

بررسی تأثیر حرکت شتابدار جرم متحرک در پاسخ دینامیکی خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق

محمدعلی فیوضات (استادیار)

هاتف عبدوس (دانشجوی دکتری)

علیرضا خالو* (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران.

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۴۰۳
دوره‌ی ۴۰، شماره‌ی ۴، صص. ۳۷-۴۹، (پژوهشی)

در مطالعه‌ی حاضر، به بررسی تأثیر حرکت شتابدار فزاینده/کاهنده‌ی ناشی از تحریک جرم متحرک در پاسخ دینامیکی خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده پرداخته شده است. براساس روش جداسازی متغیرها و با اتکا به توابع سینوسی متناظر با شرایط مرزی تیرهای خمیده، فرم ماتریسی معادله‌های تعادل دینامیکی تعیین شد و طیف پاسخ تیرهای خمیده تحت تحریک ناشی از جرم متحرک به دست آمد. راستی‌آزمایی مدل تحلیلی- عددی پیشنهادی با استناد به مطالعه‌های موجود در ادبیات فنی صورت گرفت، که نشانگر دقت بالای روش پیشنهادی است. در قالب مطالعه‌های پارامتری، اثر پارامترهای کلیدی، شامل: زاویه‌ی مرکزی و طول تیر خمیده، و نیز جرم، سرعت اولیه، و شتاب فزاینده/کاهنده‌ی جرم متحرک در جابجایی و لنگر خمشی خارج از صفحه ارزیابی شده‌اند. با افزایش اندازه‌ی شتاب در حالت فزاینده، مقادیر جابجایی و لنگر خمشی بیشینه‌ی خارج از صفحه به ترتیب تا ۱۸٫۱۱ و ۲۷٫۵۳ درصد نسبت به حالت حرکت یکنواخت افزایش یافته است. در حالت شتاب کاهنده، با کاهش اندازه‌ی شتاب، مقدار دو طیف پاسخ اخیر به ترتیب تا ۴۱٫۵۹ و ۴۲٫۰۵ درصد نسبت به حالت متناظر در سرعت تقلیل یافته‌اند.

واژگان کلیدی: تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق، جرم متحرک، رفتار دینامیکی خارج از صفحه، حرکت شتابدار فزاینده/کاهنده، طیف پاسخ دینامیکی.

m.foyouzat@sharif.edu
hatef.abdoos2015@sharif.edu
khaloo@sharif.edu

۱. مقدمه

محدودتر بوده است، که در ادامه به برخی از مهم‌ترین آن‌ها اشاره شده است. این تذکر لازم است که در بیشتر منابع اشاره‌شده، تحریک‌های ناشی از جسم متحرک به صورت یک نیروی متحرک مدل‌سازی شده و اثر اینرسی مربوط به جرم جسم و شتاب‌های انتقالی آن در پاسخ دینامیکی تیرهای خمیده در نظر گرفته نشده است.^[۴ و ۵]

کریستیانو و کالور^۱ (۱۹۶۹)،^[۶] یک حل تحلیلی بسته‌ی را برای محاسبه‌ی پاسخ دینامیکی پل‌های تک‌دهانه‌ی خمیده در افق با تکیه‌گاه‌های ساده تحت نیروی متحرک ارائه کرده‌اند. با استفاده از روش شتاب خطی، چاودیوری و شور^۲ (۱۹۷۷)،^[۷] با در نظر گرفتن اثر تابیدگی^۳ مقطع، رفتار دینامیکی تیرهای خمیده در افق را به تحریک‌های یک بار متحرک به صورت عددی مطالعه کرده‌اند. تحلیل پایداری یک ریل راه‌آهن خمیده در افق تحت تحریک ناشی از یک بار متحرک توسط نایر^۴ و همکاران (۱۹۸۵)،^[۸] ارزیابی شده است.

المان‌های خمیده در صفحه‌ی افق علاوه بر زیبایی‌های بصری و معماری،^[۱] کاربردهای گسترده‌ی در مهندسی عمران و راه‌آهن دارند، که برای نمونه می‌توان به: خطوط حمل‌ونقل ریلی، جاده‌ها، پل‌ها، قطارهای گرانشی، و سازه‌ی ترن‌های هوایی در شهرسازی‌ها اشاره کرد. یکی از موضوع‌های مورد توجه پژوهشگران در سال‌های اخیر، ارزیابی دقیق پاسخ دینامیکی المان‌های سازه‌ی مذکور تحت بارهای متحرک بوده است، که از دیدگاه دستیابی به یک طرح ایمن بسیار حائز اهمیت است.

تاکنون بیشتر پژوهش‌های انجام‌شده بر روی اثر بار و جرم متحرک در رفتار دینامیکی تیرهای مستقیم، صفحه‌ها، و کابل‌ها بوده‌اند، که در برخی نوشتارها،^[۲ و ۳] برجسته‌ترین مطالعه‌های مذکور اشاره و مرور شده‌اند. با این وجود، مطالعات انجام‌شده بر روی المان‌های خمیده در صفحه‌ی افق به مراتب

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۱۸، تاریخ اصلاحیه: ۱۴۰۲/۱۲/۰۴، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۰.

استناد به این مقاله:

فیوضات، محمدعلی، عبدوس، هاتف، و خالو، علیرضا، ۱۴۰۳. بررسی تأثیر حرکت شتابدار جرم متحرک در پاسخ دینامیک خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده در

صفحه‌ی افق، ۴۰(۴)، صص. ۳۷-۴۹. DOI: 10.24200/j30.2024.63894.3293

^۱ Christiano & Culver^۲ Chaudhuri & Shore^۳ Warping^۴ Nair

می‌شود یا در آن فرود می‌آید، یا اتومبیلی که سرعت خود را قبل از توقف کاهش می‌دهد یا از حالت توقف شروع به حرکت می‌کند، بستر محل اثر بار متحرک در موقعیت‌های فوق تحت سرعت فزاینده یا کاهشدهی جسم قرار می‌گیرد. در واقع، نه فقط وسیله‌ی نقلیه یا هواپیما هنگام توقف یا شروع حرکت با سرعت متغیر حرکت می‌کند، بلکه سرعت وسیله‌ی نقلیه در هنگام حرکت روی یک مسیر نیز عموماً در حال تغییر است.

طبق مطالعات لین و نیمیر^{۱۰} (۲۰۰۲)،^[۱۸] و هو^{۱۱} و همکاران (۲۰۱۴)،^[۱۹] در شرایط رانندگی وسائط نقلیه‌ی سبک در جاده‌های شهری، نسبت زمان رانندگی، و طی مسیر با سرعت متغیر بسیار بیشتر از رانندگی با سرعت ثابت است. نوشتار کخمانیوک و فیلیپوف^{۱۲} (۱۹۶۷)،^[۲۰] به عنوان یکی از اولین مراجع در بررسی اثر سرعت متغیر نیروی متحرک در رفتار دینامیکی تیرهای مستقیم شناخته می‌شود. کریلف^{۱۳} (۱۹۹۶)،^[۲۱] ارتعاش‌های ایجادشده در زمین ناشی از حرکت با سرعت فزاینده و کاهشدهی وسائط نقلیه را بررسی کرده است. زیبده و رکویچ^{۱۴} (۱۹۹۶)،^[۲۲] ارتعاش تیرهای مستقیم را تحت بارهای متحرک تصادفی با سرعت متغیر و ابوهلال^{۱۵} و محسن (۲۰۰۰)،^[۲۳] نیز رفتار دینامیکی تیرهای مستقیم با شرایط مرزی کلی را در اثر حرکت شتابدار یک نیروی هارمونیک مطالعه کرده‌اند. دوگوش و آیزنبرگر^{۱۶} (۲۰۰۲)،^[۲۴] پاسخ دینامیکی تیرهای چنددهانه‌ی پیوسته با صلبیت خمشی متفاوت در دهانه‌های مختلف را تحت حرکت شتابدار نیروهای متحرک بررسی کرده‌اند.

میچالتسوس^{۱۷} (۲۰۰۳)،^[۲۵] عملکرد دینامیکی تیرهای مستقیم با شرایط مرزی مفصلی نسبت به بار متحرک با سرعت متغیر را با منظورکردن اثر اینرسی دورانی جرم متحرک و تیر ارزیابی کرده است. زیبده و ابوهلال^{۱۸} (۲۰۰۳)،^[۲۶] تأثیر بارهای متحرک شتابدار در پاسخ دینامیکی تیرهای مستقیم با طول متناهی و پنگ^{۱۹} و همکاران (۲۰۰۹)،^[۲۷] تغییر شکل تیرهای مستقیم با تکیه‌گاه‌های ساده را تحت تحریک‌های یک جرم متحرک با سرعت متغیر با منظورکردن اثر اینرسی جرم مطالعه کرده‌اند. لی^{۲۰} و همکاران (۲۰۱۴)،^[۲۸] پاسخ دینامیکی صفحه‌های مستطیلی به نیروهای متحرک با سرعت متغیر و پاول و پالاسین^{۲۱} (۲۰۱۵)،^[۲۹] پایداری سرنشینان قطار را تحت حرکت شتابدار بررسی کرده‌اند. بسکو و موهو^{۲۲} (۲۰۱۸)،^[۳۰] پاسخ تیرهای متکی بر بستر کشسان را به نیروی متحرک با سرعت متغیر ارزیابی کرده‌اند. لیو^{۲۳} و همکاران (۲۰۲۲)،^[۳۱] رفتار دینامیکی روسازی‌های متکی بر

گالدوس^۱ و همکاران (۱۹۱۷)،^[۹] روشی را برای محاسبه‌ی ضریب ضربه‌ی دینامیکی پل‌های جعبه‌یی خمیده در افق تحت تأثیر یک جفت نیروی متحرک با فاصله‌ی ثابت از یکدیگر، که با سرعت یکنواخت روی سطح فوقانی تیر حرکت می‌کردند، ارائه کرده‌اند.

