

توابع پتانسیل تغییر مکان برای مسائل الاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی بر اساس تئوری گرادیان کرنش غیرمحلّی

بروانه ناطقی بابگی (دانشجوی دکتری)

بهرام نوائی نیا* (استاد)

دانشکده‌ی هندی‌س، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

مرتضی اسکندری قادی (استاد)

دانشکده‌ی هندی‌س، عمران، دانشگاه تهران

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۴۰۰ (دوره ۲ - ۳۷، شماره ۱/۴، ص. ۵۷-۶۷) (پژوهشی)

هدف از پژوهش حاضر، معرفی توابع پتانسیل تغییر مکان جدید با استفاده از تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنش غیرمحلّی برای حل مسائل الاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی همگن است. بدین منظور ابتدا معادلات حرکت سه‌بعدی برای محیط همسانگرد جانبی همگن با استفاده از تئوری وابسته به ابعاد گرادیان کرنش غیرمحلّی محاسبه شده است. سپس با استفاده از یک روش سیستماتیک، توابع پتانسیل تغییر مکان کامل برای حل مسائل الاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی همگن ارائه شده است. توابع پتانسیل مذکور برای مستقل سازی معادلات حرکت حاکم تئوری گرادیان کرنش غیرمحلّی برای محیط همسانگرد جانبی به کار می‌روند. توابع پتانسیل به دست آمده شامل دو تابع اسکالر هستند، که دو معادله‌ی دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی ۸ و ۴ را ارضا می‌کنند. به علاوه، توابع پتانسیل برای دو تئوری گرادیان کرنش و تئوری غیرمحلّی اریکن نیز به طور جداگانه ارائه شده است. در نهایت نیز روابط توابع پتانسیل برای حالت ساده شده‌ی محیط همسانگرد ارائه شده است.

واژگان کلیدی: محیط همسانگرد جانبی، توابع پتانسیل تغییر مکان، تئوری گرادیان کرنش غیرمحلّی، مسائل الاستودینامیک.

۱. مقدمه

فناوری نانو در بسیاری از زمینه‌ها، از جمله: صنعت، داروسازی، عمران، کشاورزی، پایداری منابع، هوافضا، امنیت ملی و الکترونیک، حوزه‌ی جدیدی را برای پژوهش و توسعه گشوده است. با کاهش ابعاد سازه‌ها، آثار اندازه در مقیاس کوچک و همچنین نیروهای بین مولکولی بسیار تأثیرگذار می‌شود، به طوری که خواص مواد، از جمله: مشخصات مکانیکی، حرارتی، هدایت الکتریکی و سایر موارد شناخته شده در مقیاس نانو دچار تغییرات چشمگیری می‌شود.^[۱] برای مطالعه‌ی چگونگی تأثیر اندازه‌ی کوچک در رفتار سازه‌ها، پژوهشگران از روش‌های مختلفی، مانند: روش‌های آزمایشگاهی^۱، شبیه‌سازی دینامیک مولکولی^۲ و مکانیک محیط پیوسته^۳ بهره برده‌اند. روش‌های آزمایشگاهی به دلیل استفاده از ابزارهای خاص و پیچیده و نیز شرایط سخت کنترل آزمایش در مقیاس نانو و روش شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به دلیل محاسبات بسیار پیچیده و نیاز به ابزارهای محاسباتی خاص، علی‌رغم داشتن پیش‌بینی‌های دقیق، بسیار پرهزینه و زمان‌بر هستند. از این رو، روش‌های مکانیک

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۹/۱۰/۲۷، اصلاحیه ۱۴۰۰/۲/۱۸، پذیرش ۱۴۰۰/۳/۲.

DOI:10.24200/J30.2021.57405.2908

p.nateghi2@stu.nit.ac.ir
navayi@nit.ac.ir
ghadi@ut.ac.ir

محیط پیوسته می‌توانند جایگزین مناسبی برای روش‌های مذکور باشند.^[۲] اما روش مکانیک محیط پیوسته‌ی کلاسیک نیز به دلیل لحاظ نکردن آثار ابعاد، آثار سطح و همچنین نیروهای بین مولکولی در بررسی دقیق محیط نانو ناقص است و نیاز به اصلاح دارد. آثار اندازه در اثر تداخل دو مقیاس طول مشخص داخلی، نظیر فاصله‌ی میان ذرات و طول مشخص خارجی، نظیر طول ترک بروز پیدا می‌کند. برای برطرف کردن نقص اخیر تئوری کلاسیک مکانیک محیط پیوسته، روش‌های ارتقاء یافته‌ی محیط پیوسته‌ی موسوم به روش‌های وابسته به ابعاد یا روش‌های محیط پیوسته‌ی غیرکلاسیک توسط پژوهشگران این عرصه ارائه شده‌اند.^[۳] اولین مطالعات انجام شده در زمینه‌ی تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته‌ی غیرکلاسیک به مطالعات پیولا^۴ در قرن نوزدهم و برادران کاسرات^۵ در اوایل قرن بیستم بر می‌گردد.^[۴] به طور کلی، تئوری‌های غیرکلاسیک را می‌توان به سه گروه مختلف، شامل: تئوری‌های گرادیان کرنش، تئوری‌های میکرو پیوسته^۶، و تئوری‌های کشسانی غیرمحلّی تقسیم‌بندی کرد، به طوری که گروه گرادیان کرنش از تئوری زوج تنش، گرادیان کرنش مرتبه‌ی اول و دوم، تئوری زوج تنش اصلاح شده و تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده تشکیل شده است. در این گروه، کرنش و گرادیان کرنش در انرژی کرنشی در نظر گرفته

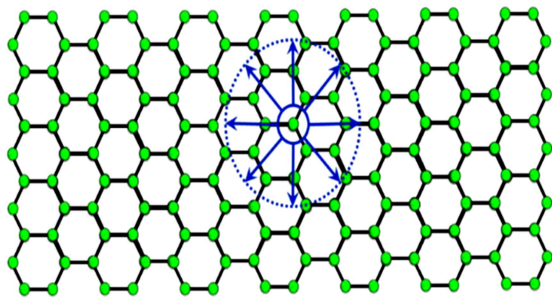
می‌شود، بنابراین اثر اندازه به وسیله پارامترهای طول مشخص ماده وارد محاسبات می‌شوند. در تئوری زوج تنش، فقط گرادیان بردار چرخش در انرژی کرنشی در نظر گرفته می‌شود و به همین دلیل فقط به دو پارامتر طول مشخص احتیاج است. تئوری زوج تنش اصلاح شده، که توسط یانگ^۷ و همکاران (۲۰۰۲)^[۵] ارائه شده است، با معرفی یک شرط تعادل اضافی برای ممان تنش زوج و در نظر گرفتن تانسور زوج تنش به صورت متقارن، تعداد پارامترهای طول مشخص را از ۲ به ۱ کاهش داد. اولین تئوری گرادیان کرنش خطی فقط با در نظر گرفتن گرادیان اول کرنش‌ها توسط میندلین^۸ (۱۹۶۴)^[۶] ارائه شد. یک سال بعد، میندلین (۱۹۶۵)^[۷] تئوری گرادیان دوم کرنش را که به عنوان کلی‌ترین شکل تئوری گرادیان کرنش شناخته می‌شود، با در نظر گرفتن هر دو مرتبه‌ی اول و دوم گرادیان کرنش مطرح کرد. تئوری گرادیان دوم کرنش علاوه بر ثوابت لامه، ۱۶ ثابت کشسان دیگر نیز دارد، که تعیین آنها از لحاظ تحلیلی و آزمایشگاهی امری دشوار به نظر می‌رسد. معرفی ۱۶ ثابت جدید اشاره شده به همراه لحاظ کردن درجه‌های بالای گرادیان کرنش، باعث پیچیدگی معادلات دیفرانسیل حاکم در تئوری گرادیان کرنش شده است. به طور هم‌زمان، تئوری‌های میکروپیوسته، شامل: تئوری میکروپولار^۹، میکرواسترچ^{۱۰} و میکرومورفیک^{۱۱} نیز توسط ارینگن^{۱۲}، توسه^{۱۳} توسعه یافتند. تئوری میکروپولار، که در ابتدا توسط برادران کاسرات مطرح و سپس توسط ارینگن کامل شد، ساده‌ترین تئوری از بین تئوری‌های گروه اخیر است؛ در حالی که تئوری میکرومورفیک، کلی‌ترین حالت در بین آنهاست. در تئوری‌های میکروپیوسته فرض می‌شود که هر ذره، ۶ درجه‌ی آزادی مستقل شامل ۳ درجه‌ی آزادی دورانی و ۳ درجه‌ی آزادی انتقالی است به طوری که هر ذره می‌تواند به طور مستقل بچرخد و تغییر شکل دهد. جزئیات بیشتر در مورد این گروه از تئوری‌های غیرکلاسیک محیط پیوسته به همراه کاربردهای آنها را می‌توان در برخی مطالعات انجام شده مشاهده کرد.^[۱۴-۱۶] گروه سوم یا تئوری‌های کشسانی غیرمحملی نیز تقریباً هم‌زمان با دیگر تئوری‌ها مطرح شدند. در ابتدا کرویز^{۱۷} (۱۹۶۷)^[۱۵] تئوری کشسانی غیرمحملی را ارائه داد و پس از آن تئوری اخیر توسط ارینگن (۱۹۶۶ و ۱۹۷۲)^[۱۶، ۱۷] بهبود پیدا کرد، که بر طبق آن تنش در یک نقطه‌ی مرجع با یک وابستگی پیوسته به کرنش تمام نقاط مرتبط می‌شود و بنابراین اثر اندازه توسط یک پارامتر غیرمستقیم در معادلات ساختاری در نظر گرفته می‌شود. این تئوری در ابتدا به شکل انتگرالی تعریف شده است؛ ولی در ادامه، با در نظر گرفتن یک تابع مرکزی خاص توسط ارینگن به صورت دیفرانسیلی تبدیل شد. مدل ارینگن (۱۹۷۲)^[۱۷] به دلیل سادگی در انجام محاسبات در مقایسه با مدل انتگرالی، به طور گسترده‌ی بی‌شمار برای تحلیل نانو سازه‌ها استفاده شده است. علاوه بر این، اخیراً سه گروه از روش‌های غیرکلاسیک، که به صورت ترکیبی از تئوری کشسانی غیرمحملی و تئوری گرادیان کرنش نوشته می‌شود، نیز توسط لیم^{۱۴} و همکاران (۲۰۱۵)^[۱۸] مطرح شده است. همان‌طور که پیشتر مطرح شد، هم‌آثار غیرمحملی و هم‌کرنش‌های مرتبه‌ی بالاتر در ابعاد نانو اهمیت ویژه‌ی دارند. تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی با داشتن هر دو پارامتر غیرمحملی و طول مشخص به خوبی این موارد را مدل‌سازی می‌کند و بیشترین هم‌خوانی را با نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی دارد.^[۱۸]

