \xi_2 + (\lambda - \gamma^t \sin^t(\alpha)) \xi_2^2 \right)} \quad (10)$$

$$w(x, y; t) = \frac{b}{\sqrt{v}} H(vt - x) \operatorname{sgn}(y) + \frac{b}{\sqrt{v}\pi} \tan^{-1} \left[\sqrt{1 - \gamma^2} \frac{y}{x - vt} \right], \quad (18)$$

$$\epsilon_{xz}(x, y; t) = -\frac{b\sqrt{1 - \gamma^2}y}{4\pi \left((x - vt)^2 + (1 - \gamma^2)y^2 \right)}, \quad (19)$$

$$\epsilon_{yz}(x, y; t) = \frac{b\sqrt{1 - \gamma^2}(x - vt)}{4\pi \left((x - vt)^2 + (1 - \gamma^2)y^2 \right)}. \quad (20)$$

گفتنی است که این روابط پیشتر توسط فرانک^[6] برای چنین حالت خاصی از مسئله به دست آمده‌اند.

۲.۴. حرکت نابجایی عمود بر صفحه‌ی لغزش

برای این حالت خاص کافی است معادلات ۱۵ تا ۱۷ به ازای $\alpha = \pi/2$ ساده شوند. در آن صورت عباراتی به شرح زیر به ترتیب برای تابع تغییر مکان و کرنش کشسانی مسئله حاصل خواهند شد.

$$w(x, y; t) = \frac{b}{\sqrt{v}} H(-x) \operatorname{sgn}(y - vt) + \frac{b}{\sqrt{v}\pi} \tan^{-1} \left[\frac{y - vt}{\sqrt{1 - \gamma^2}x} \right], \quad (21)$$

$$\epsilon_{xz}(x, y; t) = -\frac{b\sqrt{1 - \gamma^2}(y - vt)}{4\pi \left((1 - \gamma^2)x^2 + (y - vt)^2 \right)}, \quad (22)$$

$$\epsilon_{yz}(x, y; t) = \frac{b\sqrt{1 - \gamma^2}x}{4\pi \left((1 - \gamma^2)x^2 + (y - vt)^2 \right)}. \quad (23)$$

۵. ارائه و بحث نتایج

در این بخش، نتایج حل چند مثال از مسئله‌ی در دست بررسی در این مقاله ارائه و به بحث گذاشته خواهد شد. به طور مشخص اثر تغییرات سرعت حرکت نابجایی و نیز راستای حرکت آن در قالب چند نمودار بررسی خواهند شد.

بدین منظور در شکل‌های ۲ (الف، ب و ج) به ترتیب نیمرخ‌های تابع تغییر مکان w و مؤلفه‌های کرنش کشسانی ϵ_{xz} و ϵ_{yz} در مقطع $x = -b$ و زمان $t = 0$ به ازای سرعت‌های مختلف حرکت نابجایی رسم شده‌اند؛ نمودارهای موجود در این شکل‌ها برای نسبت‌های مختلف $\gamma = 0/4, 0/5, 0/6, 0/7, 0/8, 0/9$ ترسیم شده‌اند. یادآوری می‌شود که γ بیانگر نسبت سرعت حرکت نابجایی به سرعت امواج برشی است. گفتنی است که در تمام این نمودارها، زاویه‌ی حرکت نابجایی برابر با $\alpha = \pi/4$ فرض شده است.

نمودارهای رسم شده در شکل ۲ (الف) به خوبی گویای آن هستند که هر چند تابع تغییر مکان بر روی لبه‌های صفحه‌ی لغزش به ازای سرعت‌های مختلف حرکت نابجایی، مقادیر متفاوتی به خود می‌گیرد، اما در تمام حالات، تابع تغییر مکان بر روی صفحه‌ی مذکور واجد یک ناپوستگی ثابت به اندازه‌ی b است. نمودارهای رسم شده در شکل‌های ۲ (ب و ج) نشان می‌دهند که اولاً مقادیر