هولنگ^۲ و همکاران (۱۹۹۸)،^[۱۰] رفتار پل‌های جعبه‌یی خمیده در افق را با منظورکردن اثر تغییر شکل‌های تابیدگی در روابط تعادل دینامیکی حاکم بر آن بررسی کرده‌اند. با استفاده از روش سختی دینامیکی، هوسان و جما^۳ (۱۹۹۹)،^[۱۱] بسامدهای ارتعاش آزاد تیرهای تیموشکنوی خمیده در صفحه‌ی افق را محاسبه کرده‌اند. یَنگ^۴ و همکاران (۲۰۰۱)،^[۱۲] با منظورکردن فقط یک مود دینامیکی، موفق شدند یک رابطه‌ی تقریبی برای تعیین جابجایی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق در اثر تحریک ناشی از نیروی متحرک پیشنهاد کنند. لی^۵ و همکاران (۲۰۰۲)،^[۱۳] پاسخ ارتعاش آزاد یک تیر دایروی متکی بر بستر کشسان را با منظورکردن آثار تغییر شکل‌های برشی به‌دست آوردند. زبونسکی و دوزا^۶ (۲۰۱۰)،^[۱۴] پایداری غیرخطی واگن‌های قطار را بر روی مسیر خمیده در افق به‌صورت کیفی مطالعه و امکان رویداد دوشاخگی هاپف^۷ را بررسی کرده‌اند.

دای و انگ^۸ (۲۰۱۵)،^[۱۵] با ارائه‌ی یک راه‌حل تحلیلی، عملکرد دینامیکی خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده روی بستر وینلکر^۹ را تحت اثر نیروهای متمرکز متحدالفاصله و مبتنی بر توابع مثلثاتی ارزیابی کردند. عبدوس و همکاران (۲۰۲۰)،^[۱۶] با در نظر گرفتن مؤلفه‌های شتاب انتقالی جرم متحرک، موفق شدند پاسخ دینامیکی خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق را محاسبه و با برازش غیرخطی داده‌های مطالعه‌ی پارامتری، روابط کاربردی ساده‌شده‌ی برای تخمین ضرایب ضربه‌ی دینامیکی جابجایی و لنگر خمشی ارائه کنند. همچنین، ایشان (۲۰۲۳)،^[۱۷] در پژوهش دیگری تأثیر مؤلفه‌ی لنگر پیچشی را در پاسخ دینامیکی خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق را تحت تحریک ناشی از جرم متحرک ارزیابی کردند.

بررسی ادبیات فنی نشان می‌دهد که در مطالعات مربوط به اثر بارهای متحرک در المان‌های خمیده در افق، سرعت بار در تمام مراجع به عنوان یک مقدار ثابت نظر گرفته شده است. این در حالی است که یک سیستم روسازی راه، مسیر راه‌آهن یا باند فرودگاه، اغلب در معرض بارهای متحرک با سرعت فزاینده یا کاهشدهی قرار می‌گیرند. به‌عنوان مثال، هنگامی که یک قطار سریع‌السیر راه‌آهن به ایستگاه وارد یا از آن خارج می‌شود، یک هواپیما از باند فرودگاه بلند

^{۱۳} Krylov

^{۱۴} Zibdeh & Rackwitz

^{۱۵} Abu-Hilal

^{۱۶} Dugush & Eisenberger

^{۱۷} Michaltsos

^{۱۸} Abu-Hilal

^{۱۹} Peng

^{۲۰} Li

^{۲۱} Powel & Palacin

^{۲۲} Beskou & Muho

^{۲۳} Liu

^۱ Galdos

^۲ Huang

^۳ Howsan & Jemah

^۴ Yang

^۵ Lee

^۶ Zboinski & Dusza

^۷ Hopf bifurcation

^۸ Dai & Ang

^۹ Winkler foundation

^{۱۰} Lin & Niemeier

^{۱۱} Ho

^{۱۲} Kokhmanyuk & Filippov

بستر ویسکوکشسان دو پارامتری را به بارهای متحرک با سرعت متغیر به دست آورده‌اند.

با توجه به اینکه در هیچ‌یک از مطالعات موجود در ادبیات فنی، تأثیر سرعت متغیر در پاسخ دینامیکی خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق تحت اثر جرم متحرک مطالعه نشده است، در پژوهش حاضر مد نظر بوده است که تأثیر حرکت شتابدار جرم متحرک در رفتار دینامیکی المان‌های سازه‌ی مذکور براساس مقادیر جابجایی خارج از صفحه و نیز لنگر خمشی ارزیابی شود.

۲. فرمول‌بندی مسئله

۲.۱. تعریف مسئله

مطابق شکل ۱، یک تیر خمیده در صفحه‌ی افق با زاویه‌ی مرکزی φ و شعاع و طول R و L در نظر گرفته شده است. تیر به صورت دو سر ساده و با شرایط تکیه‌گاهی مفصلی بوده است، که امکان دوران پیچشی در دو انتهای آن وجود ندارد. ^[۱۲] و ^[۱۳] با تعریف یک سیستم مختصات کارتزین راستگرد، محورهای x ، y و z به ترتیب مار-بر محور عبوری از مرکز سطح مقطع و محورهای قائم و افقی تیر هستند؛ که بر اساس آن، درجه‌های آزادی دورانی $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ و جابجایی (w_x, w_y, w_z) معرفی می‌شوند. کل طول تیر به صورت یکپارچه مبتنی بر یک بستر ویسکو-کشسان بوده است، که در آن، k_r و k_y به ترتیب سختی راستای قائم و سختی پیچشی بستر کشسان هستند. C_r و C_y به ترتیب به عنوان میرایی بستر در راستای قائم و میرایی پیچشی هستند. همچنین، تیر خمیده تحت تحریک دینامیکی ناشی از جرم متمرکز M بوده است، که سطح فوقانی تیر را که فاقد اصطکاک است، با معادله‌ی حرکت دلخواه $x_M(t)$ طی می‌کند.

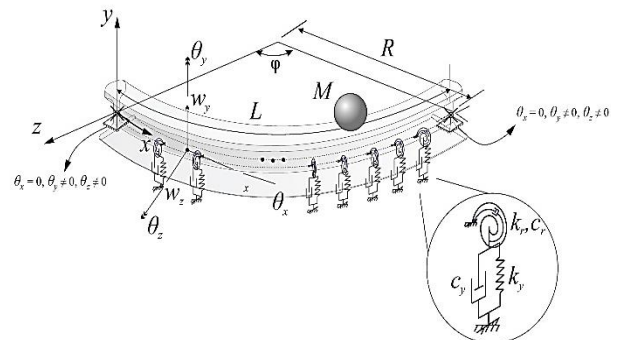
۲.۲. فرضیه‌ها

پیش از فرمول‌بندی مسئله، ابتدا فرضیات حاکم بر مسئله معرفی و سپس در معادله‌های تعادل دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق تحت اثر ارتعاش ناشی از جرم متمرکز متحرک در نظر گرفته می‌شوند:

(الف) مشخصات مقطع تیر خمیده در سرتاسر طول آن ثابت است؛

(ب) از تأثیر تغییرشکل‌های برشی صرف‌نظر می‌شود و فرض اویلر-برنولی برای تیرهای خمیده موضوعیت دارد؛ چرا که طول ریل‌ها در عمل از ابعاد مقطع ریل بسیار بیشتر است.

(ج) تأثیر اعوجاج پیچشی صرف‌نظر می‌شود؛



شکل ۱. سیستم دینامیکی تیر خمیده در صفحه‌ی افق مبتنی بر بستر ویسکو-کشسان و تحت تحریک ناشی از جرم متحرک.

(د) امکان وقوع جادشادگی جرم متحرک از روی تیر خمیده وجود ندارد و تماس کامل در تمام مدت حرکت برقرار است؛

(ه) حرکت جرم به صورت شتابدار با شتاب ثابت کاهنده/ فزاینده است؛

(و) در حرکت شتابدار کاهنده، جرم پیش از ترک تیر خمیده، شرایط سکون را تجربه نمی‌کند.

۳.۲. فرمول‌بندی مسئله

در تعیین پاسخ دینامیکی و معادله‌های تعادل تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق، روابط حاکم بر رفتار خارج صفحه و درون صفحه به صورت غیرهمبسته است، و لذا بررسی عملکرد خارج از صفحه‌ی تیرهای مذکور تحت تحریک ناشی از جرم متحرک مستقل از عملکرد درون صفحه انجام می‌شود. ^[۴] و ^[۱۶] همچنین، به منظور تعیین معادله‌های تعادل دینامیکی سیستم سازه‌ی تحت بررسی، از معادله‌های تعادل استاتیکی حاکم بر تیرهای خمیده استفاده می‌شود، که جزئیات دقیق مربوط به اثبات روابط حاصل به طور کامل در نوشتار ینگ و همکاران (۱۹۸۷)، ^[۱۳] ارائه شده است. حال، کافی است براساس هندسه‌ی تعریف‌شده در زیربخش ۱.۲ و نیز با اعمال مفروضات مطرح‌شده در زیربخش ۲.۲، معادله‌های تعادل دینامیکی سیستم تیر خمیده در صفحه‌ی افق و جرم متحرک را براساس روابط ۱ و ۲ تعیین کرد: ^[۱۵]، ^[۱۶] و ^[۱۳]

$$-\mu \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} - EI_z \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) + \frac{GJ}{R} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} \right) = \quad (1)$$

$$M \left(g + \frac{d^2 w_y}{dt^2} \right) \delta[x - x_M(t)] + k_y w_y + c_y \frac{\partial w_y}{\partial t}$$

$$-\rho I_o \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} + \frac{EI_z}{R} \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} - \frac{\theta_x}{R} \right) + GJ \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} \right) = \quad (2)$$

$$-\frac{MV^2}{R} y_s \delta[x - x_M(t)] - k_r \theta_x - c_r \frac{\partial \theta_x}{\partial t}$$

