

اثرات غیرخطی ضعیف جریان سیال لایه‌ی بر روی حرکت امواج برشی

میرمصدق جمالی (دانشیار)

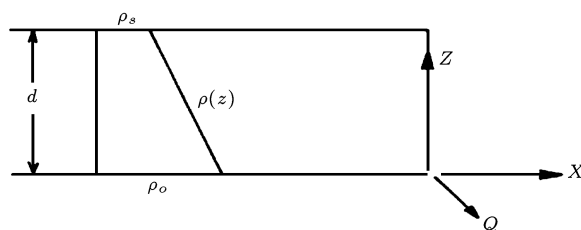
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

آب مخازن پشت سدها در بیشتر اوقات سال دارای لایه‌بندی جرمی است. در چنین حالتی، تخلیه‌ی آب از مخزن سد به شرط آنکه دبی خروجی زیاد نباشد، تنها از لایه‌ی آب همسطح دریچه صورت می‌گیرد. این پدیده که به «تخلیه‌ی گزینشی^۱» معروف است. در حوزه‌ی مدیریت کیفیت آب مخازن پدیده‌ی شناخته‌شده‌ی است، و در مخازن بر اثر حرکت امواجی بنام «امواج برشی» ایجاد می‌شود. نتایج مطالعات قبلی نشان می‌دهد که با باز شدن ناگهانی دریچه تعداد نامحدودی امواج برشی در محل دریچه تشکیل می‌شود که این امواج با سرعت‌های متفاوتی به بالادست مخزن حرکت می‌کنند. با حرکت هریک از این امواج، توزیع سرعت در داخل مخزن چنان تغییر می‌کند که سرعت افقی در سطح دریچه بیشتر و در لایه‌های دیگر کاهش یافته و در نتیجه تخلیه‌ی گزینشی شکل می‌گیرد. نهایتاً جریان در مخزن هنگامی دائمی می‌شود که حرکت امواج برشی توسط جریان مخزن متوقف، یا بر اثر لزجت سیال میرا شوند. در این نوشتار، با فرض کوچک بودن دبی خروجی، اثرات غیرخطی ضعیف^۲ جریان پایه روی سازوکار پدیده‌ی تخلیه‌ی گزینشی با استفاده از روش تحریک چندمقیاسی^۳ مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. نتایج حاصله دلالت بر این دارند که غیرخطی شدن جریان باعث کاهش سرعت امواج برشی می‌شود.

مقدمه

در مطالعات و شناسایی‌های اولیه پیرامون سازوکار ایجاد پدیده‌ی تخلیه‌ی گزینشی^[۱]، جریان غیردائمی یک سیال با لایه‌بندی خطی^۴ در اثر باز شدن ناگهانی یک دریچه‌ی نواری (خروجی خطی^۵) در یک مخزن مستطیل شکل طویل مورد بررسی نظری و آزمایشگاهی قرار گرفت. شکل ۱ نمای مسئله‌ی بررسی شده را نشان می‌دهد. محققین حل تحلیلی جریان را در صورت کم بودن جریان خروجی، و با استفاده از خطی‌سازی معادلات ارائه دادند^[۱] و برای حالت کلی‌تر جریان، نسبت به حل عددی معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت سیال اقدام کردند. از مقایسه‌ی نتایج حاصله با نتایج آزمایشگاهی قبلی^[۲]، چنین نتیجه‌گیری می‌شود که با باز شدن ناگهانی دریچه تعداد نامحدودی امواج درونی، معروف به امواج برشی^۶ در محل دریچه تشکیل می‌شوند. این امواج که در حقیقت مودهای مختلف امواج درونی بلند^۷ هستند، با سرعت

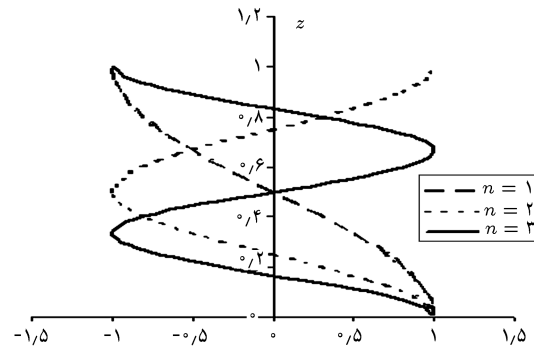
شکل ۱. نمای مسئله‌ی مطالعه شده توسط Pao & Kao^[۱].