تاکنون تعداد زیادی از مدل‌های وابسته به اندازه بر اساس ترکیب تئوری‌های غیرکلاسیک با تئوری‌های مختلف تیر و ورق به جهت تحلیل محیط‌های یک و دو بعدی ارائه شده‌اند.^[۱۹-۲۵] از آن‌جایی که وارد شدن پارامتر وابسته به اندازه و همچنین غیرهمسانگرد بودن محیط بر پیچیدگی مسائل می‌افزاید، به بررسی تحلیلی مسائل الاستودینامیک محیط‌های غیرهمسانگرد بر اساس تئوری‌های غیرکلاسیک به صورت سه‌بعدی کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

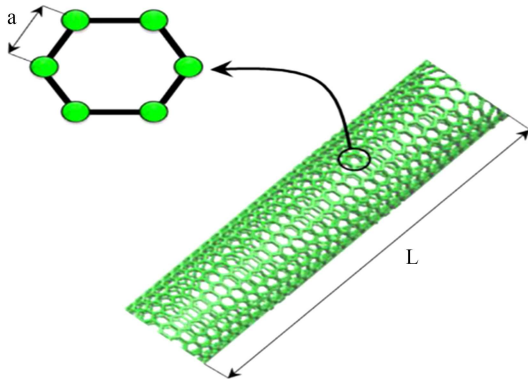
استفاده از توابع پتانسیل، روشی کارا و مؤثر در تحلیل مسائل کشسانی است، که در این میان توابع پتانسیل تغییرمکان به دلیل تعداد کمتر معادلات نسبت به توابع پتانسیل تنش کاربرد بیشتری یافته است. مجموعه‌ی شناخته شده‌ی بی‌شمار از توابع پتانسیل تغییرمکان در محیط ماکرو، عبارت‌اند از: بوسینسک^{۱۵}، پاپکویچ - نوبر^{۱۶}، گالرکین^{۱۷} و دیگر توابع شناخته شده‌ی تغییرمکان، که با هم رابطه دارند و از یکدیگر قابل حصول هستند.^[۱۴] برای اولین بار، شی و وانگ^{۱۸} (۱۹۹۷)^[۲۷] از توابع پتانسیل هارمونیک سه‌بعدی پاپکویچ - نوبر برای تحلیل ورق‌ها استفاده کردند. کانگ^{۱۹} (۱۹۵۵)^[۲۸] در پژوهشی نشان داد که حل لاو^{۲۰} ارتقاء یافته به ازاء هر میدان تغییرمکان برای کلیه‌ی مسائل می‌تواند معرفی شود و لذا کلی‌تر از حل لاو برای مسائل غیرمتقارن محوری است که فقط می‌تواند میدان‌های تغییرمکان را با چرخش آزاد حول محور ضخامت معرفی کند.

از اولین توابع پتانسیلی که به بررسی محیط همسانگرد جانبی در حالت تقارن محوری و بدون پیچش پرداخته است، تابع پتانسیل اسکالر لکسینسکی^{۲۱} است، که معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر آن، یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی چهار و تعمیم‌یافته‌ی رابطه‌ی کرنشی لاو است.^[۲۹] توابع پتانسیل اسکندری قادی، که با تعمیم توابع پتانسیل حاکم بر محیط‌های همسانگرد جانبی از حالت استاتیکی به دینامیکی ارائه شده است، نیز به طور گسترده برای تحلیل محیط‌های نیمه‌بی‌نهایت مطالعه شده است.^[۳۰-۳۲] علاوه بر این، توابع پتانسیل اسکندری قادی، برای تحلیل خمش، کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌های همسانگرد و همسانگرد جانبی استفاده شده‌اند.^[۳۳-۳۶] ناطقی و همکاران (۲۰۱۷)^[۳۷] نیز تحلیل دینامیکی ورق‌های مستطیلی ضخیم تحت اثر بار متحرک را با استفاده از تابع پتانسیل اسکندری قادی به صورت موفقیت‌آمیزی مطالعه کرده‌اند. امیری و اسکندری قادی (۲۰۱۴)^[۳۸] نیز تابع پتانسیل مربوط به محیط‌های همسانگرد جانبی ناهمگن را ارائه و به بررسی مسئله‌ی انتشار امواج در محیط نیمه بی‌نهایت با استفاده از آن پرداخته‌اند. تابع پتانسیل اخیر برای تحلیل خمشی ورق‌های ضخیم همسانگرد ناهمگن توسط وفاخواه و نوائی‌نیا (۲۰۱۹)^[۳۹] استفاده شده و نتایج دقیقی را ارائه کرده‌اند. استفاده از روش توابع پتانسیل علاوه بر مقیاس ماکرو برای تحلیل نانورق‌ها نیز توسط عبدالله‌زاده شهر بابکی (۲۰۱۸)^[۴۰] استفاده شده است. ایشان با بهره‌گیری از تابع پتانسیل هلمهولتز^{۲۲} و تئوری ارتجاعی غیرمحملی، معادلات حاکم بر ارتعاش نانو ورق‌ها را محاسبه و آن را برای شرایط مرزی متفاوت به روش گالرکین حل کرده‌اند. علاوه بر این، یخکشی و نوائی‌نیا (۲۰۱۹)^[۴۱] در پژوهشی با استفاده از تابع پتانسیل پیشنهادی خود به تحلیل خمش میکروورق‌ها با استفاده از تئوری زوج تنش اصلاح شده پرداخته‌اند.

با توجه به اطلاعات موجود، تاکنون تابع پتانسیل تغییرمکان بر اساس تئوری‌های محیط پیوسته‌ی غیرکلاسیک برای محیط همسانگرد جانبی ارائه نشده است. از بین تئوری‌های غیرکلاسیک موجود، تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی به دلیل جبران کمبودهای موجود در تئوری کشسانی غیرمحملی، از قبیل از بین رفتن اثر غیرمحملی بعد از یک طول مشخص و در نظر گرفتن هم‌زمان آثار نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی در مقیاس کوچک در پژوهش حاضر استفاده شده است. در پژوهشی نشان داده شده است که یکی از مهم‌ترین خصوصیات مکانیکی محیط نانو، غیرهمسانگرد بودن آن است،^[۴۲] از این رو در پژوهش حاضر محیط همسانگرد جانبی به عنوان یکی از کاربردی‌ترین نمونه‌های محیط غیرهمسانگرد مطالعه شده است. ویژگی مهم پژوهش حاضر، ارائه‌ی میدان جابه‌جایی بر حسب توابع پتانسیل پیشنهادی مبتنی بر تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی برای حل مسائل الاستودینامیک سه‌بعدی در محیط همسانگرد جانبی است.