که در آن‌ها، w_y جابجایی خارج از صفحه و θ_x دوران پیچشی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق هستند. در روابط اخیر، μ و ρ به ترتیب جرم واحد طول و چگالی تیر خمیده، و نیز E مدول کشسانی، و G مدول برشی مقطع، V سرعت لحظه‌ی جرم متحرک، و نیز g شتاب جاذبه هستند. همچنین، y_s فاصله‌ی مرکز برش مقطع از سطح فوقانی تیر خمیده، I_z ممان اینرسی مقطع حول محور z ، و J ثابت پیچشی، و نیز I_o به عنوان ممان اینرسی قطبی مقطع تیر خمیده هستند. همچنین، δ تابع دلتای دیراک و $d^2 w_y / dt^2$ بیانگر مشتق کامل مرتبه‌ی دوم نسبت به زمان هستند، که مطابق رابطه‌ی ۳ تعریف می‌شود. ^[۱۶]

$$\frac{d^2 w_y}{dt^2} = \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} + \dot{x}_M^2(t) \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + 2\dot{x}_M(t) \frac{\partial^2 w_y}{\partial x \partial t} + \ddot{x}_M(t) \frac{\partial w_y}{\partial x} \quad (3)$$

در مطالعه‌ی حاضر، بررسی تأثیر نوع حرکت در رفتار خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده تحت تحریک ناشی از جرم متمرکز متحرک مد نظر بوده است. در این راستا، حرکت شتابدار با شتاب ثابت (فزاینده/ کاهنده) که براساس رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شود، به عنوان مبنای مطالعات بوده است.

$$x_M(t) = \frac{1}{a} at^2 + Vt + x_0 \quad (4)$$

که در آن، a شتاب ثابت حرکت جرم، V سرعت لحظه‌ی ورود جرم بر روی

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(t) \\ \Theta(t) \\ \dot{\mathbf{W}}(t) \\ \dot{\Theta}(t) \end{bmatrix}_{fN \times 1} \quad (10)$$

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\bar{\mathbf{M}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{K}}(t) & -\bar{\mathbf{M}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{C}}(t) \end{bmatrix}_{fN \times fN} \quad (11)$$

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{M}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{P}}(t) \end{bmatrix}_{fN \times 1} \quad (12)$$

که در آن‌ها، I بیانگر ماتریس یک‌ه از مرتبه‌ی $2N$ است. برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول نشان داده‌شده در رابطه‌ی ۹، می‌توان از روش ماتریس انتقال استفاده کرد، که در این روش، بردار $\mathbf{Y}(t)$ به فرم رابطه‌ی ۱۳ بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{Y}(t) = \xi(t, t_0)\mathbf{Y}(t_0) + \int_{t_0}^t \xi(t, \tau)\mathbf{R}(\tau) d\tau \quad (13)$$

که در آن، ماتریس $\xi(t, t_0)$ به عنوان ماتریس انتقال با بُعد مناسب انتخاب شده است و شرایط اولیه‌ی مسئله در زمان t_0 مشخص می‌شود. سپس با طی یک روند گام‌به‌گام می‌توان شرایط اولیه‌ی گام‌های زمانی بعدی (t_{k+1}) را براساس وضعیت نهایی گام زمانی پیش از آن (t_k) و با تعیین گام‌های به اندازه‌ی کافی کوچک برای افزایش دقت روش عددی به‌دست آورد. برای این کار می‌توان رابطه‌ی ۱۳ را به شکل یک معادله‌ی تفاضلی در دامنه‌ی زمانی بر حسب بردار حالت $\mathbf{Y}(t)$ به‌صورت رابطه‌ی ۱۴ نوشت:

$$\mathbf{Y}(t_{k+1}) = \xi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{Y}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \xi(t_{k+1}, \tau)\mathbf{R}(\tau) d\tau \quad (14)$$

همچنین، می‌توان ماتریس انتقال ξ را به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ در زمان تقریب زد: [۴۱]

$$\xi(t_{k+1}, t_k) = \exp[(t_{k+1} - t_k)\mathbf{U}(t_k)] \quad (15)$$

با ادامه‌ی حل گام‌به‌گام، معادله‌ی ۱۳ به فرم کلی رابطه‌ی ۱۶ نمایش داده می‌شود: [۴۱]

$$\mathbf{Y}(t_{k+1}) = \xi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{Y}(t_k) + [\xi(t_{k+1}, t_k) - \mathbf{I}]\mathbf{U}^{-1}(t_k)\mathbf{R}(t_k) \quad (16)$$

۴. راستی‌آزمایی حل نیمه‌تحلیلی پیشنهادی

به‌منظور حصول اطمینان از درستی حل نیمه‌تحلیلی پیشنهادی، باید نتایج حاصل از آن را با مطالعات موجود در ادبیات فنی مقایسه کرد. یکی از مطالعات برجسته‌ی که در زمینه‌ی تأثیر تحریک ناشی از بار متحرک در پاسخ دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق مطرح است، مربوط به مدل تحلیلی پیشنهادی ینگ^۲ و همکاران (۲۰۰۱ و ۲۰۰۴، [۱۲] و [۳۴] است. در مطالعه‌ی حاضر، یک تیر بتنی با مقطع مستطیلی به عرض $5/0$ و ارتفاع $1/8$ متر و با شرایط تکیه‌گاهی مفصلی در دو انتها تحت تحریک ناشی از بار متمرکزی به جرم $29/9$ تن قرار گرفته است، که با سرعت ثابت 40 کیلومتر بر ساعت روی سطح فوقانی تیر در حال حرکت است. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر خمیده در مطالعات راستی‌آزمایی مطابق جدول ۱ است.

تیر خمیده، و x . مختصات لحظه‌ی شروع حرکت هستند. با جایگذاری مشتق‌های مرتبه‌های اول و دوم رابطه‌ی ۴ در رابطه‌ی ۳، می‌توان رابطه‌ی ۵ را نوشت:

$$\frac{d^2 w_y}{dt^2} = \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} + (at + V)^2 \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + 2(at + V) \frac{\partial^2 w_y}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial w_y}{\partial x} \quad (5)$$

حال، با جایگذاری رابطه‌ی ۵ در رابطه‌ی ۱ می‌توان شرایط حرکت شتابدار با شتاب ثابت را در مسئله پیاده‌سازی کرد.

۳. روش حل مسئله

یکی از روش‌های متداول برای تعیین پاسخ تیرهای خمیده به تحریک‌های جرم متحرک، روش تفکیک متغیرهاست؛ که در آن، با معرفی توابع مناسب مبتنی بر شرایط انتهایی تیر خمیده، پاسخ سیستم تعیین می‌شود. با توجه به معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر حرکت خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق و نیز متکی بودن هر دو انتهای تیر بر تکیه‌گاه‌های مفصلی، می‌توان از توابع سینوسی برای نشان دادن شکل پاسخ دینامیکی تیر مطابق روابط ۶ و ۷ استفاده کرد: [۴۱، ۱۵، ۳۴ و ۳۵]

$$w_y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_{yi}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (6)$$

$$\theta_x(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_{xi}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

که در آن‌ها، $W_{yi}(t)$ و $\Theta_{xi}(t)$ به ترتیب توابع مجهول متناظر با جابجایی در راستای محور y و دوران پیشگی متناظر با مود i ام تیر خمیده هستند. با قراردادن معادله‌های ۶ و ۷ در معادله‌های ۱ و ۲، معادله‌های حاصل شامل توابع مجهول $W_{yi}(t)$ و $\Theta_{xi}(t)$ خواهند بود. حال با انتگرال‌گیری در طول تیر خمیده و با کمک خاصیت تعامد توابع $\sin(i\pi x/L)$ ، می‌توان معادله‌های به‌دست‌آمده را به فرم ماتریسی معادله‌ی ۸، که به شکل دستگاه $2N$ معادله‌ی دیفرانسیل معمولی و $2N$ تابع مجهول $W_{yi}(t)$ و $\Theta_{xi}(t)$ است، گسسته‌سازی کرد. ضرایب دستگاه معادله‌های اخیر، تابع زمان هستند و با استفاده از روش‌های عددی شناخته‌شده می‌توان آن‌ها را حل کرد.

$$\bar{\mathbf{M}}(t) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{W}}(t) \\ \ddot{\Theta}(t) \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{C}}(t) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{W}}(t) \\ \dot{\Theta}(t) \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{K}}(t) \begin{Bmatrix} \mathbf{W}(t) \\ \Theta(t) \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{P}}(t) \quad (8)$$

که در آن، ضرایب $\bar{\mathbf{M}}(t)$ ، $\bar{\mathbf{C}}(t)$ ، و $\bar{\mathbf{K}}(t)$ به‌ترتیب ماتریس‌های معادل متناظر با جرم، میرایی، و سختی سیستم گسسته و نیز $\bar{\mathbf{P}}(t)$ بیانگر بردار معادل نیروهای وارده به آن است. در نوشتار آبدوس و همکاران (۲۰۲۰، [۱۶] جزئیات مربوط به نحوه‌ی محاسبه و مقادیر درایه‌های ماتریس‌های ضرایب مذکور ارائه شده است. یک روش متعارف برای تسهیل در روند حل عددی معادله‌های حاکم بر سیستم‌های دینامیکی در برنامه‌های رایانه‌ی، استفاده از نمایش فضای حالت^۱ است؛ که شکل کلی نحوه‌ی نمایش آن (معادله‌ی ۹) برای معادله‌ی نشان داده‌شده در رابطه‌ی ۷ عبارت است از: [۳۶-۴۲]

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{R}(t) \quad (9)$$

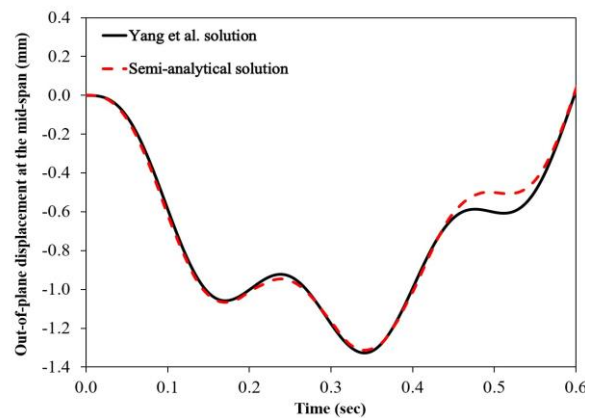
که در آن، $\mathbf{Y}(t)$ ، $\mathbf{U}(t)$ ، و $\mathbf{R}(t)$ مطابق روابط ۱۰ الی ۱۲ هستند:

^۲ Yang

^۱ State-space

جدول ۱. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر خمیده در مطالعات راستی آزمایشی. [۱۲ و ۱۳]

متغیر	نماد	کمیت	واحد
طول	L	۲۴٫۰	m
شعاع انحنا	R	۴۵٫۸۴	m
زاویه‌ی مرکزی	θ	۳۰	درجه
سطح مقطع	A	۹٫۰۰	m ^۲
چگالی	ρ	۲۴۰۰	kg/m ^۳
مدول کشسانی	E	۳۲٫۲	GPa
مدول برشی	G	۱۳٫۸۳	GPa
ممان اینرسی حول محور Y	I _y	۱۸٫۷۵	m ^۴
ممان اینرسی حول محور Z	I _z	۲٫۴۳	m ^۴
ممان اینرسی قطبی	I _o	۲۱٫۱۸	m ^۴



شکل ۲. راستی آزمایشی مدل نیمه تحلیلی ارائه شده براساس مدل تحلیلی ینگ و همکاران، [۱۲ و ۱۳] بر مبنای مقایسه‌ی مقادیر جابجایی خارج از صفحه در وسط دهانه‌ی تیر خمیده.