شکل ۱. نمای مسئله‌ی مطالعه شده توسط Pao & Kao^[۱].

شکل ۱ نمای مسئله‌ی بررسی شده را نشان می‌دهد. محققین حل تحلیلی جریان را در صورت کم بودن جریان خروجی، و با استفاده از خطی‌سازی معادلات ارائه دادند^[۱] و برای حالت کلی‌تر جریان، نسبت به حل عددی معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت سیال اقدام کردند. از مقایسه‌ی نتایج حاصله با نتایج آزمایشگاهی قبلی^[۲]، چنین نتیجه‌گیری می‌شود که با باز شدن ناگهانی دریچه تعداد نامحدودی امواج درونی، معروف به امواج برشی^۶ در محل دریچه تشکیل می‌شوند. این امواج که در حقیقت مودهای مختلف امواج درونی بلند^۷ هستند، با سرعت $C_n = Nd/n\pi$ (که در آن N فرکانس طبیعی نوسانات در سیال، d عمق مخزن و n شماره مود موج است) به بالا دست حرکت می‌کنند. امواج در راستای افقی به شکل تابع پله‌ی، و در راستای قائم به شکل سینوسی و با طول موج $2d/n$ هستند. شکل ۲ پروفیل قائم این امواج را برای مودهای ۱ الی ۳ ($n = 1, 2, 3$) نشان می‌دهد. باید توجه داشت که سرعت حرکت امواج با شماره مود بزرگ‌تر کم‌تر است و در نتیجه امواج با شماره مود کوچک‌تر زودتر از یک نقطه از مخزن عبور می‌کنند. با گذشت هر موج از یک مقطع قائم مخزن، توزیع سرعت

جریان پایه با امواج برشی با استفاده از معادلات حاکم بر حرکت سیال مورد بررسی قرار می‌گیرد. از نظر هیدرودینامیک جریان، با افزایش دبی، اهمیت ترم‌های غیرخطی در معادلات حاکم بیشتر می‌شود. در این تحقیق با فرض کوچک بودن دبی خروجی، اثرات غیرخطی ضعیف جریان بر سازوکار پدیده‌ی تخلیه‌گزینه‌ی به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور معادلات هیدرودینامیک مربوطه استخراج شده و سپس با استفاده از روش «تحریک^{۱۱}» نسبت به حل معادلات حاکم تا اولین تقریب اندرکنش اقدام می‌شود. نتایج به دست آمده نهایتاً مورد بحث قرار می‌گیرند.



شکل ۲. پروفیل قائم مودهای ۱ تا ۳ امواج برشی.