شکل ۱. وابستگی تنش در یک نقطه‌ی خاص به کرنش در نقاط دور دست. [۴۳]



شکل ۲. طول مشخص داخلی و خارجی در یک نانوتیوب. [۴۳]

مثال، برای طول مشخص داخلی می‌توان متغیرهایی نظیر: پارامتر شبکه، اندازه ذره، و فاصله‌ی بین پیوندهای کووالانسی را در نظر گرفت، در حالی که مثال‌های طول مشخص خارجی، شامل: طول ترک، طول موج و ابعاد نانو ساختار هستند. طول مشخص داخلی و خارجی برای یک نانوتیوب در شکل ۲ مشاهده می‌شود. [۴۳]

اگر پارامتر غیرمحملی φ به سمت صفر میل کند، تابع مرکزی باید به تابع دلتای دیراک تبدیل شود و روابط مکانیک محیط پیوسته‌ی کلاسیک به دست می‌آید. همچنین، اگر φ به سمت ۱ میل کند، تئوری غیرمحملی، روش دینامیک شبکه‌ی اتمی را تقریب می‌زند. چند تابع مرکزی مناسب برای در نظر گرفتن آثار مقیاس کوچک توسط ارینگن پیشنهاد شده است، که متداول‌ترین آنها به شکل رابطه‌ی ۶ بیان شده است.

$$H(|\mathbf{x}|, \varphi) = \left(2\pi l^2 \varphi^2\right)^{-1} K_0 \left(\frac{\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}}{L\varphi}\right) \quad (6)$$

که در آن، K_0 تابع بسل اصلاح شده است. از آنجایی که، معادله‌ی حاکم بر کشسانی غیرمحملی رابطه‌ی ۱، به صورت یک رابطه‌ی دیفرانسیلی - انتگرالی بیان می‌شود، حل آن به صورت کلی بسیار مشکل است. برای برطرف کردن این مشکل با اعمال یک اپراتور دیفرانسیل خطی ℓ به صورت رابطه‌ی ۷ بر رابطه‌ی ۲، در نهایت رابطه‌ی ساختاری غیرمحملی ارینگن به صورت رابطه‌ی ۸ ارائه می‌شود: [۱۷]

$$\ell(H(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varphi)) = \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \quad (7)$$

$$\left[1 - (e \cdot a)^2 \nabla^2\right] \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (8)$$

که در آنها، پارامترهای δ و ∇^2 به ترتیب معرف تابع دلتای دیراک^{۲۴} و اپراتور لاپلاس^{۲۵} هستند. اپراتور لاپلاس برای محیط سه بعدی در دستگاه مختصات دکارتی به شکل

۲. مفاهیم تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی

همان‌طور که در بخش مقدمه عنوان شده است، تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی ترکیبی از تئوری غیرمحملی ارینگن و تئوری گرادیان کرنش است. از این جهت، در بخش کنونی، ابتدا به طور جداگانه مفاهیم هر یک از تئوری‌های مذکور، ارائه و در نهایت نیز نحوه‌ی ترکیب آنها و مفاهیم تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی بیان شده است.

۱.۲. تئوری کشسانی غیرمحملی ارینگن

تئوری کشسانی غیرمحملی ارینگن، تأثیر میدان کرنش دور دست را که به عنوان آثار غیرمحملی شناخته می‌شوند، مطابق شکل ۱ در نظر می‌گیرد.

طبق تئوری کشسانی غیرمحملی، میدان تنش در یک نقطه‌ی هدف، نه فقط به کرنش کشسان همان نقطه بلکه به کرنش کشسان نقاط دیگر محیط نیز وابسته است. زمانی که در تئوری کشسانی غیرمحملی از آثار کرنش سایر نقاط صرف نظر شود، روابط تئوری کلاسیک محیط پیوسته به دست می‌آیند. کلی‌ترین شکل رابطه‌ی ساختاری برای تئوری کشسانی غیرمحملی، شامل یک انتگرال بر روی کل محیط است. انتگرال اخیر شامل یک رابطه‌ی مرکزی^{۲۳} است، که آثار کرنش‌ها در نقاط مختلف را بر روی میدان تنش در مکان مشخص نشان می‌دهد و مدول غیرمحملی نامیده می‌شود. از نظر ریاضی، زمانی که مدول غیرمحملی به صورت تابع دلتای دیراک فرض شود، تئوری کلاسیک محیط پیوسته حاصل می‌شود. در تئوری اخیر، آثار مقیاس کوچک با لحاظ کردن ابعاد داخلی به عنوان یک پارامتر مشخص ماده، که امکان کار با متغیرهای غیرمحملی را می‌دهد، بیان می‌شود. به منظور توسعه‌ی مدل‌های غیرمحملی برای مسائل مختلف، باید هسته‌های غیرمحملی مناسب انتخاب شوند. به طور خلاصه، تئوری کشسانی غیرمحملی، توانایی حل سازه‌های بسیاری در ابعاد نانو، بدون نیاز به حل تعداد زیادی معادله‌ی دیفرانسیل را دارد. [۲]

• مدل ریاضی تئوری کشسانی غیرمحملی

مفاهیم پایه‌ی کشسانی غیرمحملی برای یک محیط کشسان خطی و همگن در غیاب نیروهای حجمی به شکل روابط ۱ الی ۴ تعریف می‌شوند:

$$\sigma_{ij,i} - \rho \ddot{u}_j = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}} H(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varphi) \sigma_{ij}^e(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}^e(\mathbf{x}') = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}'), \quad (3)$$

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') = \frac{1}{\varphi} (u_{k,l}(\mathbf{x}') + u_{l,k}(\mathbf{x}')). \quad (4)$$

به طوری که پارامترهای C_{ijkl} و ε_{kl} ، σ_{ij}^e ، σ_{ij} ، ρ ، \ddot{u}_j ، u_j به ترتیب نشان‌دهنده‌ی بردار تغییر مکان، شتاب، چگالی، تنش غیرمحملی، تنش کلاسیک، کرنش کلاسیک و تانسور مرتبه‌ی چهارم کشسانی هستند. تابع $H(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varphi)$ مدول غیرمحملی یا رابطه‌ی مرکزی انتگرال (با بُعد معکوس مکعب طول) و φ پارامتر غیرمحملی بدون بُعد است و مطابق رابطه‌ی ۵ تعریف می‌شود: [۱۷، ۱۶، ۱۷]

$$\varphi = \frac{e \cdot a}{L} \quad (5)$$

که در آن، a و L به ترتیب ثابت غیرمحملی (بی‌بُعد) متناسب با هر ماده، طول مشخص داخلی (بُعد طول) و طول مشخص خارجی (بُعد طول) هستند. به عنوان

رابطه‌ی ۹ در نظر گرفته می‌شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (9)$$

به دست آمده می‌نویسند، با استفاده از روابط ۱۳ الی ۱۵ تعیین می‌شوند:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{ij,k} = \frac{1}{2} (u_{i,jk} + u_{j,ik}) \quad (14)$$

$$\mu_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = l^2 (\lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij})_{,k} = l^2 \sigma_{ij,k} = \mu_{jki} \quad (15)$$

با استفاده از اصل انرژی کمیته‌ی پتانسیل کل، روابط تعادل برای این تئوری به شکل رابطه‌ی ۱۶ به دست می‌آید: [۴۶]

$$t_{ij,i} + F_j = \rho \ddot{u}_j \quad (16)$$

که در آن، F_j نیروی حجمی و t_{ij} برابر تانسور تنش مؤثر است، که برابر تفاضل تنش کوشی و گرادیان تنش دوگانه است و از رابطه‌ی ۱۷ به دست می‌آید:

$$t_{ij} = \sigma_{ij} - \mu_{ijk,k} = \sigma_{ij} - l^2 \sigma_{ij,kk} \quad (17)$$

۳.۲. تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی

برای غلبه بر کمبودهای موجود در تئوری کشسانی غیرمحملی، نظیر: از بین رفتن اثر غیرمحملی بعد از یک طول مشخص در حدود 20° نانومتر، لیم 29° و همکاران (۲۰۱۵) [۱۸] با استفاده از دو تابع مرکزی، تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی را معرفی کردند. تئوری جدید ذکر شده، فرضیات هر دو تئوری گرادیان کرنش و کشسانی غیرمحملی را در نظر می‌گیرد. با این حال، به دلیل جلوگیری از پیچیده و طولانی شدن محاسبات در تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی، اصلاحات گرادیان کرنش نیز لحاظ شده است.

• مدل ریاضی تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی

روابط اساسی تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی به شکل رابطه‌ی ۱۸ الی ۲۱ در نظر گرفته شده‌اند: [۱۸]

$$t_{ij,i} - \rho (\ddot{u}_j - b_j) = 0, \quad (18)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}} H_0(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varphi_0) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'), \quad (19)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) = l^2 \int_{\mathcal{V}} H_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varphi_1) C_{ijkl} \nabla \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'), \quad (20)$$

$$t_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \nabla \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}). \quad (21)$$

که در آنها، $\sigma_{ij}^{(1)}$ ، H_1 و φ_1 به ترتیب تنش دوگانه‌ی غیرمحملی، تابع مرکزی و پارامتر غیرمحملی مرتبه‌ی اول و H_0 و φ_0 به ترتیب تنش کوشی غیرمحملی، تابع مرکزی و پارامتر غیرمحملی مرتبه‌ی صفر هستند. در تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی، رابطه‌ی تنش مؤثر برابر تفاضل بین تنش کوشی غیرمحملی و گرادیان تنش دوگانه‌ی غیرمحملی است، که به شکل معادله‌ی ۲۱ تعریف شده است.