مقادیر جدول اخیر، در حل نیمه تحلیلی پیشنهادی در نظر گرفته شده و سپس پاسخ دینامیکی سیستم بر مبنای فرضیات مطالعه‌ی ادبیات فنی، با در نظر گرفتن اولین مود ارتعاشی در قالب جابجایی خارج از صفحه در وسط دهانه‌ی تیر خمیده محاسبه شده است. مقایسه‌ی جابجایی خارج از صفحه‌ی مدل پیشنهادی ینگ و مدل نیمه تحلیلی مطالعه‌ی حاضر در شکل ۲ مشاهده می‌شود.

مقایسه‌ی نمودارهای ترسیمی در شکل اخیر، نشانگر دقت بالای مدل پیشنهادی در برآورد پاسخ دینامیکی خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق و تحت تحریک ناشی از بار متحرک است؛ چرا که نه فقط مقادیر جابجایی بیشینه با اختلاف کمتر از ۳٪ قابل محاسبه است، بلکه سایر پاسخ‌های دینامیکی سیستم شامل دامنه و فاز ورودی و خروجی تحریک نیز با دقت مطلوبی حاصل شده است. لذا، مدل نیمه تحلیلی پیشنهادی قادر است تا برآورد مطلوبی از رفتار دینامیکی حاکم بر تیرهای خمیده و تحت تحریک ناشی از جرم متحرک به همراه داشته باشد.

۵. مطالعات پارامتری

در بخش کنونی، تأثیر متغیرهای کلیدی حاکم بر مسئله، شامل: (۱) طول تیر خمیده، (۲) زاویه‌ی مرکزی تیر خمیده، (۳) جرم جسم متحرک، (۴) سرعت

جدول ۲. مشخصات مکانیکی و هندسی مقطع تیر خمیده. [۴۷]

متغیر (واحد)	نماد	کمیت
طول (m)	L	۱۰۰-۷۵-۵۰
زاویه‌ی مرکزی (rad)	ϕ	$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$
سطح مقطع (cm ^۲)	A	۷۶٫۷۰
جرم واحد طول (kg/m)	μ	۶۰٫۲۱
مدول کشسانی (GPa)	E	۲۱۰
ضریب پواسون	ν	۰٫۳۰
مدول برشی (GPa)	G	۸۰٫۷۷
فاصله‌ی مرکز برش از سطح فوقانی تیر (cm)	y _s	۱۲٫۴۹
ممان اینرسی حول محور y (cm ^۴)	I _y	۵۱۲٫۳۰
ممان اینرسی حول محور z (cm ^۴)	I _z	۳۰۳٫۸۳۰
ممان اینرسی قطبی (cm ^۴)	I _o	۳۵۵۰٫۶۰

جدول ۳. مؤلفه‌های دینامیکی جسم متحرک. [۴۷-۴۹]

متغیر (واحد)	نماد	کمیت
جرم جسم (kg)	M	۱۲۰۰۰، ۸۰۰۰، ۱۶۰۰۰
سرعت اولیه‌ی حرکت شتابدار فزاینده (m/sec)	V _۰	۳۰ - ۰
سرعت اولیه‌ی حرکت شتابدار کاهنده (m/sec)		۷۵ - ۴۵
شتاب فزاینده (m/sec ^۲)		+۳، +۶، +۹
شتاب کاهنده (m/sec ^۲)	a	-۳، -۶، -۹

جدول ۴. مؤلفه‌های مکانیکی بستر ویسکوکشسان. [۱۵، ۱۶، ۴۳، ۴۴ و ۵۰]

متغیر (واحد)	نماد	کمیت
سختی بستر ارتجاعی (kN/m ^۲)	k _y	۳۴۲۶
سختی پیچشی (kN/rad)	k _r	۱۱۸٫۳
میرایی بستر ارتجاعی (kNsec/m ^۲)	c _y	۲٫۴۵
میرایی پیچشی (Nrad/sec)	c _r	۸٫۰۶۷

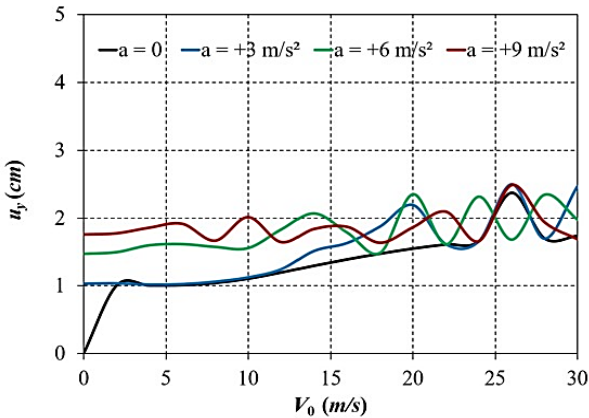
اولیه‌ی ورود جسم به تیر خمیده، و (۵) شتاب کاهنده/ فزاینده‌ی جسم ارزیابی شده است. سایر پارامترهای مسئله، مانند: مشخصات مکانیکی بستر ویسکو-کشسان، [۱۵، ۱۶، ۴۳ و ۴۴] مشخصات هندسی تیر خمیده، [۴، ۱۶، ۴۵ و ۴۶] با استناد به مقادیر کاربردی در ادبیات فنی استفاده شده‌اند. مقادیر اخیر در جدول‌های ۲ الی ۴ خلاصه شده‌اند، که به ترتیب مربوط به مشخصات مکانیکی و هندسی تیر خمیده، مؤلفه‌های دینامیکی جرم متحرک، و نیز مشخصات مکانیکی خاک بستر هستند.

همان‌طور که در زیربخش ۲.۲ (فرضیات) اشاره شده است، سرعت اولیه‌ی ورود جرم و نیز شتاب‌های کاهنده به‌گونه‌ی در نظر گرفته شده‌اند که انواع حالت

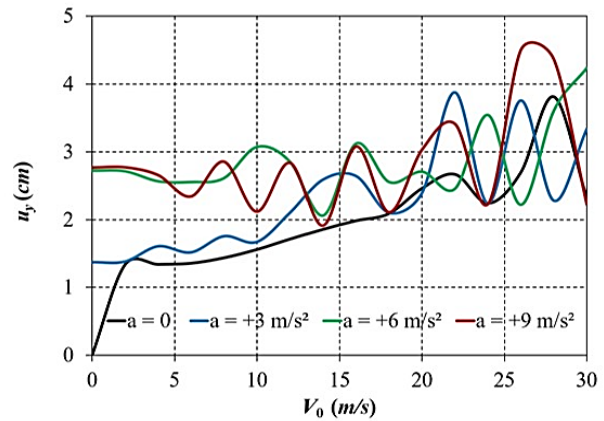
۶. تحلیل و تفسیر نتایج

در شکل‌های ۳ الی ۶، طیف‌های پاسخ جابجایی و لنگر خمشی خارج از صفحه تیرهای خمیده به ازاء تغییرات پارامترهای مختلف بر حسب سرعت اولیه ورود به تیر (V_0) ارائه شده‌اند. منظور از طیف، نمودار بیشینه‌ی پاسخ سیستم بر حسب سرعت اولیه‌ی جرم متحرک است. به‌منظور سهولت، بیشینه‌ی جابجایی خارج از صفحه با u_y نشان داده شده است، تا تمایز آن با تاریخچه‌ی پاسخ جابجایی (W_y) مشخص شود.

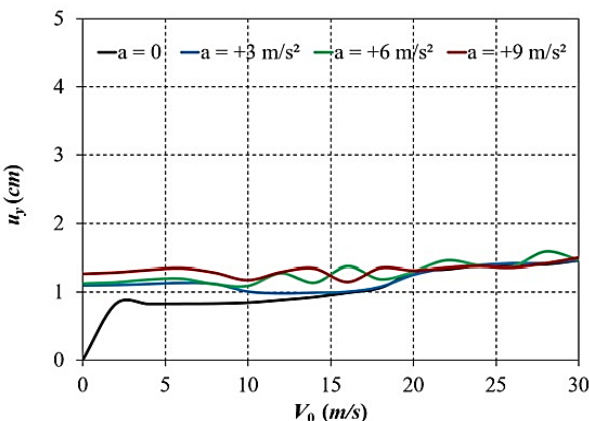
همان‌طور که در زیربخش ۲.۲ (فرضیات) اشاره شده است، سرعت اولیه‌ی ورود جرم و نیز شتاب‌های کاهنده به‌گونه‌یی در نظر گرفته شده‌اند که انواع حالت‌های محتمل شامل: (۱) جرم پیش از رسیدن به انتهای تیر بایستد، (۲) جرم دقیقاً در انتهای تیر متوقف شود، و (۳) جرم با سرعت $V = \sqrt{V_0^2 \pm 2|a|L}$ از انتهای تیر عبور کند، در پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده ارزیابی شود. همچنین، به‌منظور مقایسه‌ی تأثیر شتاب کاهنده/افزاینده، حالتی که جسم با سرعت ثابت (شتاب صفر) از تیر عبور می‌کند، نیز در محاسبات منظور شده است.