معادلات پایه

یک مخزن دوعدی به طول نامحدود با درجه‌ی نواری را که در مرکز دستگاه مختصات $X-Z$ قرار دارد (شکل ۱) در نظر می‌گیریم. مخزن دارای سیالی تراکم‌ناپذیر و غیرلزج با لایه‌بندی خطی اولیه $\bar{\rho}(Z)$ است. فرکانس طبیعی نوسانات در یک سیال لایه‌یی، مشهور به «فرکانس برانت-سوايسالا^{۱۲}»، از رابطه‌ی $N = (-g/\rho_0 d \bar{\rho}(Z)/dZ)^{1/2}$ به دست می‌آید که در آن $\rho_0 = \bar{\rho}(0)$. برای لایه‌بندی خطی، این فرکانس عددی ثابت است و N^{-1} مقیاس زمانی مسئله را تشکیل می‌دهد. d عمق مخزن، و Q دبی واحد عرض است. t^* زمان، (u^*, w^*) سرعت و ρ^* چگالی سیال در هر لحظه است. معادلات حاکم بر مسئله عبارت‌اند از معادلات تعادل نیرو، پیوستگی و تراکم‌ناپذیری که در شکل بی‌بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. از پارامترهای d ، N^{-1} و $U = Q/d$ به ترتیب برای بی‌بعدسازی متغیرهای طولی، زمانی و سرعت در مسئله استفاده شده و در نتیجه سرعت‌ها، زمان و مختصات بی‌بعد به صورت $(u, w) = (u^*/U, w^*/U)$ ، $t = t^* N$ و $(x, z) = (X/d, Z/d)$ تعریف می‌شوند. با انجام عملیات روی معادلات اینرسی و با استفاده از معادله‌ی پیوستگی، معادله‌ی چرخش^{۱۳} به شکل بی‌بعد زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (1)$$

که در آن $F = Q/Nd^2$ عدد فرود چگالی سنجی^{۱۴}، $\zeta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$ چرخش و $\rho = (\rho^* - \bar{\rho}(Z))/(\rho_0 N Q/gd)$ شکل بی‌بعد شده‌ی تغییر چگالی در یک نقطه از محیط از حالت استاتیک اولیه است. در استخراج رابطه‌ی ۱ فرض شده است که تفاوت چگالی در سیال مخزن کوچک است (معروف به فرض بوزینسک).

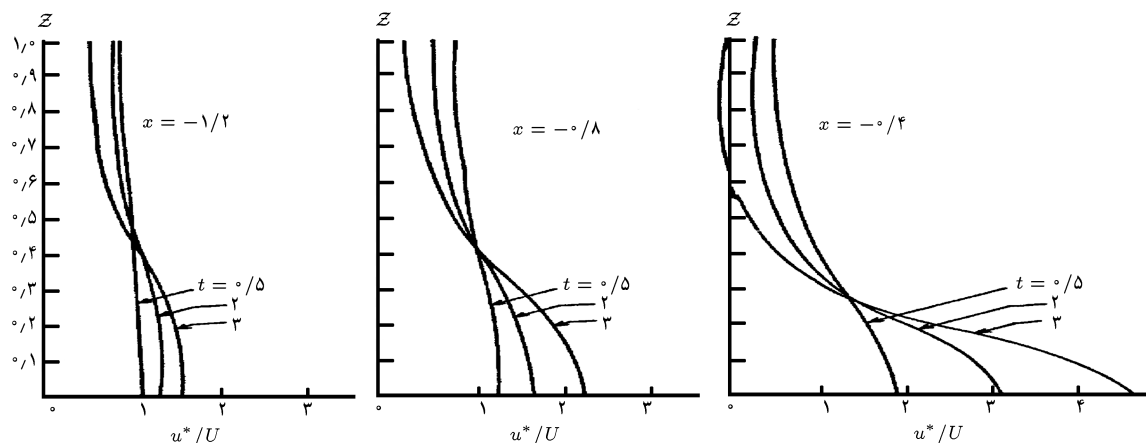
به طور مشابه، رابطه‌ی تراکم‌ناپذیری عبارت است از:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + F \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = w \quad (2)$$

دائمی شدن جریان را در کنار فرایند یاد شده توضیح داد. محققین نشان دادند که روند حرکت امواج همواره ادامه ندارد و نهایتاً به علت اثرات اینرسی جریان پایه^۹ حرکت امواج برشی متوقف، و یا بر اثر اصطکاک سیال امواج برشی میرا می‌شوند. در این حالت جریان سیال در مخزن دائمی شده و ضخامت لایه‌ی گزینه‌ی در هر مقطع بستگی دارد به تعداد امواجی که از آن گذشته است. در نواحی نزدیک به درجه اندرکنش جریان پایه و امواج برشی معمولاً مهم است، در حالی که در نواحی دور از درجه اصطکاک سیال باعث میراشدن امواج می‌شود، و در نتیجه اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. در ابتدای باز شدن درجه، توزیع جریان پایه در نواحی غیرمجاور درجه، یکنواخت است و بعد از عبور هر موج توزیع آن متمایل به مقدار بیشینه در سطح درجه می‌شود. به طور کلی اثرات اندرکنش جریان پایه و موج برشی به صورت کم شدن سرعت موج و تغییر شکل موج بروز می‌کند.