$$w(x, y; t) = \frac{b}{\sqrt{v}} H(\cos(\alpha)vt - x) \times \operatorname{sgn}(y - \sin(\alpha)vt) + \frac{b}{\sqrt{v}\pi} \times \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1 - \gamma^2} \frac{y - \sin(\alpha)vt}{x - \cos(\alpha)vt} + \frac{\gamma^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \frac{\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y - vt}{x - \cos(\alpha)vt}}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \right] + \frac{b\gamma^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\pi \sqrt{1 - \gamma^2}} \times \ln \left[\frac{x^2 + y^2 - \gamma^2(\sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y)^2}{-2(\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y)vt + (vt)^2} \right]. \quad (15)$$

با نگاهی به جواب به دست آمده در این جا به وضوح درمی‌یابیم که تحلیل حاضر فقط در محدوده‌ی $|\gamma| < 1$ یا به عبارتی به ازای $|v| < c$ معتبر است. به بیانی دیگر صرفاً برای نابجایی‌هایی که سرعت حرکتشان از سرعت انتشار امواج برشی در محیط کمتر باشد، می‌توان از نتایج تحلیل پیش رو استفاده کرد.

در ادامه اگر تابع تغییر مکان داده شده در معادله‌ی ۱۵ در معادلات ۱ و ۲ جایگذاری شود، به راحتی می‌توان نشان داد که مؤلفه‌های غیر صفر میدان کرنش کشسانی مسئله به شرح زیر خواهند بود.

$$\epsilon_{xz}(x, y; t) = -\frac{b(1 - \gamma^2 \sin^2(\alpha))}{4\pi \sqrt{1 - \gamma^2}} \times \frac{\left(\frac{y - \sin(\alpha)vt}{+ \gamma^2 \cos(\alpha)(\sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y)} \right)}{\left(\frac{x^2 + y^2 - \gamma^2(\sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y)^2}{-2(\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y)vt + (vt)^2} \right)}, \quad (16)$$

$$\epsilon_{yz}(x, y; t) = \frac{b}{4\pi \sqrt{1 - \gamma^2}} \times \frac{\left(\frac{(1 - \gamma^2)(x - \cos(\alpha)vt) - \gamma^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\times \left(\frac{y - \sin(\alpha)vt}{+ \gamma^2 \cos(\alpha)(\sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y)} \right)} \right)}{\left(\frac{x^2 + y^2 - \gamma^2(\sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y)^2}{-2(\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y)vt + (vt)^2} \right)}. \quad (17)$$

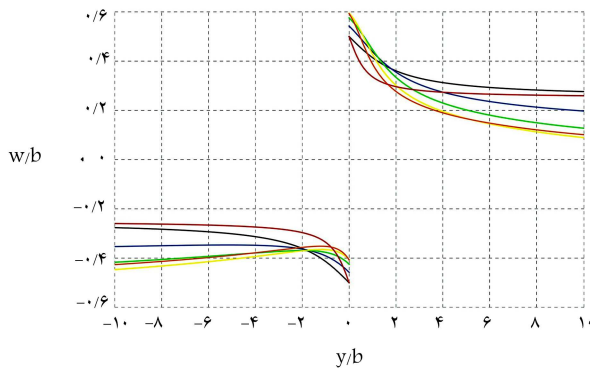
عبارات به دست آمده در معادلات بالا نشان‌دهنده‌ی آن است که مؤلفه‌های کرنش کشسانی حاصل از یک نابجایی متحرک در محل هسته‌ی نابجایی دارای تکینگی است؛ به عبارتی، مقادیر کرنش در این نقطه به بی‌نهایت میل می‌کنند.

۴. بررسی حالات خاص

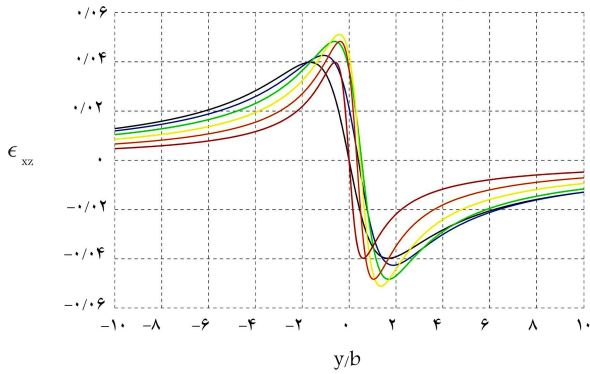
در این بخش، دو حالت خاص بررسی می‌شود.