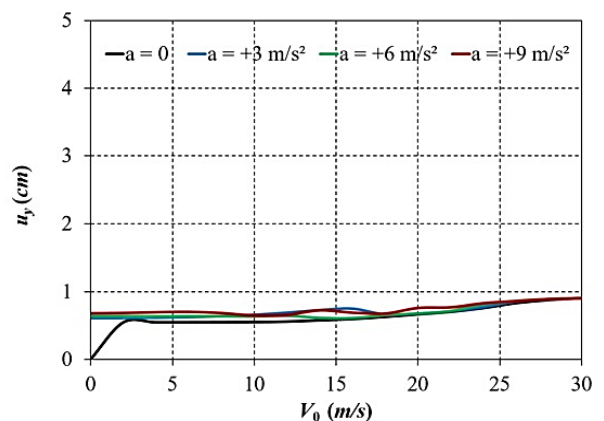
(ب) $M=1200 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$, $L=5 \text{ m}$



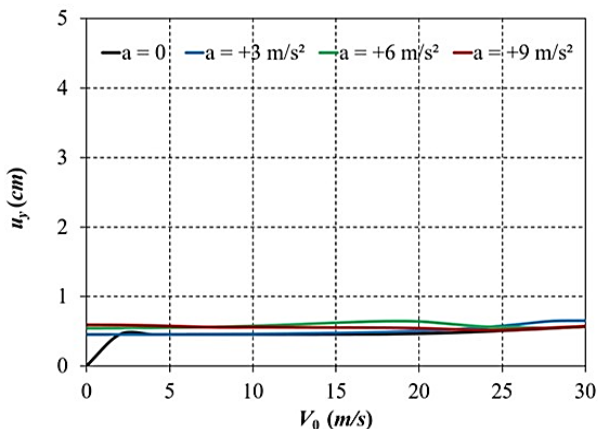
(الف) $M=1600 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$, $L=5 \text{ m}$



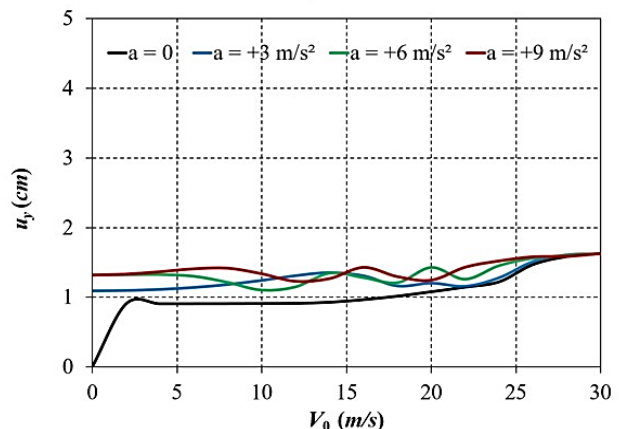
(د) $M=1200 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$, $L=7.5 \text{ m}$



(ج) $M=800 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$, $L=7.5 \text{ m}$

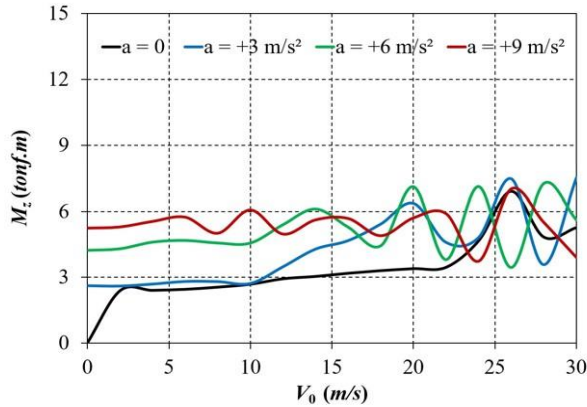


(و) $M=800 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$, $L=10 \text{ m}$

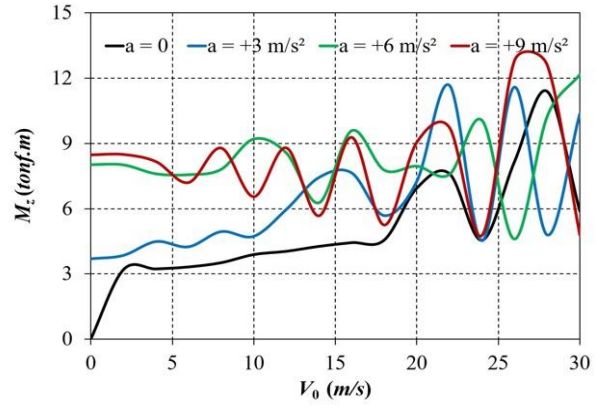


(ه) $M=1600 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$, $L=10 \text{ m}$

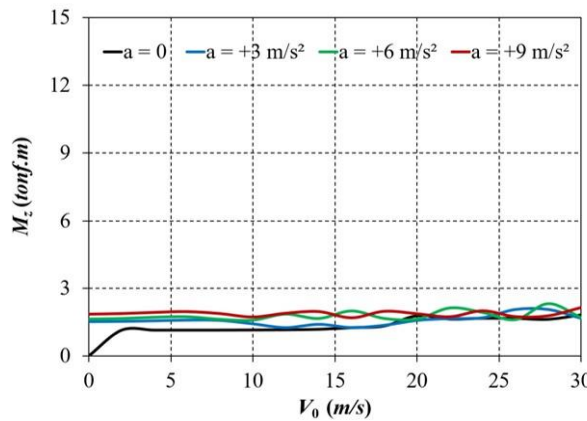
شکل ۳. نمودار طیف پاسخ جابه‌جایی خارج از صفحه در حالت شتاب فزاینده.



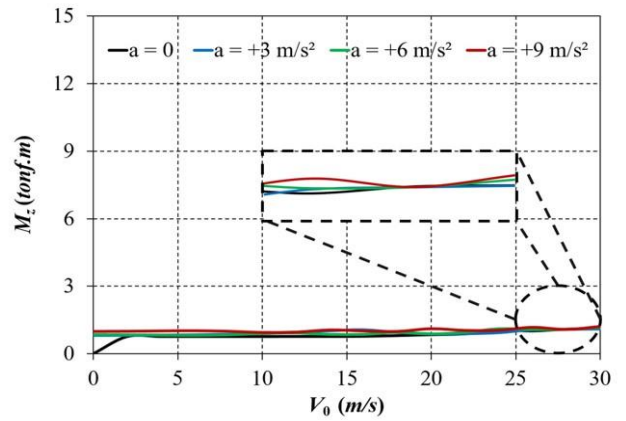
$M=12000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$ ، $L=50 \text{ m}$ (ب)



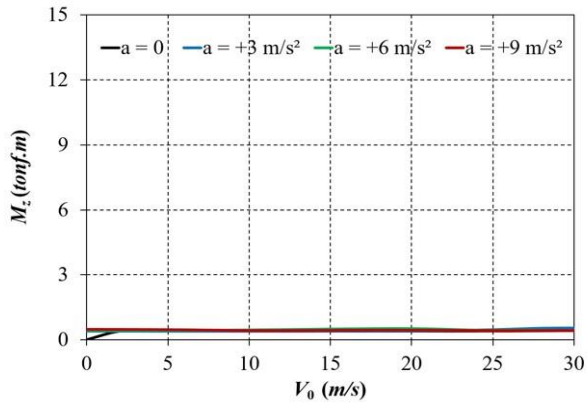
$M=16000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$ ، $L=50 \text{ m}$ (الف)



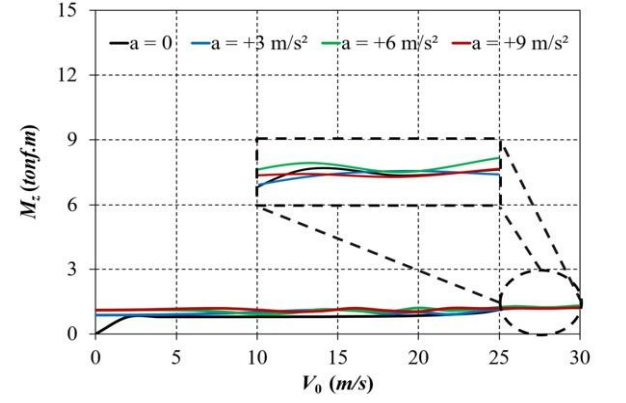
$M=12000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$ ، $L=75 \text{ m}$ (د)



$M=8000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$ ، $L=75 \text{ m}$ (ج)



$M=8000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$ ، $L=100 \text{ m}$ (و)



$M=16000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$ ، $L=100 \text{ m}$ (ه)

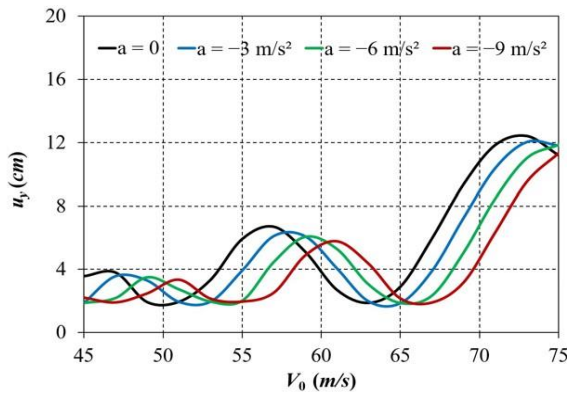
شکل ۴. نمودار طیف پاسخ لنگر خمشی در حالت شتاب فزاینده.