مطالعات کتابخانه‌یی انجام شده نشان می‌دهد که کارهای انجام شده در زمینه‌ی اثرات اندرکنش جریان پایه و امواج برشی اندک است که در اینجا به طور مختصر ذکر می‌شود. کلارک و ایمبگر اثرات گرادیان قائم جریان پایه بر حرکت امواج برشی در مخزن با لایه‌بندی خطی را مورد بررسی قرار داده و مدلی تحلیلی از شکل‌گیری لایه‌ی گزینه‌ی و دائمی شدن آن برای این حالت را ارائه دادند.^[۳] آنها همچنین به بررسی حرکت امواج برشی در یک سیال دولایه^{۱۰} پرداختند و نشان دادند که برخلاف لایه‌بندی خطی، در این حالت گرادیان قائم جریان پایه باعث ایستادن امواج برشی نمی‌شود.^[۴] آنها سپس اثرات غیرخطی حرکت امواج برشی را وارد محاسبات خود کردند و موفق به ارائه‌ی توضیحی برای ایستادن امواج برشی و یافتن دبی بحرانی برای ایجاد تخلیه‌ی گزینه‌ی در این حالت شدند.

در موضوع اندرکنش جریان پایه با امواج برشی در تخلیه‌ی گزینه‌ی از یک مخزن با لایه‌بندی خطی، مدل تحلیلی پیشنهادی^[۳] از معادلات حاکم بر حرکت سیال استخراج نشده و بیشتر مبتنی بر استدلال فیزیکی است؛ در نتیجه پایه‌ی نظری استواری ندارد. در این نوشتار اندرکنش



شکل ۳. تغییرات پروفیل سرعت افقی در مقاطع مختلف از مخزن با زمان [۱].

حل مسئله‌ی تخلیه‌ی گزینشی با اثرات غیرخطی کوچک

از آنجا که روش «تحریک^{۱۵} منظم» فقط برای به دست آوردن جواب مسئله برای x های کوچک مناسب است و نمی‌توان با استفاده از آن جواب را برای فواصل دور از دریچه پیش‌بینی کرد، برای حل مسئله از روش تحریک چندمقیاسه استفاده می‌شود. بسط^{۱۰} برای Ψ و ρ

$$\Psi = \Psi_0 + F\Psi_1 + F^2\Psi_2 + \dots \quad \text{و}$$

$$\rho = \rho^0 + F\rho_1 + F^2\rho_2 + \dots \quad (10)$$

فرض می‌شود. سپس ضامن تعریف متغیر مکانی دیگری به نام $\xi = xF$ که یک متغیر مکانی بلند^{۱۶} است، فرض می‌شود که $\Psi_0 = \Psi_0(x, \xi, z, t)$ و $\rho^0 = \rho^0(x, \xi, z, t)$. در نتیجه مشتق‌های پاره‌یی این دو متغیر نسبت به x عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial \Psi_0(x, z, t, \xi)}{\partial x} + F \frac{\partial \Psi_0(x, z, t, \xi)}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \rho^0(x, z, t, \xi)}{\partial x} + F \frac{\partial \rho^0(x, z, t, \xi)}{\partial \xi}$$

در $O(1)$ معادلات حاکم عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} = \frac{\partial \rho^0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho^0}{\partial t} = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \quad (11)$$

با تعریف $\psi = \Psi_0 - zH(t)$ می‌توان مسئله را به شکل ساده‌تری تبدیل کرد. با حذف ρ^0 ، معادله‌ی حاکم بر ψ عبارت است از:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