با در نظر گرفتن توابع مرکزی به صورت تابع پیشنهادی اربنگن و اعمال دو اپراتور دیفرانسیل خطی به صورت روابط ۲۲ و ۲۳ بر رابطه‌های ۱۹ و ۲۰، در نهایت

۲.۲. تئوری گرادیان کرنش

در شاخص‌ترین تئوری خطی گرادیان کرنش، تئوری گرادیان دوم کرنش، میندلین (۱۹۶۵) [۲] معادلات حرکت مصالح کشسان خطی را محاسبه کرد، که شامل ۱۶ پارامتر وابسته به طول به همراه ۲ ثابت لانه بوده است. بر اساس نظریه‌ی مذکور، چگالی انرژی کرنشی ماده علاوه بر کرنش، تابعی از گرادیان اول و دوم کرنش نیز است. همچنین معادله‌ی که در نظریه‌ی اخیر برای تعادل یک محیط مادی به دست می‌آید شامل پارامترهایی از بُعد طول است، که آنها را طول مشخص می‌نامند. می‌توان نشان داد که وجود چنین پارامترهایی سبب می‌شود که آثار اندازه در مسائلی که ابعاد آن با ابعاد طول مشخص ماده قابل مقایسه است، به خوبی لحاظ شود. تئوری گرادیان دوم کرنش علاوه بر ثوابت لانه، دارای ۱۶ ثابت کشسان دیگر است، که تعیین آنها از لحاظ تحلیلی و آزمایشگاهی امری دشوار به نظر می‌رسد. معرفی ۱۶ ثابت جدید مذکور به همراه لحاظ کردن درجه‌های بالای گرادیان کرنش باعث پیچیدگی معادلات دیفرانسیل حاکم بر تئوری گرادیان کرنش دوم شده است. در نتیجه، در ادامه‌ی مطالعات در این زمینه پژوهشگران سعی در کاهش ثوابت ذکر شده با راهکارهای مختلف کرده‌اند. از جمله، میندلین و اشل 26 (۱۹۶۸) [۲۴] تئوری گرادیان مرتبه‌ی اول کرنش را با معرفی ۵ ثابت جدید به همراه ضرایب لانه ارائه کردند. همچنین، کسل 27 (۱۹۷۲) [۲۵] یک تئوری گرادیان کرنش دیگر پیشنهاد کرده است که دارای معادلات کشسانی با ۴ ثابت کشسان، شامل: ۲ ثابت لانه و ۲ پارامتر مقیاس طول بوده است. آلتان و آیفانتیس 28 (۱۹۹۷) [۲۶] نیز حالت خاصی از تئوری گرادیان کرنش میندلین (تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده) را فقط با معرفی یک طول مشخص ارائه داده‌اند.

• مدل ریاضی تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده

در تئوری گرادیان کرنشی ارائه شده توسط آلتان و آیفانتیس (۱۹۹۷) [۲۶]، تابع چگالی انرژی کرنشی w ، برای یک ماده‌ی همسانگرد به شرح رابطه‌ی ۱۰ ارائه شده است:

$$w = w(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}) \\ = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + l^2 \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii,k} \varepsilon_{jj,k} + \mu \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{ij,k} \right) \quad (10)$$

که در آن، پارامترهای λ و μ معرف ضرایب لانه و ۱ پارامتر طول مشخص نانو ساختار با بُعد طول خواهد بود. رابطه‌ی کرنش به صورت کلاسیک از رابطه‌ی ۱۱ به دست می‌آید: [۲۶]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (11)$$

در نتیجه، رابطه‌ی انرژی U برای حجم تغییر شکل یافته v به شکل رابطه‌ی ۱۲ نوشته می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} w(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}) dv = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \varepsilon_{ij,k}) dv \quad (12)$$

که در آن، σ_{ij} ، μ_{ijk} و $\varepsilon_{ij,k}$ به ترتیب تانسور تنش کوشی یا تنش کلاسیک، تنش دوگانه یا تنش غیرکلاسیک و گرادیان کرنش هستند. سه پارامتر مذکور از طریق روابط

با در نظر گرفتن رفتار خطی برای محیط، رابطه‌ی کرنش‌ها بر اساس میدان تغییرمکان به شکل رابطه‌ی ۳۰ بیان می‌شود: [۵۱]

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{\gamma} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (30)$$

برای محاسبه‌ی معادلات حاکم بر حرکت بر حسب میدان تغییرمکان، اپراتور ∇_e^T معادل عبارت $[\mathbf{1} - (ea)^T \nabla^T]$ بر معادله‌ی ۱۸ اعمال و نتایج به شکل رابطه‌ی ۳۱ بیان می‌شود:

$$\nabla_e^T t_{ij,i} = \nabla_e^T \rho (\ddot{u}_j - b_j) \quad (31)$$

معادله‌ی دیفرانسیل رابطه‌ی ۳۱ به صورت روابط ۳۲ الی ۳۴ بسط داده می‌شوند:

$$\nabla_e^T \left[\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} \right] = \nabla_e^T \rho (\ddot{u}_1 - b_1) \quad (32)$$

$$\nabla_e^T \left[\frac{\partial t_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{23}}{\partial x_3} \right] = \nabla_e^T \rho (\ddot{u}_2 - b_2) \quad (33)$$

$$\nabla_e^T \left[\frac{\partial t_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{33}}{\partial x_3} \right] = \nabla_e^T \rho (\ddot{u}_3 - b_3) \quad (34)$$

با استفاده از خاصیت جابه‌جایی در مشتق‌گیری و جایگذاری رابطه‌ی ساختاری بین تنش و کرنش رابطه‌ی ۲۷ و کرنش میدان تغییرمکان رابطه‌ی ۳۰، در سه معادله‌ی اخیر، معادلات حرکت بر حسب میدان تغییرمکان به شکل روابط ۳۵ الی ۳۷ حاصل می‌شوند:

$$\nabla_i^T \left[\begin{array}{l} C_{1111} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{1122} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ + C_{1133} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ + C_{1212} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ + C_{1222} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \end{array} \right] = \nabla_e^T \rho \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - b_1 \right) \quad (35)$$

$$\nabla_i^T \left[\begin{array}{l} C_{1111} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + C_{1122} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ + C_{1133} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ + C_{1212} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) \\ + C_{1222} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \end{array} \right] = \nabla_e^T \rho \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - b_2 \right) \quad (36)$$

$$\nabla_i^T \left[\begin{array}{l} C_{1122} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{1133} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ + C_{1212} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ + C_{1222} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right) \\ + C_{1333} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) \end{array} \right] = \nabla_e^T \rho \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - b_2 \right) \quad (37)$$

که در آنها، پارامتر ∇_i^T با $[\mathbf{1} - l^T \nabla^T]$ معادل است، با در نظر گرفتن پارامترهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ و $\bar{\rho}$ که نرمال شده‌ی ضرایب کشسان و چگالی نسبت به ضریب

روابط ساختاری غیرمحملی به صورت رابطه‌های ۲۴ و ۲۵ ارائه می‌شود: [۱۸]

$$l_0 (H_0 (|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varphi_0)) = \delta (|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \quad (22)$$

$$l_1 (H_1 (|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varphi_1)) = \delta (|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \quad (23)$$

$$[\mathbf{1} - (e_0 a)^T \nabla^T] \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (24)$$

$$[\mathbf{1} - (e_1 a)^T \nabla^T] \sigma_{ij}^{(1)} = l^T C_{ijkl} \nabla \varepsilon_{kl} \quad (25)$$

با اعمال اپراتورهای ۲۴ و ۲۵ بر معادله‌ی ۲۱، روابط ساختاری برای تنش کل بر اساس تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی به صورت رابطه‌ی ۲۶ به دست می‌آید:

$$[\mathbf{1} - (e_0 a)^T \nabla^T] [\mathbf{1} - (e_1 a)^T \nabla^T] t_{ij} = [\mathbf{1} - (e_1 a)^T \nabla^T] C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - l^T [\mathbf{1} - (e_0 a)^T \nabla^T] C_{ijkl} \nabla^T \varepsilon_{kl} \quad (26)$$

که برای ساده‌سازی رابطه‌ی ۲۶، مقادیر مدول‌های غیرمحملی مرتبه‌ی ۰ و ۱ را برابر در نظر می‌گیرند و در نهایت، رابطه‌ی ساده شده‌ی تئوری گرادیان کرنشی غیرمحملی به شکل رابطه‌ی ۲۷ به دست می‌آید:

$$[\mathbf{1} - (ea)^T \nabla^T] t_{ij} = [\mathbf{1} - l^T \nabla^T] C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (27)$$

که در آن، همانند برخی مطالعات، [۲۴، ۲۵، ۲۲] فقط از یک پارامتر طول مشخص و یک مدول غیرمحملی برای بررسی محیط نانو استفاده شده است، با وجود این‌که در نظر گرفتن چند پارامتر طول مشخص و مدول غیرمحملی به واقعیت فیزیکی محیط نانو نزدیک‌تر است، [۲۷-۵۰] ولی به دلیل سهولت در حل معادلات سه‌بعدی این فرض ساده‌شونده اعمال شده است. با فرض $e=0$ معادله‌ی ساختاری تئوری گرادیان کرنش به دست می‌آید و زمانی که $l=0$ قرار داده شود، رابطه‌ی غیرمحملی ارینگن حاصل می‌شود و در نهایت با صرف نظر از هر دو پارامتر اخیر، رابطه‌ی ساختاری تئوری کلاسیک به دست خواهد آمد.