۱.۴. حرکت نابجایی در امتداد صفحه‌ی لغزش

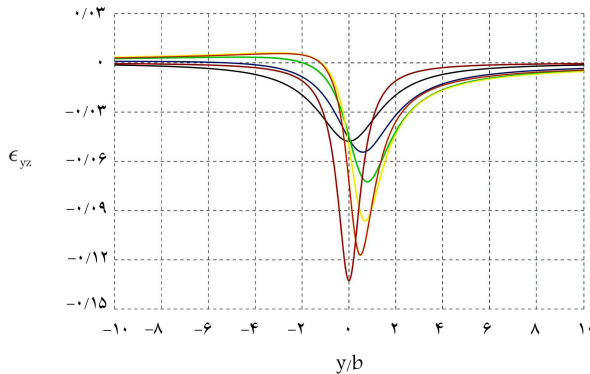
برای بررسی چنین حالتی کافی است معادلات ۱۵ تا ۱۷ به ازای $\alpha = 0$ ساده‌سازی شوند. در آن صورت عبارات زیر به ترتیب برای تابع تغییر مکان و کرنش کشسانی این حالت خاص به دست خواهند آمد.



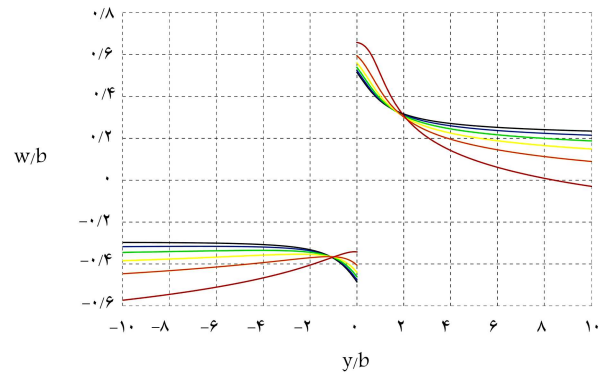
الف) تابع تغییر مکان w و مولفه های کرنش کشسان؛