پاسخ مقادیر لنگر خمشی خارج از صفحه (M_z)، مشخص شود. مطابق طیف-های مربوط به شتاب فزاینده، اگر سرعت اولیه ی ورود جرم متحرک به تیر خمیده کمتر از ۵ (m/sec) باشد، اثر سرعت اولیه در پاسخ دینامیکی سیستم، شامل جابجایی و لنگر خمشی خارج از صفحه نامحسوس است. مطابق شکل های ۳ و ۴، پس از سرعت مذکور، آثار مؤلفه های دینامیکی در پاسخ سیستم تشدید شده است، به طوری که بیشینه ی میزان افزایش طیف پاسخ جابجایی نسبت به حالت سرعت ثابت، به ازاء شتاب های فزاینده ۳، ۶، و ۹ (m/sec^2)، به ترتیب ۱۵/۷۶، ۱۴/۴۵، و ۱۸/۱۱ درصد بوده است. مقادیر نظیر

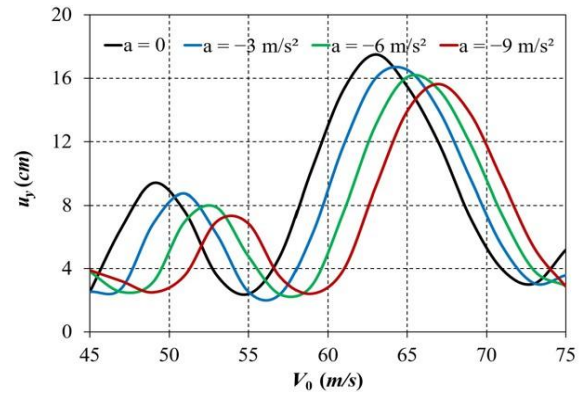
در شکل های ۳ و ۴، اثر حرکت تندشونده (شتاب فزاینده) و در شکل های ۵ و ۶، حرکت کندشونده (شتاب کاهشنده) بررسی شده اند. این تذکر لازم است که لنگر خمشی خارج از صفحه (M_z)، مطابق رابطه ی ۱۷ محاسبه شده است. [۱۶]

$$m_z = EI_z \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} - \frac{\theta_x}{R} \right) \quad (17)$$

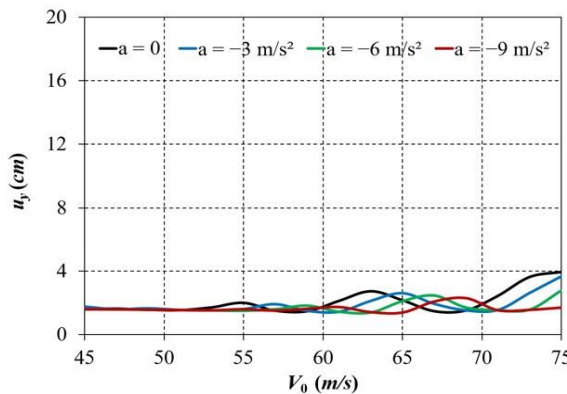
برای سهولت، بیشینه ی مقادیر لنگر خمشی در شکل های مربوط به طیف لنگر خمشی خارج از صفحه با M_z نشان داده شده است، تا تمایز آن با تاریخچه ی



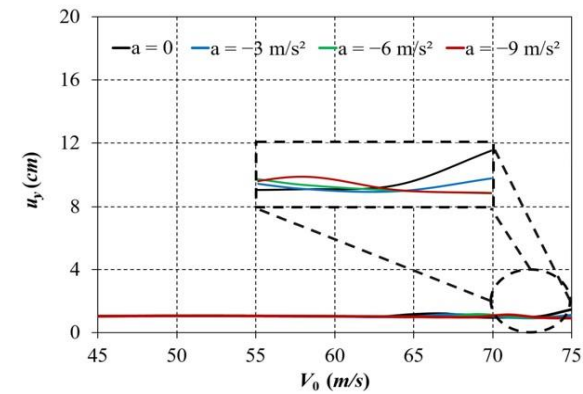
$M=1200 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/4 \text{ rad}$, $L=50 \text{ m}$ (ب)



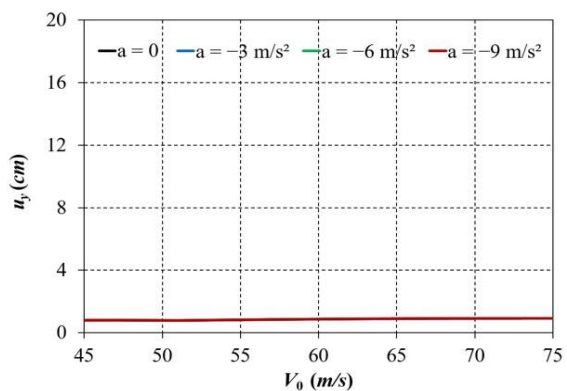
$M=1600 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$, $L=50 \text{ m}$ (الف)



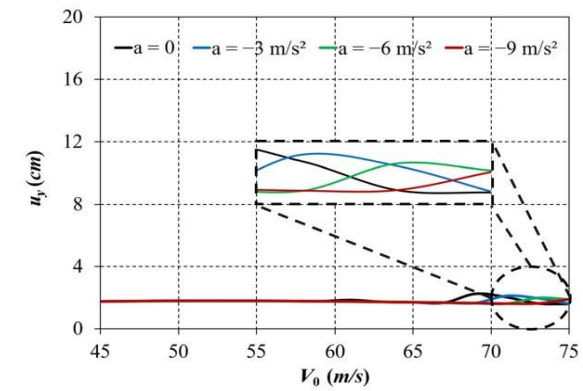
$M=1200 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/4 \text{ rad}$, $L=75 \text{ m}$ (د)



$M=800 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$, $L=75 \text{ m}$ (ج)



$M=800 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/4 \text{ rad}$, $L=100 \text{ m}$ (ه)



$M=1600 \text{ kg}$, $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$, $L=100 \text{ m}$ (ح)

شکل ۵. نمودار طیف پاسخ جابجایی خارج از صفحه در حالت شتاب کاهنده.

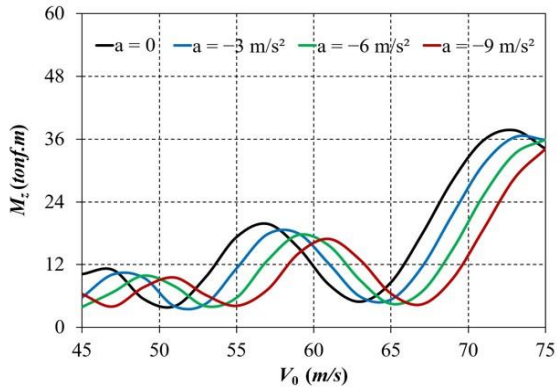
نوسانی تیر تحت تحریک خارجی از فرم هارمونیک به دور است (به نوشتار آبدوس و همکاران (۲۰۲۰)^[۱۶] مراجعه شود)، تغییرات بیشینه‌ی طیف در شتاب‌های فزاینده از روند مشخصی پیروی نمی‌کند. اما، در حرکت گُندشونده، با توجه به سرعت‌های منظور شده در نتایج عددی، که خارج از ناحیه‌ی انتقالی قرار گرفته و ماهیت پاسخ‌ها فرم هارمونیک داشته‌اند، روند تغییرات آن نسبت به حالت تندشونده و به ازاء مقادیر بررسی‌شده معنی‌دارتر بوده است.

همچنین، جمع‌بندی درصد‌های افزایش و کاهش بیشینه‌ی پاسخ طیف جابجایی و لنگر خمشی خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده‌ی بررسی‌شده تحت سرعت اولیه، جرم، و شتاب‌های مختلف جسم متحرک در جدول‌های ۵ و ۶ خلاصه شده است.

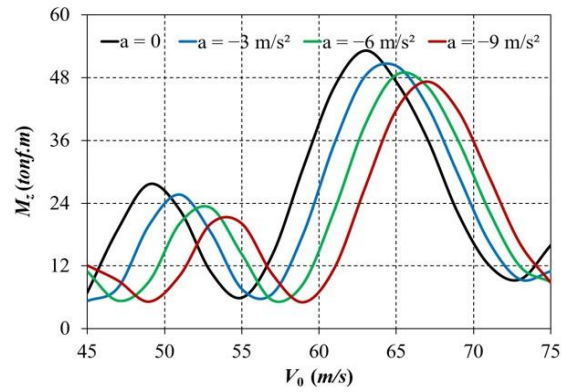
برای طیف لنگر نیز به ترتیب ۲۷٫۰۳، ۲۷٫۵۳، و ۱۸٫۳۹ درصد بوده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تأثیر اندازه‌ی شتاب فزاینده در طیف پاسخ لنگر خمشی نسبت به جابجایی بیشتر بوده است.

در حرکت گُندشونده، مطابق شکل‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌شود که بیشینه‌ی مقدار کاهش بیشینه‌ی طیف جابجایی نسبت به حالت سرعت ثابت، به ازاء شتاب‌های کاهنده ۳، ۶، و ۹ (m/sec^2)، به ترتیب ۲۱٫۳۳، ۲۹٫۷۸، و ۴۱٫۵۹ درصد است. در طیف لنگر خمشی، مقادیر اخیر به ترتیب ۲۱٫۶۴، ۳۰٫۱۹، و ۴۲٫۰۵ درصد بوده‌اند.