۳. روابط الاستودینامیک بر پایه‌ی تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی برای محیط همسانگرد جانبی

با توجه به این نکته که مواد همسانگرد جانبی (دارای تقارن محوری) حالت خاصی از مواد ارتوتروپ با ۵ ضریب کشسان مستقل در تانسور تنش-کرنش هستند، ضرایب کشسان محیط همسانگرد به شکل رابطه‌ی ۲۸ هستند: [۵۱]

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2222} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (28)$$

که در آن، ضرایب $C_{1111}, C_{1122}, C_{1133}, C_{2222}, C_{1212}$ ضرایب مستقل کشسان C_{1212} و ضریب وابسته است و از رابطه‌ی ۲۹ به دست می‌آید:

$$C_{1212} = \frac{1}{\gamma} (C_{1111} - C_{1122}) \quad (29)$$

باسخ معادله‌ی دیفرانسیل رابطه‌ی ۳۹ در حالت کلی، از مجموع پاسخ‌های بخش همگن و بخش ناهمگن به دست می‌آید، که بخش همگن آن مطابق با رابطه‌ی ۴۹ است. [۵۲]

$$D\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (49)$$

اگر \mathbf{I} ماتریس واحد $adj(\mathbf{D})$ ترانهاده‌ی ماتریس کوفاکتور ماتریس \mathbf{D} باشند، آن‌گاه از جبر ماتریس‌ها رابطه‌ی ۵۰ حاصل می‌شود:

$$D adj(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{D}) \mathbf{I} \quad (50)$$

که در آن، $\det(\mathbf{D})$ دترمینان ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی است. اپراتورهای رابطه‌ی ۵۰ را می‌توان به شکل رابطه‌ی ۵۱ بر تابع برداری دلخواه و به اندازه‌ی کافی هموار \mathbf{F} اثر داد.

$$D adj(\mathbf{D}) \mathbf{F} = \det(\mathbf{D}) \mathbf{I} \mathbf{F} \quad (51)$$

و اگر بردار تغییر مکان بر حسب تابع \mathbf{F} به صورت رابطه‌ی ۵۲ در نظر گرفته شود:

$$\mathbf{w} = adj(\mathbf{D}) \mathbf{F} \quad (52)$$

آن‌گاه بر طبق رابطه‌های ۴۹ و ۵۱، برقراری رابطه‌ی ۵۳ الزامی است. [۵۲]

$$\det(\mathbf{D}) \mathbf{I} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (53)$$

با توجه به حضور ماتریس واحد در رابطه‌ی اخیر، معادلات ذکر شده مستقل هستند و از حل آنها، مؤلفه‌های تابع \mathbf{F} به دست خواهند آمد، که در این صورت با قرار دادن تابع \mathbf{F} در رابطه‌ی ۵۲، پارامترهای بردار تغییر مکان محاسبه می‌شود. برای محاسبه‌ی تابع \mathbf{F} ابتدا لازم است که دترمینان ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی محاسبه شود. می‌توان ثابت کرد که دترمینان ماتریس اپراتور \mathbf{D} بر حسب اپراتورهای موج، پارامتر غیرمحملی و طول مشخصه به شکل رابطه‌ی ۵۴ به دست خواهد آمد:

$$\det(\mathbf{D}) = \alpha_r (1 + \alpha_1) \bar{\nabla}_1^T \bar{\nabla}_1^T \bar{\nabla}_2^T \quad (54)$$

که در آن، اپراتورهای $\bar{\nabla}_1^T$ ، $\bar{\nabla}_2^T$ و $\bar{\nabla}_3^T$ مطابق با رابطه‌ی ۵۵ محاسبه شده‌اند:

$$\bar{\nabla}_i^T = \left(\nabla_{i1}^T + \frac{1}{s_i^T} \frac{\partial^T}{\partial x_i^T} \right) \nabla_i^T - \frac{1}{c_i^T} \nabla_e^T \frac{\partial^T}{\partial t^T}, \quad i = 0, 1, 2 \quad (55)$$

که در آن، پارامتر c_i^T معرف سرعت امواج برشی و حجمی و پارامتر s_i^T بیان‌گر رفتار غیرهمسانگرد محیط هستند، که بر حسب مشخصات مکانیکی محیط به صورت روابط ۵۶ و ۵۷ تعریف می‌شوند:

$$c_0^T = \frac{1}{\bar{\rho}}, \quad c_1^T = \frac{1 + \alpha_1}{\bar{\rho}}, \quad c_2^T = \frac{\alpha_r}{\bar{\rho}} \quad (56)$$

$$s_0^T = \frac{1}{\alpha_r} \quad (57)$$

پارامترهای s_1^T و s_2^T نیز ریشه‌های معادله‌ی ۵۸ هستند، که می‌توانند شامل اعداد حقیقی مثبت و یا اعداد مختلط باشند. [۲۸]

$$\alpha_r \alpha_r s^T + (\alpha_r^T - \alpha_r^T - (1 + \alpha_1) \alpha_r^T) s^T + (1 + \alpha_1) \alpha_r = 0 \quad (58)$$

به شکل روابط ۳۸ هستند و بازنویسی روابط اخیر در نهایت می‌توان ۳ معادله‌ی دیفرانسیل حرکت به دست آمده را به شکل ماتریسی به صورت رابطه‌ی ۳۹ به دست آورد:

$$\alpha_1 = \frac{C_{1111} + C_{1122}}{C_{1122}}, \quad \alpha_r = \frac{C_{2222}}{C_{1122}},$$

$$\alpha_r = \frac{C_{1122} + C_{2222}}{C_{1122}}, \quad \alpha_r = \frac{C_{2222}}{C_{1122}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{C_{1122}}. \quad (38)$$

$$D\mathbf{w} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (39)$$

که در آن، پارامترهای \mathbf{D} ، \mathbf{w} و \mathbf{b} به ترتیب ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی، بردار تغییر مکان و بردار نیروهای حجمی هستند و به شکل روابط ۴۰ الی ۴۲ تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T \quad (41)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} b_1 & \bar{\rho} b_2 & \bar{\rho} b_3 \end{bmatrix} \quad (42)$$

درایه‌های ماتریس \mathbf{D} به صورت روابط ۴۳ الی ۴۸ محاسبه شده‌اند:

$$D_{11} = \left(\nabla_{1r}^T + \alpha_1 \frac{\partial^T}{\partial x_1^T} + \alpha_r \frac{\partial^T}{\partial x_r^T} \right) \nabla_1^T - \rho \nabla_e^T \frac{\partial^T}{\partial t^T}, \quad (43)$$

$$D_{12} = D_{21} = \alpha_1 \frac{\partial^T}{\partial x_1^T \partial x_r^T} \nabla_1^T, \quad (44)$$

$$D_{22} = \left(\nabla_{2r}^T + \alpha_1 \frac{\partial^T}{\partial x_r^T} + \alpha_r \frac{\partial^T}{\partial x_r^T} \right) \nabla_2^T - \rho \nabla_e^T \frac{\partial^T}{\partial t^T}, \quad (45)$$

$$D_{13} = D_{31} = \alpha_r \frac{\partial^T}{\partial x_1^T \partial x_r^T} \nabla_1^T, \quad (46)$$

$$D_{23} = D_{32} = \alpha_r \frac{\partial^T}{\partial x_r^T \partial x_r^T} \nabla_2^T, \quad (47)$$

$$D_{33} = \left(\alpha_r \nabla_{1r}^T + \alpha_r \frac{\partial^T}{\partial x_r^T} \right) \nabla_3^T - \rho \nabla_e^T \frac{\partial^T}{\partial t^T}. \quad (48)$$

که در آنها، اپراتور لاپلاس دو بعدی در صفحه‌ی $x_1 x_2$ در نظر گرفته شده است. با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی رابطه‌ی ۳۹، مجهولات مسئله یا همان بردار تغییر مکان محاسبه می‌شوند.

۴. تابع پتانسیل

همان‌طور که در بخش‌های قبل نیز اشاره شده است، از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، تمامی مجهولات مسئله‌ی الاستودینامیک در نانو محیط همسانگرد جانبی به صورت توابعی بر حسب تغییر مکان و زمان به دست خواهند آمد. از آنجایی که حل تحلیلی این دستگاه معادلات بسیار پیچیده است، روش توابع پتانسیل و شیوه‌ی محاسبه‌ی آن در بخش حاضر ارائه شده است، تا به کمک آن معادلات مستقل و ساده‌تری به دست آید، که با حل آنها، مجهولات مسئله قابل محاسبه باشند. در نهایت نیز توابع پتانسیل مخصوص مسائل الاستودینامیک بر پایه‌ی تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی در محیط همسانگرد جانبی معرفی شده‌اند.