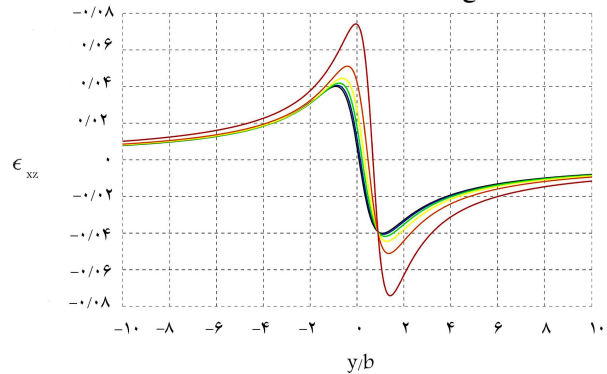
ب) ϵ_{xz}



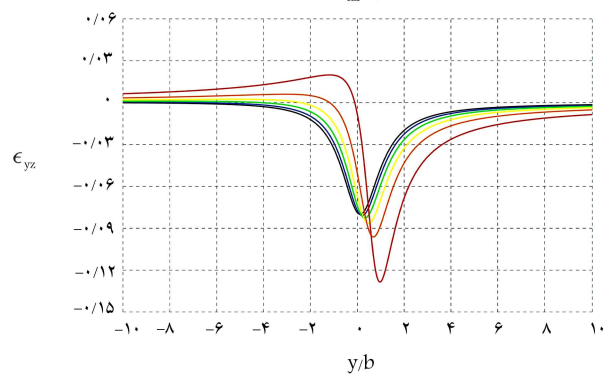
ج) ϵ_{yz}



الف) تابع تغییر مکان w و مولفه های کرنش کشسان؛



ب) ϵ_{xz}



ج) ϵ_{yz}

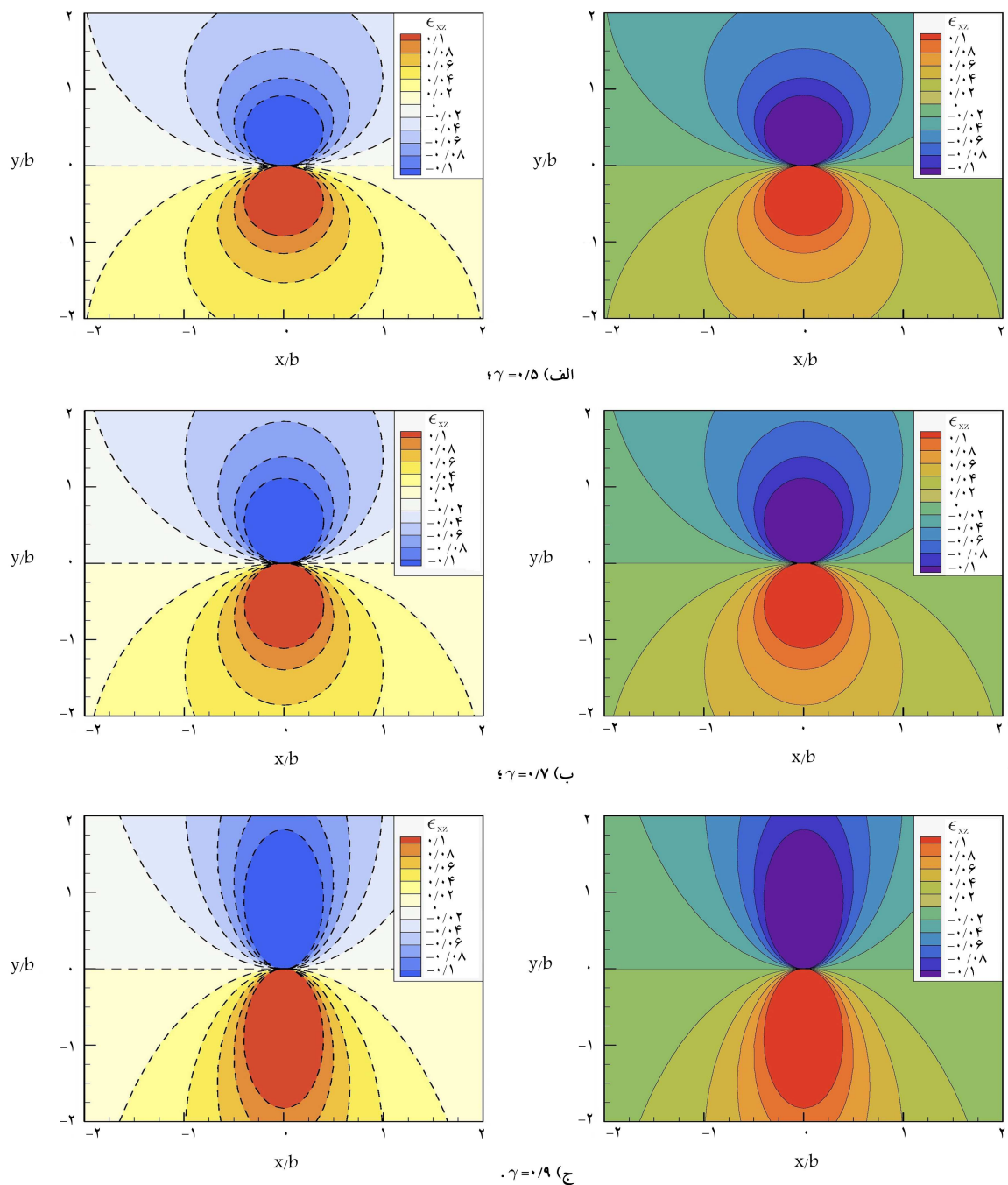
شکل ۳. نیم‌رخ‌های (الف)، (ب) و (ج) در مقطع $X = -b$ و زمان $t = 0^\circ$ به ازای زوایای مختلف حرکت نابجایی. در این نمودارها منحنی‌های ترسیم شده به رنگ مشکی، آبی، سبز، زرد، نارنجی و قرمز به ترتیب به مقادیر مختلف زاویه α به شرح $0^\circ, \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ تعلق دارند. در تمام این نمودارها، نسبت سرعت حرکت نابجایی به سرعت حرکت امواج برشی برابر با $\gamma = 0.8^\circ$ فرض شده است.