با استفاده از تعریف تابع جریان Ψ که، $u = \partial \Psi / \partial z$ و $w = -\partial \Psi / \partial x$ ، می‌توان نوشت: $\zeta = \nabla^2 \Psi$ و در نتیجه رابطه‌های ۱ و ۲ به روابط زیر تبدیل می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + F \frac{\partial (\nabla^2 \Psi, \Psi)}{\partial (x, z)} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + F \frac{\partial (\rho, \Psi)}{\partial (x, z)} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4)$$

با فرض باز شدن ناگهانی دریچه، معادلات ۳ و ۴ تحت شرایط مرزی

$$\Psi = 0 \quad \text{روی بستر مخزن} \quad (5)$$

$$\Psi = H(t) \quad \text{روی } z = 1 \text{ و } x = 0 \quad (6)$$

$$|\Psi| < \infty \quad \text{در } x = \infty \quad (7)$$

و شرایط اولیه

$$\rho = 0 \quad \text{و} \quad u = w = 0 \quad \text{در } t = 0 \quad (8)$$

قرار دارند که در آن‌ها $H(t)$ تابع پله‌یی است. بر مبنای شرایط مرزی ۵ و ۶، دیواره‌های مخزن خطوط جریان و دبی عبوری در طول مخزن واحد است. شرایط اولیه‌ی ۸ با ساکن بودن سیال قبل از باز شدن دریچه متناظرند.

سپس تغییرات جریان در راستای قائم بسیار بزرگ‌تر از تغییرات جریان در راستای افق، یا به عبارت دیگر $\partial^2 \Psi / \partial z^2 \ll \partial^2 \Psi / \partial x^2$ در نظر گرفته می‌شود؛ در نتیجه معادله‌ی ۳ به معادله‌ی ۹ تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + F \frac{\partial (\partial^2 \Psi / \partial z^2, \Psi)}{\partial (x, z)} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (9)$$

در حالت کلی با فرض کوچک بودن F (کوچک بودن دبی و در نتیجه ضعیف بودن اثرات غیرخطی)، می‌توان مسئله را با استفاده از روش «تحریک» حل کرد.

با معلوم بودن $A_n(\xi)$ و $B_n(\xi)$ و گرفتن عکس تبدیل لاپلاس در رابطه‌ی ۱۳ خواهیم داشت:

$$\Psi_0(x, z, t) = zH(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi z) H[n\pi x(\lambda + Fn\pi) + t] \quad (19)$$

بحث و نتیجه‌گیری

در این نوشتار اثرات غیرخطی کوچک جریان بر سازوکار پدیده‌ی تخلیه‌ی گزینشی به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور پس از استخراج معادلات هیدروینامیک مربوطه، با استفاده از روش «تحریر» اقدام به حل معادلات حاکم تا اولین رتبه‌ی غیرخطی شد. محققان براساس حل معادلات خطی حاکم، جواب خطی زیر را برای مسئله تخلیه گزینشی ارائه دادند:

$$\Psi_0 = zH(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi z) H(n\pi x + t) \quad (20)$$

که از مقایسه‌ی آن با معادله‌ی ۱۹ نتیجه می‌گیریم که بر اثر عوامل غیرخطی کوچک، فقط سرعت امواج برشی از $1/n\pi$ به

$$C_n = \frac{1}{n\pi(\lambda + Fn\pi)} \quad (21)$$

کاهش می‌یابد که برای F یکسان مقدار این کاهش سرعت برای مودهای بالاتر بیشتر است. این کاهش سرعت بدون تغییر شکل پروفیل عمودی و افقی امواج را می‌توان ناشی از اندرکنش توزیع سرعت یکنواخت اولیه (عبارت $zH(t)$ در رابطه‌ی ۲۰) با حرکت امواج برشی تفسیر کرد. از رابطه‌ی ۲۱ می‌توان نتیجه گرفت که برای $n \gg 1/F$ ، $C_n \rightarrow 0$ و در این حالت امواج برشی از حرکت باز ایستاده و در نتیجه جریان دائمی می‌شود که با نتایج موجود^[۱] و مشاهدات آزمایشگاهی^[۲] سازگار است. بررسی اندرکنش جریان غیریکنواخت حاصل از حرکت چند مود ابتدایی امواج برشی با حرکت امواج برشی بعدی، و ارائه‌ی مدلی برای دائمی شدن جریان گزینشی مستلزم انجام تجزیه و تحلیل به روش تحریر در رتبه‌های بعدی است که موضوعی برای تحقیقات آینده است.