با توجه به تابع پیشنهادی اخیر، مجهولات میدان تغییرمکان بر حسب تابع پتانسیل به شکل روابط ۶۹ محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r} \nabla_l^r F, \\ u_r = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r \partial x_r} \nabla_l^r F, \\ u_r = \left((1 + \alpha_1) \nabla_{1r}^r + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} F. \end{cases} \quad (69)$$

با استفاده از روابط اخیر، معادلات حاکم بر تابع پتانسیل F به معادله دیفرانسیل پاره‌یی مرتبه‌ی ۸ کاهش پیدا می‌کند و به صورت رابطه‌ی ۷۰ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \alpha_r (1 + \alpha_1) \left(\left(\nabla_{1r}^r + \frac{1}{s_r^r} \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \frac{1}{c_r^r} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) \\ \left(\left(\nabla_{1r}^r + \frac{1}{s_r^r} \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \frac{1}{c_r^r} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) F = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

با توجه به رابطه‌ی ۶۹ مشخص می‌شود که روابط به دست آمده برای تغییرمکان در شرط اضافی $\text{ercurl}(\mathbf{u}) = 0$ نیز صدق می‌کند. اگر یک تابع پتانسیل دیگر به رابطه‌ی ۵۲ اضافه شود، می‌توان علاوه بر حذف این شرط اضافی، شرایط لازم برای حل بخش ناهمگن معادله‌ی ۳۹ را نیز فراهم کرد. تابع برداری $\mathbf{b} = (b_1, b_r, b_r, t)$ از کلاس $C^{1,0}$ روی $B \times (0, t_0)$ با این شرط که $\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_r}{\partial x_r} = 0$ باشد، در نظر گرفته می‌شود. روابط تغییرمکان بر اساس رابطه‌ی ۵۲ و با استفاده از توابع اسکالر χ از کلاس $C^{0,2}$ و F از کلاس $C^{1,2}$ روی محیط اقلیدسی $B \times (0, t)$ به شکل عبارت ۷۱ پیشنهاد می‌شوند:

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r} \nabla_l^r F - \frac{\partial \chi}{\partial x_r}, \\ u_r = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r \partial x_r} \nabla_l^r F + \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \\ u_r = \left((1 + \alpha_1) \nabla_{1r}^r + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} F. \end{cases} \quad (71)$$

با جایگذاری این روابط در معادلات تعادل ۳۵ الی ۳۷، معادلات دیفرانسیلی حاکم بر توابع پتانسیل F و χ به شکل روابط ۷۲ و ۷۳ محاسبه می‌شوند:

$$\alpha_r (1 + \alpha_1) \left(\left(\nabla_{1r}^r + \frac{1}{s_r^r} \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \frac{1}{c_r^r} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) \left(\left(\nabla_{1r}^r + \frac{1}{s_r^r} \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \frac{1}{c_r^r} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) F = \bar{\rho} b_r \quad (72)$$

$$\left(\left(\nabla_{1r}^r + \frac{1}{s_r^r} \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \frac{1}{c_r^r} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) \chi = \psi(x_1, x_r, x_r, t) \quad (73)$$

که در آن $\psi(x_1, x_r, x_r, t)$ تابعی اسکالر است، به طوری که روابط ۷۴ برقرار باشند: [۲۰]

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_r} = b_1(x_1, x_r, x_r, t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -b_r(x_1, x_r, x_r, t) \quad (74)$$

• بر اساس تئوری گرادیان کرنش

همان‌طور که انتظار می‌رود، با صرف نظر کردن از پارامتر غیرمحملی در روابط ۷۱ یا قرار دادن $e=0$ ، اپراتور ∇_e^r برابر واحد می‌شود و در نتیجه روابط ۷۵ برای پاسخ بردار تغییرمکان بر اساس تئوری گرادیان کرنش حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r} \nabla_l^r F - \frac{\partial \chi}{\partial x_r}, \\ u_r = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r \partial x_r} \nabla_l^r F + \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \\ u_r = \left((1 + \alpha_1) \nabla_{1r}^r + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \bar{\rho} \frac{\partial^r}{\partial t^r} F. \end{cases} \quad (75)$$

ماتریس کوفکتور اپراتورهای \mathbf{D} ، \mathbf{d} نیز در حالت کلی به شکل عبارت ۵۹ در نظر گرفته می‌شود. برای کاهش مرتبه‌ی معادله دیفرانسیل حاکم بر \mathbf{F} ، درایه‌های ماتریس کوفکتور به صورتی نوشته می‌شود که بتوان از اپراتور $\bar{\nabla}_e^r$ فاکتور گرفت:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{1r} & d_{1r} \\ d_{r1} & d_{rr} & d_{rr} \\ d_{r1} & d_{rr} & d_{rr} \end{bmatrix} \quad (59)$$

هر یک از درایه‌های ماتریس \mathbf{d} به صورت روابط ۶۰ الی ۶۵ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} d_{11} = & \left(\left(\nabla_{1r}^r + \alpha_1 \frac{\partial^r}{\partial x_1^r} + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) \\ & \left(\left(\alpha_r \nabla_{1r}^r + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) - \alpha_r^r \frac{\partial^r}{\partial x_1^r \partial x_r^r} \nabla_l^r \nabla_l^r, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} d_{1r} = d_{r1} = & - \left(\alpha_1 \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r} \nabla_l^r \right) \\ & \left(\left(\alpha_r \nabla_{1r}^r + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) + \alpha_r^r \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r \partial x_r} \nabla_l^r \nabla_l^r, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} d_{rr} = & \left(\left(\nabla_{1r}^r + \alpha_1 \frac{\partial^r}{\partial x_1^r} + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) \\ & \left(\left(\alpha_r \nabla_{1r}^r + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) - \alpha_r^r \frac{\partial^r}{\partial x_1^r \partial x_r^r} \nabla_l^r \nabla_l^r, \end{aligned} \quad (62)$$

$$d_{1r} = d_{r1} = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r} \bar{\nabla}_e^r \nabla_l^r, \quad (63)$$

$$d_{rr} = d_{rr} = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r \partial x_r} \bar{\nabla}_e^r \nabla_l^r, \quad (64)$$

$$d_{rr} = \bar{\nabla}_e^r \left(\left((1 + \alpha_1) \nabla_{1r}^r + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) \nabla_l^r - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right). \quad (65)$$

۵. میدان تغییرمکان بر حسب تابع پتانسیل در محیط

همسانگرد جانبی

• بر اساس تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی

با فرض این‌که تابع برداری \mathbf{F} مطابق رابطه‌ی ۶۶، فقط در امتداد x_r مؤلفه داشته باشد، با جایگذاری آن در رابطه‌ی ۵۲، بردار تغییرمکان بر حسب تابع پتانسیل به شکل ماتریسی رابطه‌ی ۶۷ بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F^r \end{bmatrix}^T \quad (66)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_r \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{1r} & d_{1r} \\ d_{r1} & d_{rr} & d_{rr} \\ d_{r1} & d_{rr} & d_{rr} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F^r \end{bmatrix} \quad (67)$$

از آنجایی‌که اپراتور $\bar{\nabla}_e^r$ قابل جداسازی از روابط ۵۴ و ۶۳ الی ۶۵ است، می‌توان تابع اختیاری \mathbf{F} را به صورت رابطه‌ی ۶۸ در نظر گرفت:

$$\mathbf{F} = \bar{\nabla}_e^r F^r \quad (68)$$

• بر اساس تئوری غیرمحملی ارینگن

همچنین، زمانی که پارامتر طول مشخص نادیده گرفته شود یا در بردار تغییر مکان γ_1 پارامتر $l=0$ قرار داده شود، اپراتور $\nabla_i^l = 1$ می شود و روابط میدان تغییر مکان بر حسب توابع پتانسیل بر پایه تئوری کشسانی غیرمحملی ارینگن به صورت روابط ۷۶ به دست می آید:

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r} F - \frac{\partial \chi}{\partial x_r}, \\ u_r = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r \partial x_r} F + \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \\ u_r = \left(\left((1 + \alpha_1) \nabla_{1r}^r + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) F. \end{cases} \quad (76)$$

• بر اساس تئوری کلاسیک محیط پیوسته

در نهایت با صرف نظر کردن از هر دو پارامتر غیرمحملی و طول مشخص از روابط میدان تغییر مکان γ_1 ، روابط توابع پتانسیل بر اساس تئوری محیط پیوسته کلاسیک روابط ۷۷ به دست می آید:

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r} F - \frac{\partial \chi}{\partial x_r}, \\ u_r = -\alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r \partial x_r} F + \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \\ u_r = \left(\left((1 + \alpha_1) \nabla_{1r}^r + \alpha_r \frac{\partial^r}{\partial x_r^r} \right) - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) F. \end{cases} \quad (77)$$

با دقت به روابط ۷۷ مشاهده می شود که معادلات به دست آمده برابر با روابط توابع پتانسیل پیشنهادی اسکندری قادی^[۳۰] بر پایه تئوری محیط پیوسته کلاسیک برای محیط همسانگرد جانبی است.