است؛ تکنیکی‌های کرنش حاصل از یک نابجایی در محل هسته‌ی نابجایی رخ می‌دهد. در شکل‌های ۳ (الف، ب و ج) به ترتیب نیم‌رخ‌های تابع تغییر مکان w و مؤلفه‌های کرنش کشسانی ϵ_{xz} و ϵ_{yz} در مقطع $x = -b$ و زمان $t = 0^\circ$ به ازای زوایای مختلف حرکت نابجایی به شرح $0^\circ, \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ نمایش داده شده‌اند. در تمام این نمودارها، نسبت سرعت حرکت نابجایی به سرعت حرکت امواج برشی برابر با $\gamma = 0.8^\circ$ فرض شده است.

نمودارهای رسم شده در شکل ۳ نشان می‌دهند که توابع تغییر مکان w و کرنش‌های کشسانی ϵ_{xz} و ϵ_{yz} به ازای دو حالت $\alpha = \pi/2$ و $\alpha = 0^\circ$ نسبت به

شکل ۲. نیم‌رخ‌های (الف)، (ب) و (ج) در مقطع $X = -B$ و زمان $t = 0^\circ$ به ازای سرعت‌های مختلف حرکت نابجایی. در این نمودارها منحنی‌های ترسیم شده به رنگ مشکی، آبی، سبز، زرد، نارنجی و قرمز به ترتیب به مقادیر مختلف نسبت γ به شرح $0.4^\circ, 0.5^\circ, 0.6^\circ, 0.7^\circ, 0.8^\circ, 0.9^\circ$ تعلق دارند. در همه‌ی این نمودارها، زاویه‌ی حرکت نابجایی برابر با $\alpha = \pi/4$ فرض شده است.

مؤلفه‌های کرنش با یکدیگر قابل مقایسه‌اند و ثانیاً هر دو مؤلفه در حوالی صفحه‌ی لغزش نابجایی، بزرگترین مقادیر خود را می‌گیرند. همچنین به وضوح پیداست که در فواصل دور از صفحه‌ی لغزش، هر دو مؤلفه‌ی کرنش مقادیر کوچکتری به خود می‌گیرند و با افزایش این فاصله، کرنش‌ها اکیداً به سمت صفر میل پیدا می‌کنند. در همین نمودارها می‌توان دید که با افزایش سرعت حرکت نابجایی، بزرگی هر دو مؤلفه‌ی میدان کرنش حاصل از آن نیز افزایش می‌یابد. مثلاً با استناد به شکل ۲ (ب) می‌توان گفت که بیشینه‌ی کرنش ϵ_{xz} ایجاد شده به ازای نسبت $\gamma = 0.9^\circ$ قریب به دو برابر حالتی است که این نسبت برابر با $\gamma = 0.4^\circ$ باشد. نیم‌رخ مؤلفه‌های کرنش در مقطع $x = -b$ فاقد تکنیکی



شکل ۴. منحنی‌های هم‌تراز برای مؤلفه‌ی کرنش کشسانی ϵ_{xz} در زمان $t = 0^\circ$ متعلق به یک نابجایی متحرک در راستای محور x به ازای نسبت‌های مختلف سرعت حرکت نابجایی به سرعت انتشار امواج برشی به شرح (الف)، (ب) و (ج). نمودارهای سمت چپ و راست به ترتیب نتایج روش تحلیلی حاضر و نتایج مدل‌سازی اجزای محدود را نشان می‌دهند.