که شکل خطی معادله‌ی چرخش است. با استفاده از تبدیل لاپلاس و اعمال شرایط اولیه و مرزی بالا و پایین، رابطه‌ی ۱۳ به دست می‌آید:

$$\Psi_0 = zH(t) + \mathfrak{S}^{-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(\xi) e^{sn\pi x} + B_n(\xi) e^{-sn\pi x} \right) \sin(n\pi z) \right] \quad (13)$$

که در آن \mathfrak{S}^{-1} عکس تبدیل لاپلاس و $A_n(\xi)$ و $B_n(\xi)$ توابعی هستند که از حل معادلات در $O(F)$ به دست می‌آیند. در $O(F)$ معادلات حاکم عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = - \frac{\partial(\partial^2 \Psi_0 / \partial z^2, \Psi_0)}{\partial(x, z)} + \frac{\partial \rho^0}{\partial \xi} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = - \frac{\partial(\rho^0, \Psi_0)}{\partial(x, z)} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial \xi} \quad (15)$$

در این حالت شرایط مرزی و اولیه تماماً همگن‌اند. با حل معادلات در این حالت می‌توان اثرات غیرخطی کوچک (برای F های کوچک) را در مسئله‌ی تخلیه گزینشی به صورت تقریبی برآورد کرد. از ترکیب معادلات ۱۴ و ۱۵ معادله‌ی ۱۶ حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x \partial \xi} \right) + \text{جملات عاری از تشدید} \quad (16)$$

با جایگذاری معادله‌ی ۱۳ در معادله‌ی ۱۶ و اعمال شرط وجود جواب غیرتشدید (جوابی که با x رشد نمی‌کند)، $A_n(\xi)$ و $B_n(\xi)$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A_n(\xi) = a_n e^{s(n\pi)^2 \xi} \quad \text{و} \quad B_n(\xi) = b_n e^{-s(n\pi)^2 \xi} \quad (17)$$

با اعمال شرایط مرزی در نقاط $\xi = 0, -\infty$ که با $x = 0, -\infty$ متناظرند، و با فرض کوچک بودن F داریم:

$$b_n = 0 \quad \text{و} \quad a_n = \frac{2}{n\pi s} \quad (18)$$

پانوش

1. selective withdrawal
2. weakly nonlinear effects
3. multi-scale perturbation
4. linearly stratified fluid
5. line sink

6. shear wave
7. long internal waves
8. withdrawal layer
9. background flow
10. two-layer fluid
11. perturbation

12. brunt-vaisala
13. vorticity
14. densimetric Froude number
15. regular perturbation
16. large length-scale variable

منابع

1. Pao, H. Kao and T. W. “Dynamics of establishment of selective withdrawal of a stratified fluid from a line a sink, Part 1-Theory” *J. Fluid Mechanics*, **65**, p. 657 (1974).
2. Kao, T. W. et al. “Dynamics of establishment of selective withdrawal of a stratified fluid from a line a sink, Part 2-Experiment” *J. Fluid Mechanics*, **65**, p. 689 (1974).
3. Clarke, S. R. and Imberger, J., “The effect of shear in selective withdrawal”, *Physics of Fluids*, **7**(7), p. 1523 (1995).
4. Clarke, S. R. and Imberger, J., “Nonlinear effects in the unsteady, critical withdrawal of a stratified fluid”, *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, **24**, p. 163 (1996).