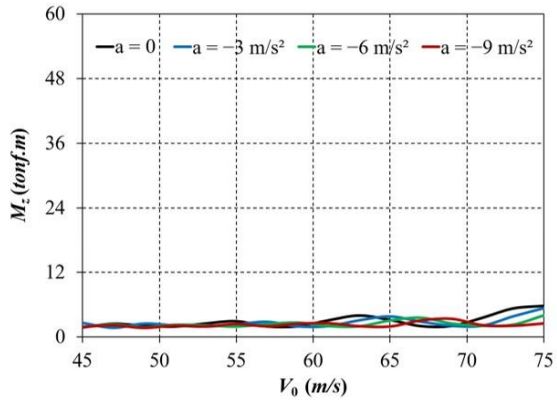
براساس شکل‌های ۳ الی ۶، به دلیل قرار گرفتن سرعت‌های کمتر از ۳۰ متر بر ثانیه، که در حرکت تندشونده منظور شده‌اند؛ در ناحیه‌ی انتقالی که ماهیت



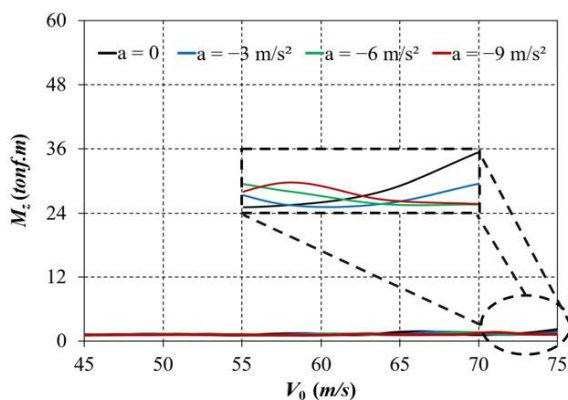
الف) $M=12000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$ ، $L=50 \text{ m}$



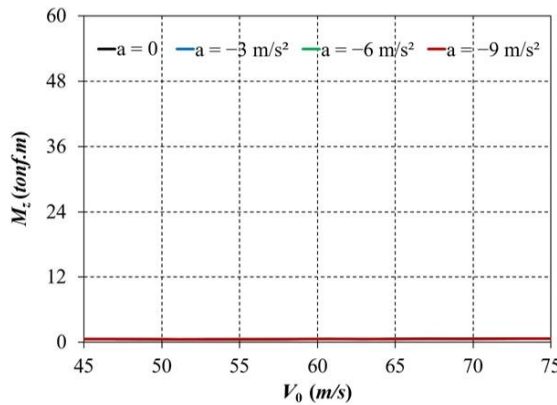
ب) $M=16000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$ ، $L=50 \text{ m}$



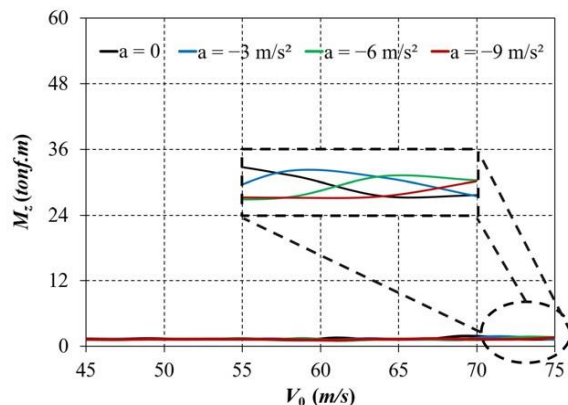
ج) $M=12000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$ ، $L=75 \text{ m}$



د) $M=8000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$ ، $L=75 \text{ m}$



ه) $M=8000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$ ، $L=100 \text{ m}$



ز) $M=16000 \text{ kg}$ ، $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$ ، $L=100 \text{ m}$

شکل ۶. نمودار طیف پاسخ لنگر خمشی در حالت شتاب کاهشده.

جدول ۵. درصد افزایش بیشینه‌ی پاسخ طیف نسبت حالت سرعت ثابت ($a=0$).

$a=9 \text{ m/s}^2$	$a=6 \text{ m/s}^2$	$a=3 \text{ m/s}^2$	شماره‌ی شکل	$a=9 \text{ m/s}^2$	$a=6 \text{ m/s}^2$	$a=3 \text{ m/s}^2$	شماره‌ی شکل	حرکت تندشونده (شتاب فزاینده)
۱۲,۵۵	۶,۶۸	۲,۴۷	الف - ۵	۱۸,۱۱	۱۱,۱۹	۱,۶۴	الف - ۴	
۱,۵۹	۴,۹۲	۸,۸۸	ب - ۵	۴,۷۱	۰,۸۹	۵,۳۴	ب - ۴	
۱۰,۴۵	۵,۹۴	۰,۴۱	ج - ۵	۰,۸۲	۰,۳۸	۰,۱۰	ج - ۴	
۱۸,۳۹	۲۷,۵۳	۱۲,۹۱	د - ۵	۲,۹۳	۸,۷۸	۰,۳۰	د - ۴	
۰,۴۰	۵,۶۵	۰,۷۹	ه - ۵	۰,۲۶	۰,۲۹	۰,۰۰	ه - ۴	
۱۵,۹۸	۲۵,۱۴	۲۷,۰۳	و - ۵	۵,۰۰	۱۴,۴۵	۱۵,۷۶	و - ۴	

جدول ۶. درصد کاهش بیشینه‌ی پاسخ طیف نسبت حالت سرعت ثابت ($a=0$).

حرکت کندشونده (شتاب کاهنده)	شماره‌ی شکل	$a=9 \text{ m/s}^2$	$a=6 \text{ m/s}^2$	$a=3 \text{ m/s}^2$	شماره‌ی شکل	$a=9 \text{ m/s}^2$	$a=6 \text{ m/s}^2$	$a=3 \text{ m/s}^2$
	۶- الف	۱۰٫۷۲	۸٫۱۸	۵٫۵۶	۷- الف	۱۱٫۱۵	۸٫۶۶	۵٫۵۴
	۶- ب	۸٫۷۲	۴٫۳۴	۳٫۰۷	۷- ب	۹٫۳۸	۴٫۶۲	۳٫۴۳
	۶- ج	۲۳٫۳۰	۲۱٫۹۱	۲۱٫۳۳	۷- ج	۲۳٫۶۳	۲۲٫۲۴	۲۱٫۶۴
	۶- د	۴۱٫۵۹	۲۹٫۷۸	۷٫۳۶	۷- د	۴۲٫۰۵	۳۰٫۱۹	۷٫۶۴
	۶- ه	۱۵٫۸۲	۱۰٫۷۷	۵٫۴۹	۷- ه	۱۵٫۹۴	۱۰٫۸۵	۵٫۵۳
	۶- و	۰٫۰۸	۰٫۰۵	۰٫۰۳	۷- و	۰٫۰۴	۰٫۰۴	۰٫۰۱

مرکزی و نیز پارامترهای دینامیکی تحریک خارجی، شامل: سرعت اولیه، جرم، و اندازه‌ی شتاب فزاینده/ کاهنده‌ی جسم متحرک انجام شده است.

براساس نتایج به‌دست‌آمده مشاهده شد که بجز در سرعت‌های اولیه‌ی کمتر از حدود ۵ متر بر ثانیه، آثار شتاب فزاینده در طیف پاسخ دینامیکی سیستم حائز اهمیت است. همچنین، با توجه به اینکه در شتاب‌های تندشونده، بازه‌ی سرعت اولیه‌ی بررسی‌شده به‌گونه‌ی است که شرایط سیستم در ناحیه‌ی انتقالی سرعت قرار می‌گیرد، لذا روند تغییرات مشخصی را از پاسخ سیستم نمی‌توان انتظار داشت. این در حالی است که در حالت شتاب کندشونده، با توجه به بازه‌ی سرعت‌های اولیه‌ی ورود جرم متحرک به تیر خمیده، ماهیت نوسانی آن برجسته‌تر بوده و روند مشخص‌تری داشته است.

با توجه به کاربری‌بودن بازه‌ی تغییرهای متغیرهای در نظر گرفته‌شده در مطالعات پارامتریک، آثار حرکت شتابدار جسم متحرک می‌تواند قابل‌ملاحظه باشد، به‌گونه‌ی که برای پاسخ جابجایی و لنگر خمشی خارج از صفحه در حالت شتاب تندشونده به ترتیب ۱۸٫۱۱ و ۲۷٫۵۳ درصد افزایش، و برای حالت شتاب کندشونده، به ترتیب ۴۱٫۵۹ و ۴۲٫۰۵ درصد کاهش نسبت به وضعیت سرعت ثابت در پاسخ دینامیکی سیستم مشاهده می‌شود.

شایان ذکر است که نتایج حاصل از مطالعات پارامتریک انجام‌شده در بازه‌ی در نظر گرفته‌شده برای مقادیر متغیرهای ورودی، شامل: طول و زاویه‌ی مرکزی تیر خمیده و نیز جرم، سرعت اولیه‌ی ورود به تیر، و شتاب‌های کاهنده و فزاینده‌ی جرم متحرک معتبر هستند.

۷. نتیجه‌گیری

در مطالعه‌ی حاضر، به آثار ناشی از حرکت شتابدار جرم متحرک در پاسخ دینامیکی خارج از صفحه‌ی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق پرداخته شده است. در ابتدا، معادله‌های تعادل دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه‌ی افق تحت تحریک ناشی از حرکت شتابدار با شتاب ثابت فزاینده/ کاهنده یک جرم نوشته شده و با انتخاب توابع سینوسی، با در نظر گرفتن شرایط تکیه‌گاهی ساده، برای تیرهای خمیده، فرم کلی آن تعیین شده است. سپس، طیف پاسخ دینامیکی سیستم مذکور براساس بیشینه‌ی مقادیر جابجایی خارج و لنگر خمشی از صفحه ارائه شده است.

براساس روابط نیمه‌تحلیلی به‌دست‌آمده، مطالعات پارامتریک برای در نظر گرفتن اثر هندسه‌های مختلف از تیرهای خمیده، شامل: طول و زاویه‌ی

References- منابع

- Abdoos, H. and Khaloo, A.R., 2024. Failure mechanism of a curved RC shear wall subjected to cyclic loading: Experimental findings. *Engineering Structures*, 304, p. 117703. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.117703>.
- Beskou, N.D. and Theodorakopoulos, D.D., 2011. Dynamic effects of moving loads on road pavements: A review. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 31 (4), pp. 547–567. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2010.11.002>.
- Frýba, L., 2013. *Vibration of solids and structures under moving loads*, Springer Science & Business Media.
- Foyouzat, M.A., Abdoos, H. and Khaloo, A.R., Mofid, M., 2022. In-plane vibration analysis of horizontally curved beams resting on visco-elastic foundation subjected to a moving mass. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 172, p. 109013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109013>.
- Khaloo, A.R., Foyouzat, M.A., Abdoos, H. and Mofid, M., 2023. Axial force contribution to the out-of-plane response of horizontally curved beams under a moving mass excitation. *Applied Mathematical Modelling*, 115, pp. 148–172. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.10.047>.
- Christiano, P.P. and Culver, C.G., 1969. Horizontally curved bridges subject to moving load. *Journal of Structural Division*, 95 (8), pp.1615-1643. DOI: <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0002331>.
- Chaudhuri, S.K. and Shore, S., 1977. Dynamic analysis of horizontally curved I-girder bridges. *Journal of Structural Division*, 103 (8), pp.1589-1604. DOI: <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0004696>.