۴ (الف، ب و ج) منحنی‌های هم‌تراز به دست آمده از روش تحلیلی حاضر و همچنین یک مدل‌سازی اجزای محدود انجام شده با نرم‌افزار ABAQUS برای مؤلفه‌ی کرنش کشسانی ϵ_{xz} حاصل از حرکت یک نابجایی در راستای محور x در زمان $t = 0^\circ$ به ازای نسبت‌های مختلف سرعت حرکت نابجایی به سرعت انتشار امواج برشی به ترتیب به شرح $\gamma = 0.5$ ، $\gamma = 0.7$ و $\gamma = 0.9$ نشان داده شده‌اند. این نمودارها به وضوح گویای انطباق نتایج دو روش مذکور تا حد بسیار قابل قبولی هستند. در چارچوب مطالعه‌ی تحلیلی حاضر، با جایگذاری متغیرهای (x, y, t) در معادله‌ی ۱۶ می‌توان به

متغیر y به ترتیب توابعی فرد، فرد و زوج خواهند بود. مضاف بر این‌که هر سه‌ی این توابع برای سایر زوایای حرکت نابجایی، همگی توابعی نه زوج و نه فرد خواهند بود. نمودارهای رسم شده در شکل ۳ (ج) به وضوح مبین آن است که با افزایش زاویه‌ی حرکت نابجایی نسبت به محور x از $\alpha = 0^\circ$ تا $\alpha = \pi/2$ ، اندازه‌ی بزرگ‌ترین مؤلفه‌ی برشی ایجاد شده در محیط به میزان چشمگیری (قریب به سه برابر) افزایش پیدا می‌کند. در پایان این بخش، می‌توان نتایج حاصل از روش تحلیلی پیشنهادی در این مقاله را با نتایج حاصل از مدل‌سازی‌های اجزای محدود قیاس کرد. بدین منظور در شکل‌های

یکنواخت یک نابجایی پیچی در امتداد خطی با راستای دلخواه در یک محیط نامتناهی همسانگرد صورت‌بندی شد. آنگاه با استفاده از تبدیل فوریه‌ی دوبعدی، برای تابع تغییر مکان مسئله، حلی بسته به دست آمد و متعاقباً میدان‌های کرنش کشسانی مسئله نیز تعیین شدند. سپس نشان داده شد که پاسخ‌های به دست آمده در این جا با نتایجی که پیشتر توسط دیگران برای حالتی خاص از مسئله ارائه شده بود و همچنین با نتایج حاصل از مدل‌سازی‌های اجزای محدود برای چند مثال، انطباق دارد. روابط به دست آمده همچنین نشان می‌دهند که میدان کرنش مسئله در محل هسته‌ی نابجایی دارای تکینگی است. نمودارهای رسم شده در این مقاله به خوبی اثر تغییرات سرعت حرکت نابجایی و امتداد آن را بر روی میدان‌های کشسانی مسئله نشان می‌دهند. به‌طور مشخص بر اساس نتایج حاصل درمی‌یابیم که با افزایش سرعت نابجایی، بزرگی مؤلفه‌های میدان کرنش حاصل از آن نیز افزایش می‌یابد.

۶. نتیجه‌گیری

در مقاله‌ی حاضر در چارچوب یک مطالعه‌ی تحلیلی، معادلات حاکم بر حرکت

پانوشته‌ها

1. Burgers
2. Koehler
3. Eshelby
4. Frank
5. Mura
6. Kiusalaas
7. Weertman
8. Markenscoff
9. Clifton
10. Payton
11. Wu
12. Pillon
13. Wang
14. Huang
15. Pelligrini
16. Peierls
17. Nabarro
18. Deng
19. Lazar
20. Heaviside

منابع (References)