۶. بازنویسی روابط برای محیط همسانگرد

با توجه به این نکته که مواد همسانگرد، دو ضریب کشسان مستقل در تانسور تنش - کرنش دارند، ضرایب کشسان محیط همسانگرد به شکل رابطه ۷۸ بیان می شوند:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (78)$$

که در آن، ضرایب λ و μ به عنوان ثابت های لامه شناخته می شوند. با جایگذاری ضرایب فوق در روابط ۳۵ الی ۳۷، نتایج برای حالت همسانگرد به شکل روابط ۷۹ الی ۸۱ حاصل می شود:

$$\nabla_i^l \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^l u_1}{\partial x_1^l} + \lambda \frac{\partial^l u_r}{\partial x_r^l} \\ + \lambda \frac{\partial^l u_r}{\partial x_1 \partial x_r} \\ + \mu \left(\frac{\partial^l u_1}{\partial x_r^l} + \frac{\partial^l u_r}{\partial x_1 \partial x_r} \right) \\ + \mu \left(\frac{\partial^l u_1}{\partial x_r^l} + \frac{\partial^l u_r}{\partial x_1 \partial x_r} \right) \end{bmatrix} = \nabla_e^r \rho \left(\frac{\partial^r u_1}{\partial t^r} - b_r \right) \quad (79)$$

$$\nabla_i^l \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^l u_r}{\partial x_r^l} + \lambda \frac{\partial^l u_1}{\partial x_1 \partial x_r} \\ + \lambda \frac{\partial^l u_r}{\partial x_1 \partial x_r} \\ + \mu \left(\frac{\partial^l u_1}{\partial x_1 \partial x_r} + \frac{\partial^l u_r}{\partial x_r^l} \right) \\ + \mu \left(\frac{\partial^l u_1}{\partial x_r^l} + \frac{\partial^l u_r}{\partial x_1 \partial x_r} \right) \end{bmatrix} = \nabla_e^r \rho \left(\frac{\partial^r u_r}{\partial t^r} - b_r \right) \quad (80)$$

$$\nabla_i^l \begin{bmatrix} \lambda \left(\frac{\partial^l u_1}{\partial x_1 \partial x_r} + \frac{\partial^l u_r}{\partial x_r \partial x_1} \right) \\ + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^l u_r}{\partial x_r^l} \\ + \mu \left(\frac{\partial^l u_r}{\partial x_r \partial x_r} + \frac{\partial^l u_r}{\partial x_r^l} \right) \\ + \mu \left(\frac{\partial^l u_1}{\partial x_1 \partial x_r} + \frac{\partial^l u_r}{\partial x_r^l} \right) \end{bmatrix} = \nabla_e^r \rho \left(\frac{\partial^l u_r}{\partial t^l} - b_r \right) \quad (81)$$

پارامترهای $\alpha_1, \alpha_r, \alpha_r, \alpha_r, \alpha_1$ به صورت نرمال شده ی ضرایب کشسان و چگالی نسبت به ضریب μ ، به شکل روابط ۸۲ تعریف می شوند:

$$\alpha_1 = \alpha_r = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \quad \alpha_r = 1, \quad (82)$$

$$\alpha_r = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\mu}.$$

با بازنویسی روابط ۷۹ الی ۸۱ با ضرایب جدید مطابق رابطه ۸۲، در نهایت می توان سه معادله دیفرانسیل حرکت به دست آمده را به شکلی مشابه با رابطه ماتریسی رابطه ۳۹ محاسبه کرد، با این تفاوت که درایه های ماتریس اپراتور D مطابق با روابط ۸۳ الی ۸۸ هستند:

$$D_{11} = \left(\nabla_{1r}^r + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^r}{\partial x_r^l} + \frac{\partial^r}{\partial x_1^l} \right) \nabla_l^l - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r}, \quad (83)$$

$$D_{1r} = D_{r1} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r} \nabla_l^l, \quad (84)$$

$$D_{rr} = \left(\nabla_{1r}^r + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^r}{\partial x_r^l} + \frac{\partial^r}{\partial x_1^l} \right) \nabla_l^l - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r}, \quad (85)$$

$$D_{1r} = D_{r1} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r} \nabla_l^l, \quad (86)$$

$$D_{rr} = D_{rr} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^r}{\partial x_r \partial x_r} \nabla_l^l, \quad (87)$$

$$D_{rr} = \left(\nabla_{1r}^r + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^r}{\partial x_r^l} \right) \nabla_l^l - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r}. \quad (88)$$

با انجام مراحل مشابه بخش قبل، در نهایت رابطه ی میدان تغییر مکان بر حسب توابع پتانسیل برای محیط همسانگرد بر پایه تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی به صورت روابط ۸۹ به دست می آید:

$$\begin{cases} u_1 = - \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) \frac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_r} \nabla_l^l F - \frac{\partial \chi}{\partial x_r} \\ u_r = - \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) \frac{\partial^r}{\partial x_r \partial x_r} \nabla_l^l F + \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \\ u_r = \left(\left(\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right) \nabla_{1r}^r + \frac{\partial^r}{\partial x_r^l} \right) \nabla_l^l - \bar{\rho} \nabla_e^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) F. \end{cases} \quad (89)$$

با استفاده از روابط اخیر، معادلات دیفرانسیل حاکم بر توابع χ و F نیز به شکل روابط ۹۰ و ۹۱ حاصل می شوند:

غیرمحلّی با استفاده از یک روش سیستماتیک برای حل مسائل الاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی ارائه شده است. همچنین، اپراتورهای دیفرانسیلی در پژوهش حاضر به گونه‌ی مرتب شده‌اند که مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر محیط کاهش یافته است. بر این اساس، معادلات حاکم بر محیط‌های همسانگرد جانبی متأثر از اثر اندازه و اثر غیرمحلّی به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی پاره‌ی مرتبه‌ی ۸ و ۴ به دست آمده است، که به شکل ترکیبی از عملگرهای موج، پارامتر غیرمحلّی و طول مشخص هستند. معادلات دیفرانسیل مذکور برای هر مسئله‌ی با توجه به شرایط مرزی باید حل و پس از تعیین توابع پتانسیل، پارامترهای مورد نظر، نظیر:

میدان تغییرمکان، تنش و کرنش قابل محاسبه خواهد بود.

$$\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\right) \left(\left(\nabla_{1r}^T + \frac{\partial^T}{\partial x_r^T} \right) \nabla_l^T - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \nabla_e^T \frac{\partial^T}{\partial t^T} \right) \left(\left(\nabla_{1r}^T + \frac{\partial^T}{\partial x_r^T} \right) \nabla_l^T - \frac{\rho}{\mu} \nabla_e^T \frac{\partial^T}{\partial t^T} \right) F = \bar{\rho} b_r \quad (90)$$

$$\left(\left(\nabla_{1r}^T + \frac{\partial^T}{\partial x_r^T} \right) \nabla_l^T - \frac{\rho}{\mu} \nabla_e^T \frac{\partial^T}{\partial t^T} \right) \chi = \psi(x_1, x_r, x_r, t) \quad (91)$$

۷. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، یک مجموعه توابع پتانسیل تغییرمکان بر پایه‌ی تئوری گرادیان کرنش

پانویسها

1. experimental methods
2. molecular dynamics simulation
3. continuum mechanics
4. Piola
5. Cosserat
6. micro continuum
7. Yang
8. Mindlin
9. micro polar
10. micro stretch
11. micro morphic
12. Eringen
13. Kroner
14. Lim
15. Boussinesq
16. Papkovitch-Neuber
17. Galerkin
18. Shi & Wang
19. Cong
20. Love
21. Lekhnitskii
22. Helmholtz
23. kernel function
24. Dirac delta function
25. Laplacian operator
26. Eshel
27. Casal
28. Altan & Aifantis
29. Lim

منابع (References)