8. Nair, S., Garg, V.K. and Lai, Y.S., 1985. Dynamic stability of a curved rail under a moving load. *Applied Mathematical Modelling*, 9 (3), pp. 220–224. DOI: [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(85\)90011-3](https://doi.org/10.1016/0307-904X(85)90011-3)
9. Galdos, N.H., Schelling, D.R. and Sahin, M.A., 1993. Methodology for impact factor of horizontally curved box bridges. *Journal of Structural Engineering*, 119 (6), pp. 1917–1934. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1993\)119:6\(1917\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1993)119:6(1917))
10. Huang, D., Wang, T.-L. and Shahawy, M., 1998. Vibration of horizontally curved box girder bridges due to vehicles. *Computers & Structures*, 68 (5), pp. 513–528. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00065-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00065-0)
11. Howson, W.P. and Jemah, A.K., 1999. Exact out-of-plane natural frequencies of curved Timoshenko beams. *Journal of Engineering Mechanics*, 125 (1), pp. 19–25. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:1\(19\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:1(19))
12. Yang, Y.-B., Wu, C.-M. and Yau, J.-D., 2001. Dynamic response of a horizontally curved beam subjected to vertical and horizontal moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 242 (3), pp. 519–537. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3355>
13. Lee, B.K., Oh, S.J. and Park, K.K., 2002. Free vibrations of shear deformable circular curved beams resting on elastic foundations. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2 (01), pp. 77–97. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455402000440>
14. Zboinski, K. and Dusza, M., 2010. Self-exciting vibrations and Hopf's bifurcation in non-linear stability analysis of rail vehicles in a curved track. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 29 (2), pp. 190–203. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.10.001>
15. Dai, J. and Ang, K.K., 2015. Steady-state response of a curved beam on a viscously damped foundation subjected to a sequence of moving loads. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 229 (4), pp. 375–394. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954409714563366>
16. Abdoos, H., Khaloo, A.R. and Foyouzat, M.A., 2020. On the out-of-plane dynamic response of horizontally curved beams resting on elastic foundation traversed by a moving mass. *Journal of Sound and Vibration*, 479, p. 115397. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115397>
17. Abdoos, H., Foyouzat and M.A., Khaloo, A.R., 2023. Parametric study on the dynamics of horizontally curved beams due to a moving inertial load considering the induced torsional moment. *Journal of Structural and Construction Engineering*, 10 (8), pp. 141-160. DOI: <https://doi.org/10.22065/jsce.2023.368612.2964>
18. Lin, J. and Niemeier, D.A., 2002. An exploratory analysis comparing a stochastic driving cycle to California's regulatory cycle. *Atmospheric Environment*, 36 (38), pp. 5759–5770. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1352-2310\(02\)00695-7](https://doi.org/10.1016/S1352-2310(02)00695-7)
19. Ho, S.-H., Wong, Y.-D. and Chang, V.W.-C., 2014. Developing Singapore Driving Cycle for passenger cars to estimate fuel consumption and vehicular emissions. *Atmospheric Environment*, 97, pp. 353–362. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2014.08.042>
20. Kokhmanyuk, S.S. and Filippov, A.P., 1967. Dynamic effects on a beam of a load moving at variable speed. *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet so-Oruzhenii*, 9 (2), pp. 36–39.
21. Krylov, V.V., 1996. Generation of ground vibrations by accelerating and braking road vehicles. *Acta Acustica United with Acustica*, 82 (4), pp. 642–649.
22. Zibdeh, H.S. and Rackwitz, R., 1996. Moving loads on beams with general boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 195 (1), pp. 85–102. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0405>
23. Abu-Hilal, M., Mohsen, M., 2000. Vibration of beams with general boundary conditions due to a moving harmonic load. *Journal of Sound and Vibration*, 232 (4), pp. 703–717. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2771>
24. Dugush, Y.A. and Eisenberger, M., 2002. Vibrations of non-uniform continuous beams under moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 254 (5), pp. 911–926. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4135>
25. Michaltsos, G.T., 2002. Dynamic behaviour of a single-span beam subjected to loads moving with variable speeds. *Journal of Sound and Vibration*, 258 (2), pp. 359–372. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5141>
26. Zibdeh, H.S., and Abu-Hilal, M., 2003. Stochastic vibration of laminated composite coated beam traversed by a random moving load. *Engineering*

- Structures, 25 (3), pp. 397–404. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(02\)00181-5](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(02)00181-5).
27. Peng, X., Liu, Z.J. and Hong, J.W., 2006. Vibration analysis of a simply supported beam under moving mass with uniformly variable speeds. *Engineering mechanics*, 23 (6), pp. 25-29.
 28. Li, M., Qian, T., Zhong, Y. and Zhong, H., 2014. Dynamic response of the rectangular plate subjected to moving loads with variable velocity. *Journal of Engineering Mechanics*, 140 (4). DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000687](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000687).
 29. Powell, J.P. and Palacín, R., 2015. Passenger stability within moving railway vehicles: Limits on maximum longitudinal acceleration. *Urban Rail Transit*, 1, pp. 95–103. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40864-015-0012-y>.
 30. Beskou, N.D., and Muho, E.V., 2018. Dynamic response of a finite beam resting on a Winkler foundation to a load moving on its surface with variable speed. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 109, pp. 222–226. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.02.033>.
 31. Liu, Y., Fang, H., Zheng, J.J. and Wang, Y.N., 2021. Dynamic behaviour of pavement on a two-parameter viscoelastic foundation subjected to loads moving with variable speeds. *International Journal of Pavement Engineering*, 23 (10), pp. 3425-3443. DOI: <https://doi.org/10.1080/10298436.2021.1899178>.
 32. Piovan, M.T., Cortinez, V.H. and Rossi, R.E., 2000. Out-of-plane vibrations of shear deformable continuous horizontally curved thin-walled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 237 (1), pp. 101–118. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3055>.
 33. Yang, Y.-B. and Kuo, S.-R., 1987. Effect of curvature on stability of curved beams. *Journal of Structural Engineering*, 113 (6), pp. 1185–1202. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1987\)113:6\(1185\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1987)113:6(1185))
 34. Yang, Y.-B., Yau, J.D., Yao, Z. and Wu, Y.S., 2004. *Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways*. World Scientific.
 35. Foyouzat, M.A., Mofid, M. and Akin, J.E., 2016. On the dynamic response of beams on elastic foundations with variable modulus. *Acta Mechanica*, 227 (2), pp. 549-564. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1485-1>.
 36. Foyouzat, M.A., Estekanchi, H.E. and Mofid, M., 2018. An analytical-numerical solution to assess the dynamic response of viscoelastic plates to a moving mass. *Applied Mathematical Modelling*, 54, pp. 670–696. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.07.037>.
 37. Alile, M.R., Foyouzat, M.A. and Mofid, M., 2024. Parametric investigation of the dynamic response of a circular plate excited by a two-degree-of-freedom moving oscillator with inclusion of surface roughness. *Archive of Applied Mechanics*, 94 (2), pp. 347-364. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-023-02524-y>.
 38. Moradi, S., Azam, S.E. and Mofid, M., 2021. On Bayesian active vibration control of structures subjected to moving inertial loads. *Engineering Structures*, 239, p. 112313. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112313>.
 39. Azam, S.E., Didyk, M.M., Linzell, D. and Rageh, A., 2022. Experimental validation and numerical investigation of virtual strain sensing methods for steel railway bridges. *Journal of Sound and Vibration*, 537, p. 117207. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117207>.
 40. Alile, M.R., Foyouzat, M.A. and Mofid, M., 2022. Vibration of a circular plate on Pasternak foundation with variable modulus due to moving mass. *Structural Engineering and Mechanics*, 83 (6), pp. 757–770. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2022.83.6.757>.
 41. Brogan, W.L., 1991. *Modern control theory*, Pearson Education India.
 42. Foyouzat, M.A., 2023. Separation/recontact investigation of a travelling oscillator over a plate with inclusion of surface roughness. *Thin-Walled Structures*, 183, p. 110373. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110373>.
 43. Foyouzat, M.A., Mofid, M. and Akin, J.E., 2016. Free vibration of thin circular plates resting on an elastic foundation with a variable modulus. *Journal of Engineering Mechanics*, 142(4), p.04016007. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001050](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001050).
 44. Foyouzat, M.A. and Mofid, M., 2019. An analytical solution for bending of axisymmetric circular/annular plates resting on a variable elastic foundation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 74, pp.462-470. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.006>.
 45. Chin, W.W., 1998. The partial least squares approach to structural equation modeling. *Modern Methods for Business Research*, 295, pp. 295–336.

46. Division, T.P., 2009. MOD UK Railways Permanent Way Design and Maintenance Policy and Standards Issue 4.
47. Vitez, I., Krumes, D. and Vitez, B., 2005. UIC-recommendations for the use of rail steel grades. *Metalurgija*, 44 (2), pp. 137–140.
48. Abdel-Rohman, M. and Al-Duaij, J., 1996. Dynamic response of hinged-hinged single span bridges with uneven deck. *Computers and Structures*, 59 (2), pp. 291–299. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(95\)00262-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00262-6).
49. He, W., 2018. Vertical dynamics of a single-span beam subjected to moving mass-suspended payload system with variable speeds. *Journal of Sound and Vibration*, 418, pp. 36–54. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.12.030>
50. Foyouzat, M.A. and Estekanchi, H.E., 2017. Dynamic response of thin plates on time-varying elastic point supports. *Structural Engineering and Mechanics*, 62 (4), pp. 431–441. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2017.62.4.431>.