1. Callias, C. and Markenscoff, X. "Singular asymptotics of integrals and the near-field radiated from nonuniformly moving dislocations", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **102**(3), pp. 273-285 (1988).
2. Cai, W., Arsenlis, A., Weinberger, C. R., and et al. "A non-singular continuum theory of dislocations", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **54**(3), pp. 561-587 (2006).
3. Burgers, J.M. "Some considerations on the fields of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice I, II", *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, **42**, pp. 293-324 pp. 378-399 (1939).
4. Koehler, J. "On the dislocation theory of plastic deformation", *Physical Review*, **60**(5), p. 397 (1941).
5. Eshelby, J.D. "Uniformly moving dislocations", *Proceedings of the Physical Society. Section A*, **62**(5), p. 307 (1949).
6. Frank, F.C. "On the equations of motion of crystal dislocations", *Proceedings of the Physical Society. Section A*, **62**(2), p. 131 (1949).
7. Eshelby, J.D. "The equation of motion of a dislocation", *Physical Review*, **90**(2), p. 248 (1953).
8. Mura, T. "Continuous distribution of moving dislocations", *Philosophical Magazine*, **8**(89), pp. 843-857 (1963).
9. Kiusalaas, J. and Mura, T. "On the elastic field around an edge dislocation with application to dislocation vibration", *Philosophical Magazine*, **9**(97), pp. 1-7 (1964).
10. Weertman, J. "Uniformly moving transonic and supersonic dislocations", *Journal of Applied Physics*, **38**(13), pp. 5293-5301 (1967).
11. Markenscoff, X. "The transient motion of a nonuniformly moving dislocation", *Journal of Elasticity*, **10**(2), pp. 193-201 (1980).
12. Markenscoff, X. and Clifton, R.J. "The nonuniformly moving edge dislocation", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **29**(3), pp. 253-262 (1981).
13. Payton, R.G. "Stresses in a constrained transversely isotropic elastic solid caused by a moving dislocation", *Acta Mechanica*, **74**(1-4), pp. 35-49 (1988).
14. Wu, K.C. "Transient motion due to a moving dislocation in a general anisotropic solid", *Acta Mechanica*, **158**(1-2), pp. 85-96 (2002).
15. Pillon, L., Denoual, C. and Pellegrini, Y. P. "Equation of motion for dislocations with inertial effects", *Physical Review B*, **76**(22), p. 224105 (2007).

16. Wang, B.L., Zhang, H.Y. and Niraula, O.P. "A moving screw dislocation in transversely isotropic magneto-electroelastic materials", *Philosophical Magazine Letters*, **88**(3), pp. 153-158 (2008).
17. Huang, S. and Markenscoff, X. "Dislocations accelerating through the shear-wave speed barrier and effect of the acceleration on the mach front curvature", *International Journal of Engineering Science*, **49**(12), pp. 1461-1469 (2011).
18. Weertman, J. "The problem of a moving subsonic edge dislocation near an interface solved with only discrete image dislocations", *Philosophical Magazine*, **91**(3), 373-388 (2011).
19. Pellegrini, Y.P. "Dynamic peierls-nabarro equations for elastically isotropic crystals", *Physical Review B*, **81**(2), p. 024101 (2010).
20. Pellegrini, Y.P. "Screw and edge dislocations with time-dependent core width: from dynamical core equations to an equation of motion", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **60**(2), pp. 227-249 (2012).
21. Huang, S.R. and Deng, J.P. "Wave front analysis of a supersonically moving edge dislocation", *Advanced Materials Research*, **538**, pp. 2102-2108 (2012).
22. Lazar, M. and Pellegrini, Y.P. "Distributional and regularized radiation fields of non-uniformly moving straight dislocations, and elastodynamic Tamm problem", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **96**, pp. 632-659 (2016).
23. Pellegrini, Y.P. "Causal stroh formalism for uniformly-moving dislocations in anisotropic media: somigliana dislocations and mach cones", *Wave Motion*, **68**, pp. 128-148 (2017).
24. Delfani, M.R. and Tavakol, E. "Uniformly moving screw dislocation in strain gradient elasticity", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **73**, pp. 349-355 (2019).