3. Karličić, D., Murmu, T., Adhikari S. and et al. "Non-local Structural Mechanics", *John Wiley & Sons* (2019).
4. Cosserat, E. and Cosserat, F. "Théorie des corps déformables", *Paris: Hermann et Fils* (1909).
5. Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and et al. "Couple stress based strain gradient theory for elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, **39**(10), pp. 2731-2743 (2002).
6. Mindlin, R.D. "Micro-structure in linear elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, pp. 51-78 (1964).
7. Mindlin, R.D. "Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity", *International Journal of Solids Structures*, **1**(4), pp. 417-38 (1965).
8. Eringen, A.C. "Linear theory of micro polar elasticity", *Journal of Mathematics and Mechanics*, **15**(6), pp. 909-923 (1966).
9. Eringen, A.C. "Micro polar fluids with stretch", *International Journal of Engineering Science*, **7**(1), pp. 115-127 (1969).
10. Altenbach, H. and Eremeyev, V.A. "Strain rate tensors and constitutive equations of inelastic micro polar materials", *International Journal of Plasticity*, **63**, pp. 3-17 (2014).
11. Ansari, R., Bazdid-Vahdati, M., Shakouri, A. and et al. "Micromorphic prism element", *Mathematics and Mechanics of Solids*, **22**(6), pp. 1438-1461 (2017).
12. Ansari, R., Bazdid-Vahdati, M., Shakouri, A. and et al. "Micromorphic first-order shear deformable plate element", *Meccanica*, **51**, pp. 1797-1809 (2016).
13. Ansari, R., Shakouri, A.H., Bazdid-Vahdati, M. and et al. "A nonclassical finite element approach for the non-linear analysis of micropolar plates", *Journal of Computer Nonlinear Dynamic*, **12**(1), 011019, (12 pages) (2017).
14. Chen, Y. and Lee, J.D. "Determining material constants in micromorphic theory through phonon dispersion relations", *International Journal of Engineering Science*, **41**(8), pp. 871-886 (2003).
1. Thai, H-T., Vo, T., Nguyen, T.-K. and et al. "A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates", *Composite Structures*, **177**, pp. 196-219 (2017).
2. Jalaei, M.H. and Civalek, O. "A nonlocal strain gradient refined plate theory for dynamic instability of embedded graphene sheet including thermal effects", *Composite Structures*, **220**, pp. 209-220 (2019).

15. Kroner, E. "Elasticity theory of materials with long range cohesive forces", *International Journal of Solids Structure*, **3**(5), pp. 731-742 (1967).
16. Eringen, A.C. "Linear theory of micro polar elasticity", *Journal of Mathematics and Mechanics*, **15**(6), pp. 909-923 (1966).
17. Eringen, A.C. "Nonlocal polar elastic continua", *International Journal of Engineering Science*, **10**(1), pp. 1-16 (1972).
18. Lim, C., Zhang, G. and Reddy, J. "A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation", *J. Mech. Phys. Solids*, **78**, pp. 298-313 (2015).
19. Ghannadpour, S.A.M., Mohammadi, B. and Fazilati, J. "Bending, buckling and vibration problems of nonlocal euler beams using ritz method", *Composite Structures*, **96**, pp. 584-589 (2013).
20. Kananipour, H. "Static analysis of nanoplates based on the nonlocal Kirchhoff and Mindlin plate theories using DQM", *Latin American Journal of Solids and Structures*, **11**(10), pp. 1709-1720 (2014).
21. Hosseini-Hashemim, S., Kermajani, M. and Nazemnezhad, R. "An analytical study on the buckling and free vibration of rectangular nanoplates using nonlocal third-order shear deformation plate theory", *European Journal of Mechanics A Solids*, **51**, pp. 29-43 (2015).
22. Wang, B., Zhao, J. and Zhou, S. "A micro scale timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory", *European Journal of Mechanics A Solids*, **29**(4), pp. 591-599 (2010).
23. Li, A., Zhou, S. and Wang, B. "A size-dependent model for bi-layered Kirchhoff micro-plate based on strain gradient elasticity theory", *Composite Structures*, **113**, pp. 272-280 (2014).
24. Xu, X.-J., Wang, X.-C., Zheng, M.-L. and et al. "Bending and buckling of nonlocal strain gradient elastic beams", *Composite Structures*, **160**, pp. 366-377 (2017).
25. Lu, L., Guo, X. and Zhao, J. "A unified size-dependent plate model based on nonlocal strain gradient theory including surface effects", *Applied Mathematical Modelling*, **68**, pp. 583-602 (2019).
26. Navayi Neya, B. "Exact solution of free vibration of thick rectangular isotropic plates on a simply supported using displacement potential functions", *Sharif Civil Engineering*, **30**(2), pp. 33-41 (in persain) (2014).
27. Wang, W. and Shi, M.X. "Thick plate theory based on general solutions of elasticity", *Acta Mechanica*, **123**, pp. 27-36 (1997).
28. Tran-Cong, T. "On the completeness and uniqueness of the papkovitch-neuber and the non-axisymmetric boussinesq, love, and burgatti solutions in general cylindrical coordinates", *Journal of Elasticity*, **36**, pp. 227-255 (1955).
29. Lekhnitskii, S.G. "Theory of elasticity of an anisotropic body", *Mir, Moscow* (1981).
30. Eskandari-Ghadi, M. "A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media", *Journal of Elasticity*, **81**, pp. 1-19 (2005).
31. Forati, M., Eskandari-Ghadi, M. and Rahimian, M. "Potential functions for thermoelastodynamic in transversely isotropic media", *Sharif Civil Engineering*, **29**(2), pp. 55-64 (2010).
32. Eskandari-Ghadi, M., Mirzapour, A. and Ardeshir-Behrestagehi, A. "Rocking vibration of a rigid circular disc in a transversely isotropic full-space", *International Journal of Numerical and Analytical Method*, **35**(14), pp. 1587-1603 (2011).
33. Eskandari-Ghadi, M., Ardeshir-Behrestaghi, A. and Navayi-Neya, B. "Mathematical analysis for an axisymmetric disc-shaped crack in transversely isotropic half-space", *International journal of mechanical science*, **68**, pp. 171-179 (2013).
34. Nematzadeh, M., Eskandari-Ghadi, M. and Navayi Neya, B. "An analytical solution for transversely isotropic simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions", *J. Strain Analysis*, **46**(2), pp. 121-123 (2010).
35. Moslemi, A., Navayi-Neya, B. and Vaseghi Amiri, J. "Benchmark solution for buckling of thick rectangular transversely isotropic plates under biaxial load", *International Journal of Mechanical Sciences*, **131-132**, pp. 356-367 (2017).
36. Bakhshandeh, A., Navayi Neya, B and., Nateghi Babagi, P. "Benchmark solution for free vibration analysis of transversely isotropic thick rectangular plate", *Acta Mechanica*, **228**(11), pp. 3977-3995 (2017).
37. Nateghi Babagi, P., Navayi Neya, B. and Dehestani, M. "Three-dimensional solution of thick rectangular simply supported plates under a moving load", *Meccanica*, **52**(15), pp. 3675-3692 (2017).
38. Eskandari-Ghadi, M. and Amiri-Hezaveh, A. "Wave propagations in exponentially graded transversely isotropic half-space with potential function method", *Mechanics of Materials*, **68**, pp. 275-292 (2014).
39. Vafakhah, Z. and Navayi Neya, B. "An exact three dimensional solutions for bending of thick rectangular FGM plate", *Composites: Part B*, **156**, pp. 72-87 (2019).
40. Shahrababaki, E.A. "On three-dimensional nonlocal elasticity: Free vibration of rectangular nanoplate", *European Journal of Mechanics: A Solids*, **71**, pp. 122-133 (2018).
41. Yakhkeshi, F. and Navayi Neya, B. "An analytical solution to the bending problem of micro-plate using a new displacement potential function", *Scientia Iranica F*, **26**(3), pp. 1997-2006 (2019).
42. Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. "Galerkin's approach for buckling analysis of functionally graded anisotropic nanoplates/different boundary conditions", *Engineering with Computers*, **35**, pp. 1297-1316 (2018).
43. Farajpour, A.; Ghayesh, M. and Farokhi, H. "A review on the mechanics of nanostructures", *International Journal of Engineering Science*, **133**, pp. 231-263 (2018).
44. Mindlin, R.D. and Eshel, N.N. "On first strain-gradient theories in linear elasticity", *In. J. Solids Structures*, **4**(1), pp. 109-124 (1968).
45. Casal, P. "La the'orie du second gradient et la capillarite", *C.R. Acad. Sci. Paris A*, **274**, pp. 1571-1574 (1972).

46. Altan, B.S. and Aifantis, E.C. "On some aspects in the special theory of gradient elasticity", *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, **8**(3), pp. 231-282 (1997).
47. Lazar, M. and Agiasofitou, E. "Screw dislocation in nonlocal anisotropic elasticity", *International Journal of Engineering Science*, **49**(12), pp. 1404-1414 (2011).
48. Lazar, M., Agiasofitou, E. and Po, G. "Three-dimensional nonlocal anisotropic elasticity: a generalized continuum theory of Angström-mechanics", *Acta Mechanica*, **231**(2), pp. 743-781 (2020).
49. Mousavi, S.M. and Korsunsky, A.M. "Non-singular antiplane fracture theory within nonlocal anisotropic elasticity", *Materials & Design*, **88**, pp. 854-861 (2015).
50. Yaghoubi, S.T., Mousavi, S. M. and Paavola, J. "Buckling of centrosymmetric anisotropic beam structures within strain gradient elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, **109**, pp. 84-92 (2017).
51. Ding, H., Chen, W. and Zhang, L. "Elasticity of transversely isotropic materials", *Springer Science and Business Media, Berlin* (2006).
52. Rahimian, M. and Eskandari-Ghadi, M. "Mechanics of continuous media", *University of Tehran Press, 2nd edition*, (in persain) (2005).